

Theoretische Elektrotechnik II

1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1: Nichtlineares RLC-Netzwerk (Klausuraufgabe aus TET I)

Gegeben sei folgendes diskrete Netzwerk nach Bild 1.1a. Es beinhaltet einen Kondensator, dessen Kapazität abhängig ist von der Spannung, die über ihn gemessen wird. Seine $C(u)$ -Kennlinie nach Bild 1.1b weist keine Hysterese auf. Das Netzwerk wird durch eine ideale Stromquelle mit dem Strom $i_0(t)$ erregt, der Strom $i_L(t)$ ist die Ausgangsgröße.

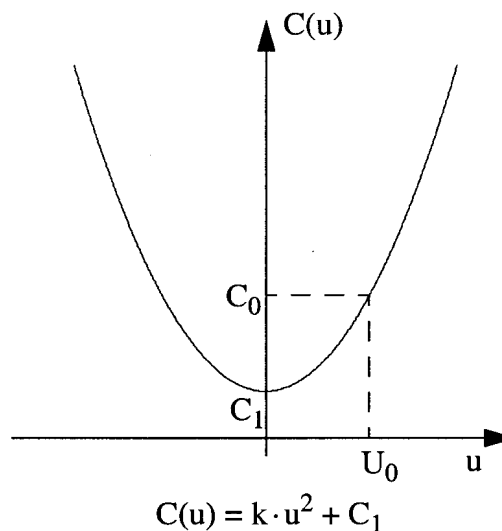
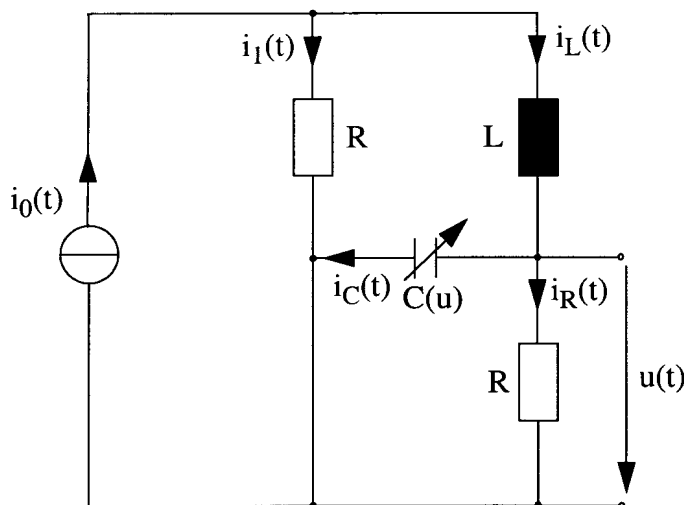


Bild 1.1a: RLC Netzwerk.

Bild 1.1b: Kennlinie des Kondensators

Es gelte: $2C_1R = \frac{L}{R}$, $\omega_0^2 C_1 L = \frac{1}{2}$ und $k = \frac{C_1}{3U_0^2}$.

Der Arbeitspunkt des Netzwerks liegt bei $u = U_0$.

- Welcher Eingangsstrom $i_0(t) = I_0$ muß für diesen Arbeitspunkt eingestellt werden?
- Wie hängt das Kleinsignalverhalten von $i_C(t)$ als Funktion von $u(t)$ im Arbeitspunkt $u = U_0$ ab, d.h. wie lautet $i_C(u(t))$ um den Arbeitspunkt?
- Stellen Sie die Differentialgleichung für das Kleinsignalverhalten des Netzwerks im Arbeitspunkt auf. Verwenden Sie dazu das Ergebnis aus 1.2.
- Wie lauten die Eigenfrequenzen und Eigenfunktionen bei Kleinsignalverhalten im Arbeitspunkt? Vereinfachen Sie sie möglichst weitgehend und geben Sie das Ergebnis in Abhängigkeit von ω_0 an.
- Wie lautet die Übertragungsfunktion $\underline{H}(j\omega) = \frac{I_L(j\omega)}{I_0(j\omega)}$ für sinusförmige Erregungen kleiner Amplitude im Arbeitspunkt.

Das Eingangssignal $i_0(t)$ enthalte nun zusätzlich eine starke Oberschwingung:

$$i_0(t) = \frac{2U_0}{R} + 0,1 \frac{U_0}{R} (\operatorname{Re}\{e^{j\omega_0 t}\} + \sqrt{10} \cdot \operatorname{Re}\{e^{j2\omega_0 t}\}).$$

- f) Wie groß ist das Verhältnis der Oberschwingungsamplitude zur Grundschwingungsamplitude des Ausgangssignals $i_L(t)$?
- g) Geben Sie die Sperrfrequenzen des Netzwerks im Arbeitspunkt an.
- h) Skizzieren Sie den Amplitudenfrequenzgang des Netzwerks.
- i) Um welchen Filtertyp handelt es sich?

Aufgabe 2: Harmonisch erregtes Netzwerk mit Schalter (Klausuraufgabe aus TET I)

Gegeben ist gemäß Bild 2.1 eine Spannungsquelle mit dem Innenwiderstand R_i und der Ursprungung $u_0(t) = U_0 + \hat{u}_0 \sin(2\pi f_0 t)$. Über eine Zuleitung mit dem Widerstand R_1 sowie der Spule L ist die ohmsche Last mit dem Widerstand R_L angeschlossen.

Über den Schalter S läßt sich eine unbekannte Reaktanz jX parallel zur Last R_L schalten.

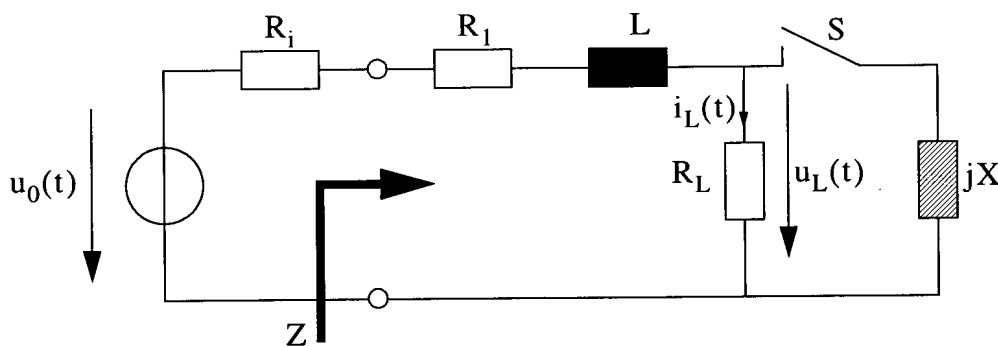


Bild 2.1 Lineares, abschnittsweise zeitinvariantes Netzwerk

Im folgenden sei der Schalter S zunächst geöffnet.

- a) Berechnen Sie den Strom $i_L(t)$ durch die Last R_L .
- b) Berechnen Sie die mittlere Wirkleistung P_W , die von der Last aufgenommen wird.
- c) Skizzieren Sie die Ortskurve der in Bild 2.1 angedeuteten Eingangsimpedanz $Z(j\omega)$ (geöffneter Schalter!).

Nun wird der Schalter S geschlossen und so die unbekannte Reaktanz jX parallel zur Last R_L geschaltet. Betrachten Sie im folgenden lediglich den Wechselanteil der Erregung.

- d) Ermitteln Sie die Reaktanz derart, daß die Last eine möglichst große Wirkleistung aufnimmt. Mit welchem passiven Bauteil kann die Reaktanz realisiert werden und wie muß dieses bei gegebener Frequenz f_0 dimensioniert werden? Zur Vereinfachung soll für diesen Aufgabenteil $R_i = R_1 = 0$ angenommen werden.
Hinweis: Bestimmen Sie das Maximum der aufgenommenen Leistung.
- e) Skizzieren Sie die Ortskurve der Eingangsimpedanz Z der in Bild 2.1 dargestellten Schaltung mit geschlossenem Schalter. Es gelte $2\pi f_0 L < R_L$.
Hinweis: Gehen Sie schrittweise vor, ermitteln Sie die Ortskurve graphisch!
- f) Geben Sie zu dem in Bild 2.1 gegebenen Netzwerk das duale Netzwerk mit allen dualisierten Größen und Zählpfeilen an. Nehmen Sie dabei für das originale Netzwerk einen **geschlossenen Schalter** an, zeichnen Sie aber **alle** Bauteile in das duale Netzwerk ein. Kennzeichnen Sie die dualen Größen mit dem Index „D“. Geben Sie jeweils den Zusammenhang zwischen originaler und dualer Größe an. Die Dualitätskonstante sei Z_0 .

Aufgabe 3: Kettenschaltung von Netzwerken (nach Klausuraufgabe TET I,II; Frühjahr 1997)

Gegeben ist eine Kettenschaltung nach Bild 3.1 aus N gleichartigen Netzwerken NW_i , $i = 1 \dots N$. Jedes dieser Netzwerke besteht aus mehreren passiven Komponenten sowie einem idealen Trennverstärker am Ausgang (siehe Bild 3.2).

Die Antwort des einzelnen Netzwerks NW_i auf einen Spannungssprung $u_0(t) = U_0 s(t)$ sei $u(t) = U_0(1 - e^{-\alpha t})s(t)$ mit $\alpha > 0$. Sämtliche Netzwerke seien zur Zeit $t = 0^-$ energiefrei.

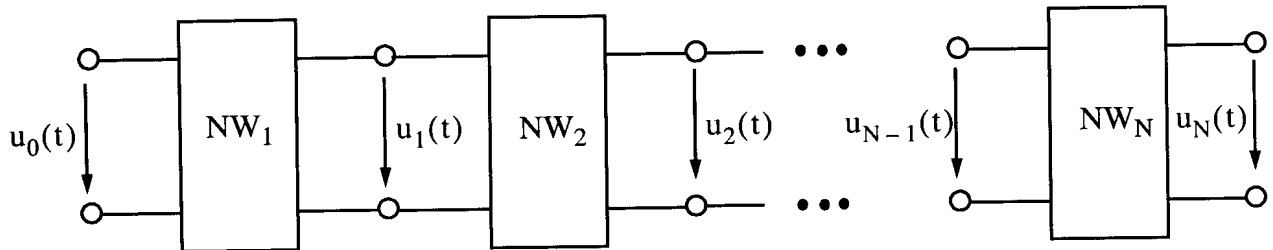


Bild 3.1 Kettenschaltung von gleichartigen Netzwerken

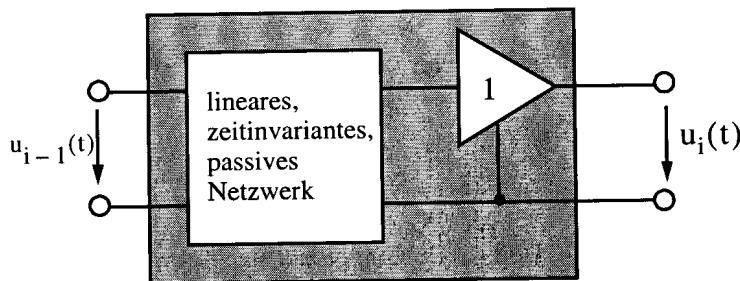


Bild 3.2 Blockschaltbild eines einzelnen Netzwerks NW_i

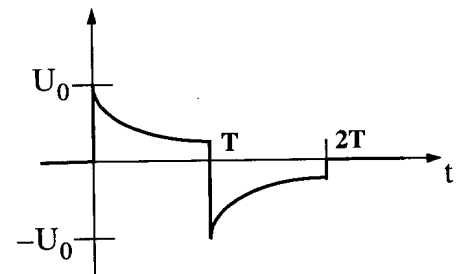


Bild 3.3 Erregung für Aufgabenteil d)

- Geben Sie die Ordnung und den Filtertyp des Netzwerks NW_i an (mit Begründung)!
- Welche Ordnung hat die Kettenschaltung der Netzwerke NW_1 bis NW_N ?
- Berechnen Sie im Zeitbereich die normierte Impulsantwort $h_N(t)$ am Ausgang des N -ten Netzwerks!
- Berechnen Sie im Zeitbereich die Antwort $u_N(t)$ auf die in Bild 3.3 dargestellte Erregung

$$u_0(t) = \begin{cases} U_0 \cdot e^{-\alpha t} & 0 \leq t < T \\ -U_0 \cdot e^{-\alpha(t-T)} & T \leq t < 2T \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Geben Sie eine Realisierung für das Netzwerk NW_i an!

Aufgabe 4: Fourieranalyse von periodischen Signalen

Gegeben sind mehrere stationäre, periodische Signale nach Bild 4.1 bis Bild 4.4.

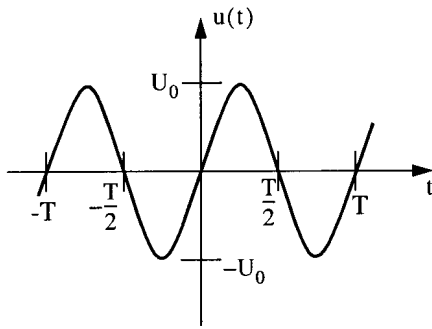


Bild 4.1 Stationäre Sinusschwingung

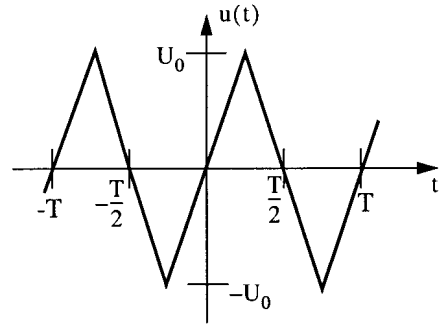


Bild 4.2 Stationäre Dreieckschwingung

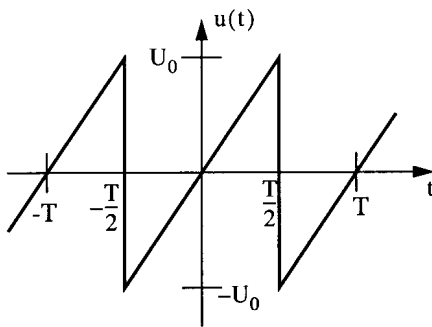


Bild 4.2 Stationäre Sägezahnchwingung

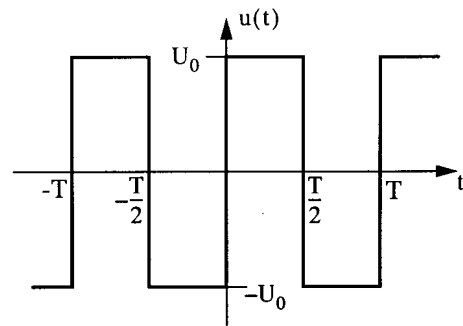


Bild 4.4 Stationäre Rechteckschwingung

Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten $a_0/2$, a_μ und b_μ der Fourier-Reihenentwicklung

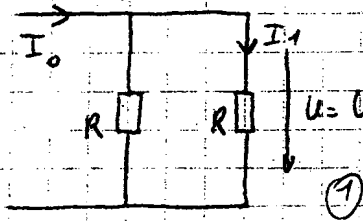
$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \cos(\mu\omega_0 t) + \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu \sin(\mu\omega_0 t)$$

aller vier Signale und berechnen Sie explizit die ersten drei Glieder einer jeden Fourier-Reihe.

Musterlösung

1. Aufgabe.

1.1 ESB für Arbeitspunkt.



$$I_0 = 2I_1 = 2 \cdot \frac{U_0}{R} \quad (1)$$

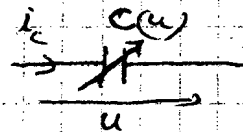
1.2

$$i_c = (C u) \quad (0,5) \text{ mit } C = C(u)$$

$$i_c = \dot{C} u + C \dot{u} = \frac{dC}{dt} u + C \frac{du}{dt}$$

$$= \frac{dC}{du} \frac{du}{dt} u + C \frac{du}{dt}$$

$$= \frac{du}{dt} \left(\frac{dC}{du} u + C \right) \quad (1)$$



Im Umgebung des Arbeitspunkts: $i_c(t) = \frac{du}{dt} \left(\frac{dC}{du} \Big|_{u=U_0} u + C \Big|_{u=U_0} \right)$

$$C(u) = k u^2 + C_1 \quad C(U_0) = k U_0^2 + C_1 = \frac{C_1}{3U_0^2} U_0^2 + C_1 = \frac{4}{3} C_1 \quad (0,5)$$

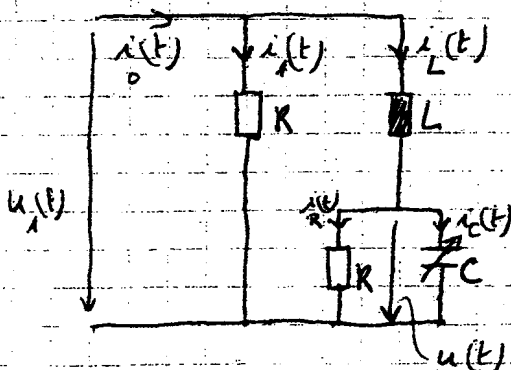
$$\frac{dC}{du} = 2k u \Rightarrow \frac{dC}{du} \Big|_{u=U_0} = 2k U_0 = 2 \cdot \frac{C_1}{3U_0^2} U_0$$

$$\frac{dC}{du} u \Big|_{u=U_0} = \frac{2C_1}{3} \quad (0,5)$$

$$i_c(t) = \dot{u} \left(\frac{2C_1}{3} + \frac{4C_1}{3} \right) = 2C_1 \dot{u}(t)$$

$$i_c(u) = \dot{u} 2C_1 = C_{lin}(U_0) \dot{u} = C \dot{u} \quad (0,5)$$

1.3



$$i_0(t) = i_1(t) + i_L(t)$$

$$= \frac{u_1}{R} + i_L$$

$$i_0 = \frac{\dot{u}_1}{R} + \dot{i}_L = \frac{\dot{u}}{R} + \frac{\dot{u}_L}{R} + \dot{i}_L$$

$$= \frac{\dot{u}}{R} + \frac{L \ddot{i}_L}{R} + \dot{i}_L \quad (0,5)$$

mit $i_L = i_c + i_R$ und Um den Arbeits-

$DL \neq 0 \neq L$

$$i_L = C \dot{u} + \frac{u}{R} \Rightarrow C \dot{u} = i_L - \frac{u}{R} \quad (0.5)$$

$$\dot{u} = \frac{i_L}{C} - \frac{u}{RC} = \frac{i_L}{C} - \frac{1}{RC} (u_1 - u_L)$$

$$= \frac{1}{2C_1} i_L - \frac{1}{2RC_1} (R(i_0 - i_L) - L \dot{i}_L)$$

$$= \frac{1}{2C_1} i_L - \frac{1}{2C_1} i_0 + \frac{1}{2C_1} i_L + \frac{L}{2RC_1} \dot{i}_L \quad (0.5)$$

(0.4) in (0.5) einsetzen

$$\dot{i}_L = \frac{1}{2C_1 R} i_L - \frac{1}{2C_1 R} i_0 + \frac{1}{2RC_1} i_L + \frac{L}{2R^2 C_1} \dot{i}_L + \frac{L}{R} \ddot{i}_L + \dot{i}_L$$

$$\dot{i}_L + \frac{1}{2C_1 R} i_L = \frac{L}{R} \ddot{i}_L + \frac{2R^2 C_1 + L}{2R^2 C_1} \dot{i}_L + \frac{1}{2RC_1} i_L$$

$$\frac{R}{L} \dot{i}_L + \frac{1}{2C_1 L} i_L = \ddot{i}_L + \frac{2R^2 C_1 + L}{2R^2 C_1 L} \dot{i}_L + \frac{1}{2C_1 L} i_L \quad (0.5)$$

aus $2C_1 R = \frac{L}{R}$ folgt $C_1 = \frac{1}{2} \frac{L}{R^2}$

$$\ddot{i}_L + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{2C_1 R} \right) \dot{i}_L + \frac{1}{C_1 L} i_L = \frac{R}{L} \ddot{i}_L + \frac{1}{2C_1 L} i_L$$

$$\ddot{i}_L + \frac{2R}{L} \dot{i}_L + \frac{2R^2}{L^2} i_L = \frac{R}{L} \ddot{i}_L + \frac{R^2}{L^2} i_L \quad (0.5)$$

mit $\omega_0^2 C_1 L = \frac{1}{2}$ und $C_1 = \frac{1}{2} \frac{L}{R^2}$ folgt $\omega_0^2 = \frac{R^2}{L^2}$ $\omega_0 = \frac{R}{L}$

$$\ddot{i}_L + 2\omega_0 \dot{i}_L + 2\omega_0^2 i_L = \omega_0 \ddot{i}_L + \omega_0^2 i_L \quad (0.5)$$

1.4. $s^2 + 2\omega_0 s + 2\omega_0^2 = 0$

EF: $e^{s_1 t}$, $e^{s_2 t}$
 $b_1: e^{-\omega_0 t} \cos \omega_0 t$, $b_2: e^{-\omega_0 t} \sin \omega_0 t$ (1)

$$s_{1,2} = -\omega_0 \pm \sqrt{\frac{1}{4} \omega_0^2 - 2\omega_0^2} = -\omega_0 \pm j\omega_0 \quad (1)$$

1.5. Aus $\ddot{i}_L + \frac{2R}{L} \dot{i}_L + \frac{2R^2}{L^2} i_L = \frac{R}{L} \ddot{i}_L + \frac{R^2}{L^2} i_L$

mit $\frac{d^n}{dt^n} x(t) \rightarrow (j\omega)^n X(j\omega)$ folgt

$$(j\omega)^2 I_L(j\omega) + 2\omega_0 (j\omega) I_L(j\omega) + 2\omega_0^2 I_L(j\omega) = \omega_0 (j\omega) I_L(j\omega) + \omega_0^2 I_L(j\omega) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{I_L(j\omega)}{I_L(0)} = \frac{(j\omega) \omega_0 + \omega_0^2}{\omega_0^2} \quad (0.5)$$

$$1.6 \quad \underline{I}_L(j\omega_0) = \left(\frac{j\omega_0^2 + \omega_0^2}{(j\omega_0)^2 + 2j\omega_0^2 + 2\omega_0^2} = \frac{1+j}{1+2j} \right) \cdot 0,1 \frac{U_0}{R} \quad (0,5)$$

$$\underline{I}_L(j2\omega_0) = \left(\frac{2j\omega_0^2 + \omega_0^2}{(j2\omega_0)^2 + 2\omega_0(j2\omega_0) + 2\omega_0^2} = \frac{1+2j}{-2+4j} \right) \cdot 0,1 \frac{U_0}{R} \sqrt{10} \quad (0,5)$$

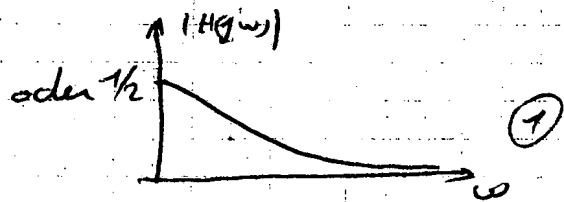
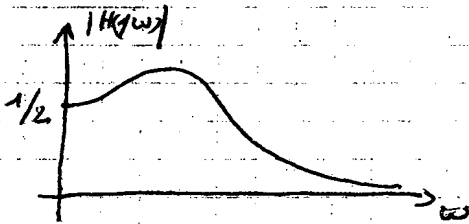
$$\left| \frac{\underline{I}_L(j2\omega_0)}{\underline{I}_L(j\omega_0)} \right| = \left| \frac{1+2j}{-2+4j} \right| \cdot \left| \frac{1+2j}{1+j} \right| \cdot \sqrt{10} \quad (1)$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{10} = \frac{5}{\sqrt{2} \sqrt{20} \sqrt{2}} \cdot \sqrt{10} = \frac{5}{2} \quad (1)$$

Zusatzaufgaben:

- 1.7.1 $H(j\omega) = 0 \quad s\omega_0 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow s = -\omega_0$ (rein reell, also
 aber $m < n \Rightarrow \infty$ ist Sperrfrequenz d.h. ($s = \pm j\omega_0$) keine Frequenz der
 eigentlichen Sch. (1)

1.7.2



1.7.3

Bandpaß

oder

Tiefpaß

beide sind zulässig. (1)

Theoretische Elektrotechnik II, Musterlösung

Aufgabe 2: a)

$$I_L = \frac{\underline{U}_0}{R_i + R_1 + R_L + j\omega L}$$

$$I_L(\omega=0) = \frac{\underline{U}_0(\omega=0)}{R_i + R_1 + R_L}$$

$$I_L(\omega=\omega_0) = \frac{\underline{U}_0(\omega=\omega_0)}{R_i + R_1 + R_L + j\omega_0 L} = \frac{\underline{U}_0(\omega=\omega_0)}{\sqrt{(R_i + R_1 + R_L)^2 + \omega_0^2 L^2}} \cdot e^{-j \arctan\left(\frac{\omega_0 L}{R_i + R_1 + R_L}\right)}$$

$$\Rightarrow i_L(t) = \frac{U_0}{R_i + R_1 + R_L} + \frac{\hat{u}_0}{\sqrt{(R_i + R_1 + R_L)^2 + \omega_0^2 L^2}} \cdot \sin\left(\omega_0 t - \arctan\left(\frac{\omega_0 L}{R_i + R_1 + R_L}\right)\right)$$

b)

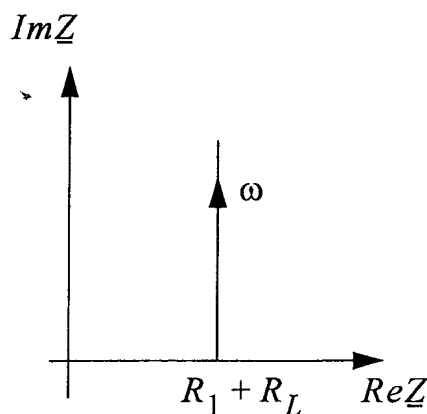
$$P_W(0) = U_L \cdot I_L = R_L \cdot I_L^2 = \frac{R_L U_0^2}{(R_i + R_1 + R_L)^2}$$

$$P_W(\omega_0) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{ \underline{U}_L I_L^* \right\}$$

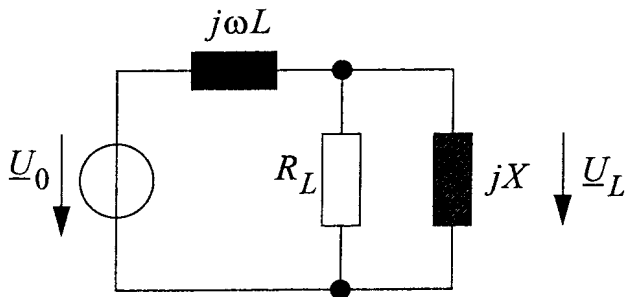
$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{ I_L R_L I_L^* \right\} = \frac{1}{2} R_L |I_L|^2 = \frac{1}{2} R_L \frac{u_0^2}{(R_i + R_1 + R_L)^2 + \omega_0^2 L^2}$$

$$P_W = P_W(0) + P_W(\omega_0) = \frac{R_L U_0^2}{(R_i + R_1 + R_L)^2} + \frac{1}{2} R_L \frac{u_0^2}{(R_i + R_1 + R_L)^2 + \omega_0^2 L^2}$$

c)



d) Vereinfachung:



$$\underline{U}_L = \underline{U}_0 \cdot \frac{R_L |jX|}{j\omega_0 L + R_L |jX|} = \underline{U}_0 \cdot \frac{\frac{R_L \cdot jX}{R_L + jX}}{j\omega_0 L + \frac{R_L \cdot jX}{R_L + jX}} = \underline{U}_0 \cdot \frac{R_L \cdot jX}{j\omega_0 L(R_L + jX) + R_L \cdot jX}$$

$$= \underline{U}_0 \cdot \frac{R_L \cdot jX}{-\omega_0 L X + j(\omega_0 L R_L + R_L X)}$$

$$P_W = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \underline{U}_L \cdot \frac{\underline{U}_L^*}{R_L} \right\} = \frac{1}{2R_L} |\underline{U}_L|^2 = \frac{1}{2R_L} \frac{(R_L X)^2 |\underline{U}_0|^2}{(\omega_0 L X)^2 + (\omega_0 L R_L + R_L X)^2}$$

$$= \frac{R_L}{2} \frac{u_0^2}{(\omega_0 L)^2 + R_L^2 \left(1 + \frac{\omega_0 L}{X}\right)^2}$$

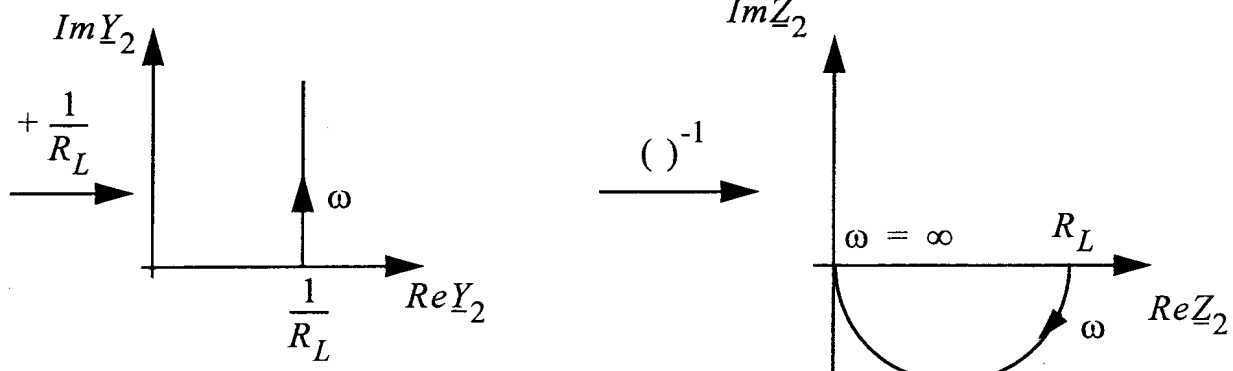
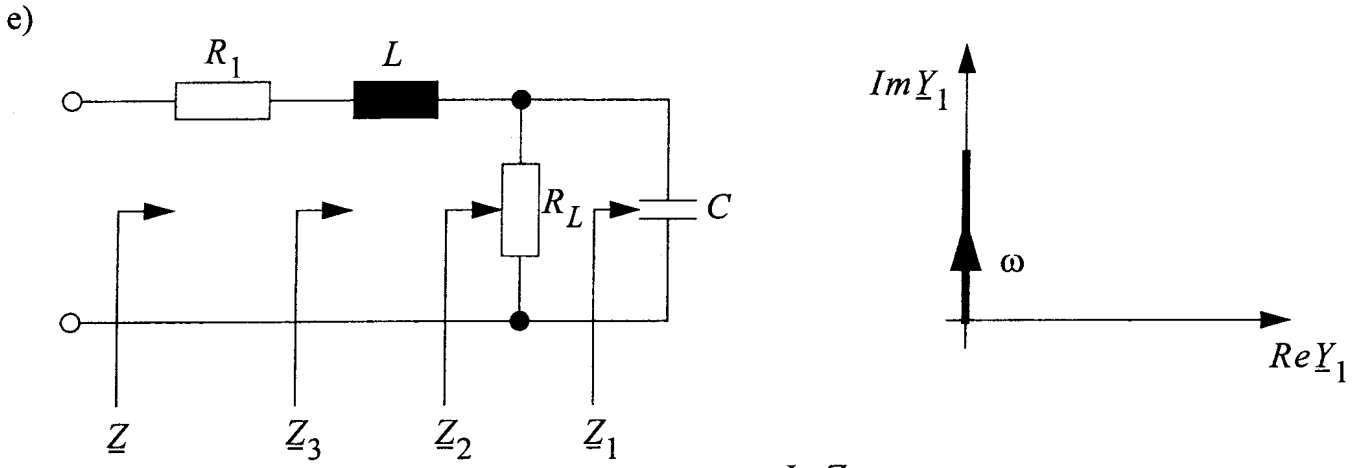
Maximum von P_W : $\frac{dP_W}{dX} = 0$

$$\text{also: } \frac{dP_W}{dX} = \left(-\frac{R_L}{2} u_0^2\right) \frac{2R_L^2 \left(1 + \frac{\omega_0 L}{X}\right) \cdot \left(-\frac{\omega_0 L}{X^2}\right)}{\left((\omega_0 L)^2 + R_L^2 \left(1 + \frac{\omega_0 L}{X}\right)^2\right)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{\omega_0 L}{X} = 0$$

$\Leftrightarrow X = -\omega_0 L \Rightarrow$ Realisierung mit Kondensator der Kapazität C, wobei:

$$|X| = \frac{1}{\omega_0 C} = \omega_0 L \Rightarrow C = \frac{1}{\omega_0^2 L}, \text{ also nur f\u00fcr eine bestimmte Frequenz m\u00f6glich}$$



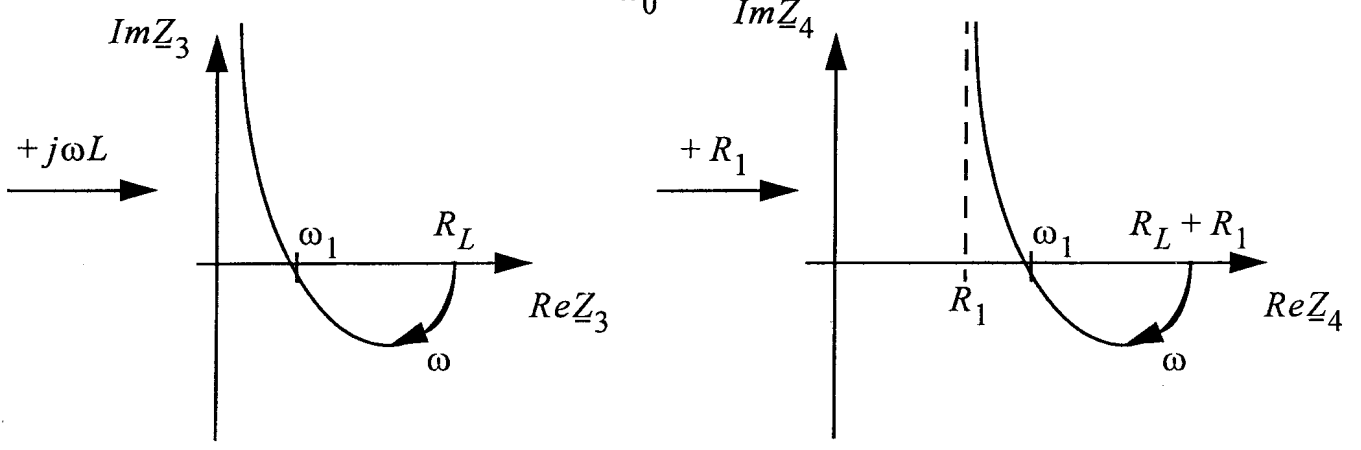
$$\underline{Y}_1 = j\omega C \Rightarrow \underline{Y}_2 = \frac{1}{R_L} + j\omega C \Rightarrow \underline{Z}_2 = \frac{R_L}{1 + j\omega C R_L} \quad \underline{Z}_3 = j\omega L + \frac{R_L}{1 + j\omega C R_L}$$

$$= \frac{j\omega L + (j\omega)^2 L C R_L + R_L}{1 + j\omega C R_L} = \frac{j\omega L + (j\omega)^2 L C R_L + R_L - j\omega C R_L^2 - (j\omega)^3 L C^2 R_L^2 - (j\omega)^2 L C R_L}{1 + (\omega C R_L)^2}$$

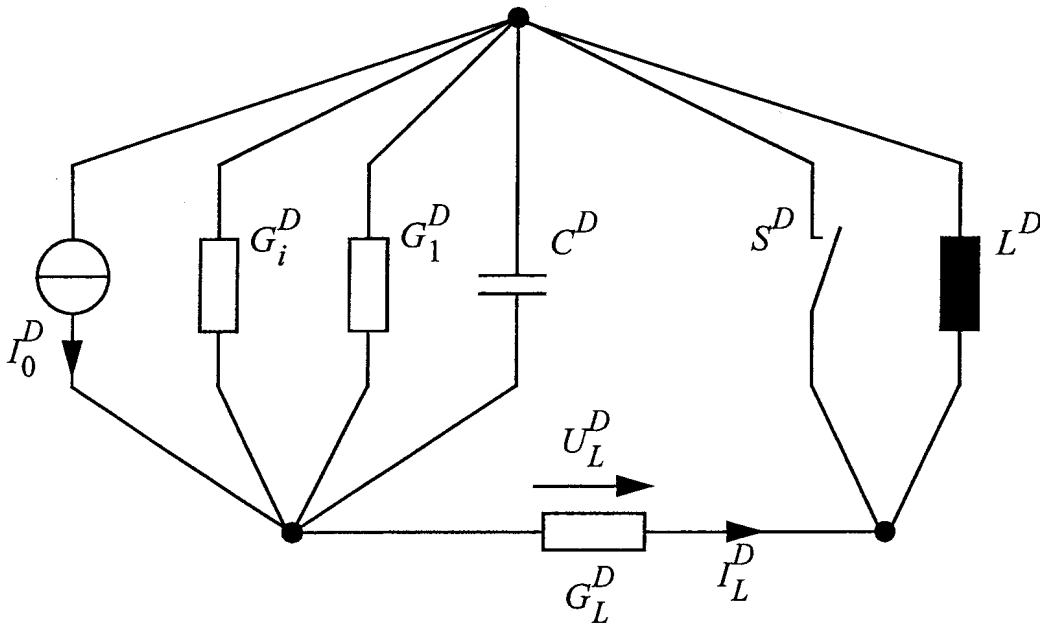
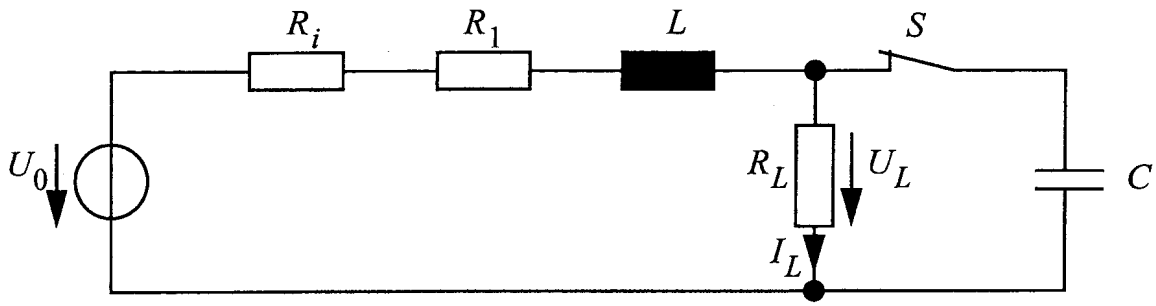
$$\underline{Z}_3 = \frac{j \left\{ \omega L - \omega C R_L^2 + \omega^3 L C^2 R_L^2 \right\} + R_L}{1 + (\omega C R_L)^2}$$

$$\text{Im}\{\underline{Z}_3(\omega_1)\} = 0 \Rightarrow L - C R_L^2 + \omega_1^2 L C^2 R_L^2 = 0 \Leftrightarrow \omega_1^2 = \frac{C R_L^2 - L}{L C^2 R_L^2}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{C R_L^2 - L}{L C^2 R_L^2}} = \frac{1}{\sqrt{L C}} \sqrt{\frac{C R_L^2 - L}{C R_L^2}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{L C}}}_{\omega_0} \sqrt{1 - \frac{L}{C R_L^2}} < \omega_0$$



f)



$$I_0^D = \frac{U_0}{Z_0} \quad I_L^D = \frac{U_L}{Z_0} \quad U_L^D = Z_0 \cdot I_L$$

$$G_i^D = \frac{R_i}{Z_0^2} \quad G_1^D = \frac{R_1}{Z_0^2} \quad G_L^D = \frac{R_L}{Z_0^2}$$

$$C^D = \frac{L}{Z_0^2} \quad L^D = Z_0^2 \cdot C^D$$

Aufgabe 3:

a) - Ordnung $n = 1$, da nur eine Eigenfunktion

- Tiefpass, da $n = 1$

- Sprungantwort $a(t) = (1 - e^{-\alpha t}) \cdot s(t) \Rightarrow (a(t \rightarrow \infty)) = 1$

- oder:

$$\text{Impulsantwort } h(t) = \dot{a}(t) = \frac{d}{dt}[s(t) - e^{-\alpha t} s(t)]$$

$$= \dot{s}(t) - [e^{-\alpha t} \dot{s}(t) - \alpha e^{-\alpha t} s(t)]$$

$$= \delta(t) - e^{-\alpha t} \delta(t) + \alpha e^{-\alpha t} s(t)$$

$$= \delta(t) - e^{-\alpha \cdot 0} \delta(t) + \alpha e^{-\alpha t} s(t)$$

$$= \alpha e^{-\alpha t} s(t) \Rightarrow \text{impulsundurchlässig}$$

● b) N, da jedes Netzwerk NW_i die Ordnung 1 hat und sich durch die Kettenschaltung keine abhängigen Energiespeicher ergeben (Trennverstärker!)

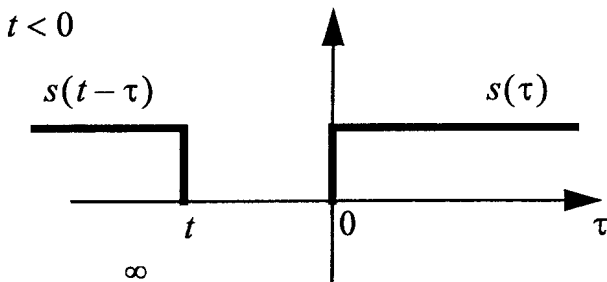
c) 1) Bestimmung der Impulsantwort eines Netzwerks: $h(t) = \dot{a}(t) = \alpha e^{-\alpha t} s(t)$

2) Wiederholte Faltung: $h_N(t) = \underbrace{h(t) * h(t) * h(t) * h(t) * \dots * h(t)}_{N \text{ mal}}$

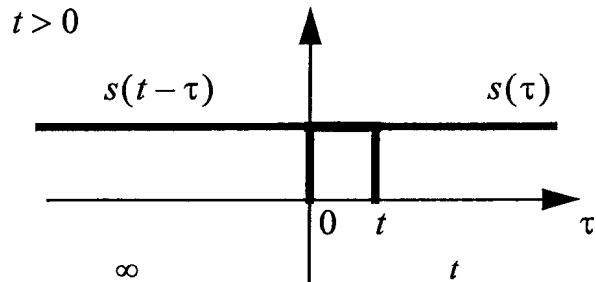
$$h_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) \cdot h(\tau) d\tau = h(t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) d\tau = h(t)$$

$$h_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \cdot h_1(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{-\alpha \tau} s(\tau) \cdot \alpha e^{-\alpha(t-\tau)} s(t-\tau) d\tau$$

$$= \underbrace{\alpha^2 \cdot e^{-\alpha t}}_{\text{Nur für } t > 0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot s(t-\tau) d\tau = \alpha^2 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \int_0^t d\tau \cdot s(t) = \alpha^2 \cdot t \cdot e^{-\alpha t} \cdot s(t)$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot s(t-\tau) d\tau = 0$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot s(t-\tau) d\tau = \int_0^t d\tau$$

$$h_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \cdot h_2(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 \tau e^{-\alpha\tau} s(\tau) \cdot \alpha e^{-\alpha(t-\tau)} s(t-\tau) d\tau$$

$$= \alpha^3 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \int_0^t \tau \cdot d\tau \cdot s(t) = \alpha^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot e^{-\alpha t} \cdot s(t)$$

$$h_4(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \cdot h_3(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^3 \frac{1}{2} \tau^2 e^{-\alpha\tau} s(\tau) \cdot \alpha e^{-\alpha(t-\tau)} s(t-\tau) d\tau$$

$$= \alpha^4 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^t \tau^2 \cdot d\tau \cdot s(t) = \alpha^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot t^3 \cdot e^{-\alpha t} \cdot s(t) = \alpha^4 \cdot \frac{1}{3!} \cdot t^3 \cdot e^{-\alpha t} \cdot s(t)$$

$$h_i(t) = \alpha^i \cdot \frac{1}{(i-1)!} \cdot t^{(i-1)} \cdot e^{-\alpha t} \cdot s(t)$$

$$h_N(t) = \alpha^N \cdot \frac{1}{(N-1)!} \cdot t^{(N-1)} \cdot e^{-\alpha t} \cdot s(t)$$

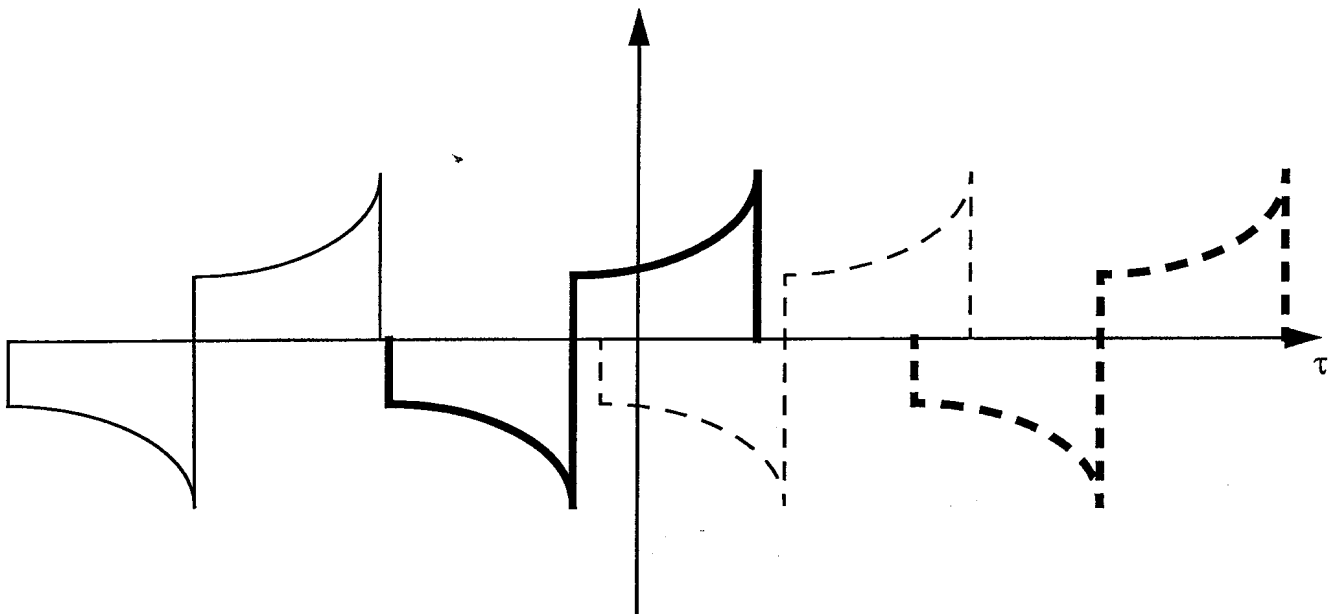
d) Es ergeben sich 4 Fälle bei der Faltung $u_N(t) = u_0(t) * h_N(t)$

1. Fall: $t < 0 \Rightarrow u_N(t) = 0$ _____

2. Fall: $0 < t < T$ _____

3. Fall: $T < t < 2T$ - - - - -

4. Fall: $2T < t$ - - - - -



zum 2. Fall: $0 < t < T$

$$\begin{aligned}
 u_N(t) &= \int_0^t \alpha^N \cdot \frac{1}{(N-1)!} \cdot \tau^{(N-1)} \cdot e^{-\alpha\tau} \cdot U_0 e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau \cdot s(t) \\
 &= \alpha^N \cdot \frac{1}{(N-1)!} \cdot e^{-\alpha t} \cdot U_0 \cdot \int_0^t \tau^{(N-1)} d\tau \cdot s(t) = \alpha^N \cdot \frac{1}{(N-1)!} \cdot e^{-\alpha t} \cdot U_0 \cdot \left[\frac{1}{N} \cdot \tau^N \right]_0^t \cdot s(t) \\
 &= \alpha^N \cdot \frac{1}{N!} \cdot e^{-\alpha t} \cdot U_0 \cdot t^N \cdot s(t)
 \end{aligned}$$

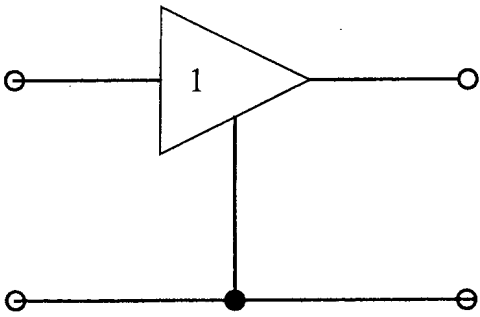
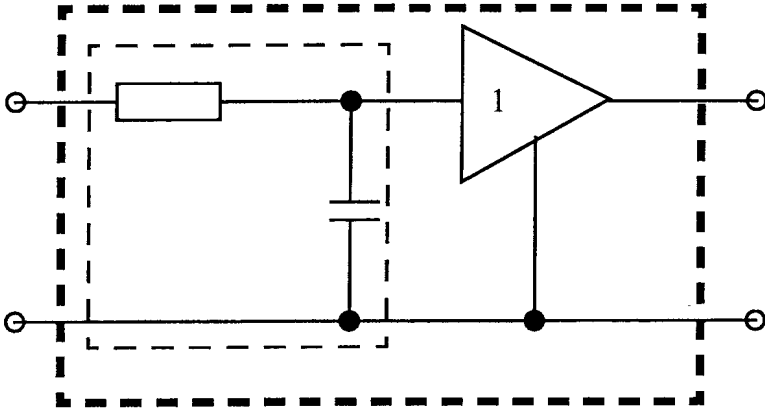
zum 3. Fall: $T < t < 2T$:

$$\begin{aligned}
 u_N(t) &= \int_0^{t-T} \alpha^N \cdot \frac{1}{(N-1)!} \cdot \tau^{(N-1)} \cdot e^{-\alpha\tau} \cdot (-U_0) e^{-\alpha(t-\tau-T)} d\tau \cdot s(t) \\
 &\quad + \int_{t-T}^t \alpha^N \cdot \frac{1}{(N-1)!} \cdot \tau^{(N-1)} \cdot e^{-\alpha\tau} \cdot U_0 e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau \cdot s(t) \\
 &= \alpha^N \cdot \frac{1}{(N-1)!} \cdot e^{-\alpha t} \cdot U_0 \cdot \left[-e^{\alpha T} \cdot \int_0^{t-T} \tau^{(N-1)} d\tau + \int_{t-T}^t \tau^{(N-1)} d\tau \right] \cdot s(t) \\
 &= \alpha^N \cdot \frac{1}{(N-1)!} \cdot e^{-\alpha t} \cdot U_0 \cdot \frac{1}{N} \cdot [t^N - (t-T)^N - e^{\alpha T} \cdot (t-T)^N] \cdot s(t) \\
 &= \alpha^N \cdot \frac{1}{N!} \cdot e^{-\alpha t} \cdot U_0 \cdot [t^N - (t-T)^N (1 + e^{\alpha T})] \cdot s(t)
 \end{aligned}$$

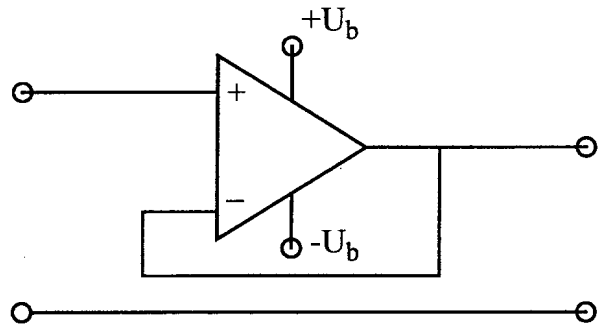
zum 4. Fall: $2T < t$:

$$\begin{aligned}
 u_N(t) &= \int_{t-2T}^{t-T} \alpha^N \cdot \frac{1}{(N-1)!} \cdot \tau^{(N-1)} \cdot e^{-\alpha\tau} \cdot (-U_0) e^{-\alpha(t-\tau-T)} d\tau \cdot s(t) \\
 &\quad + \int_{t-T}^t \alpha^N \cdot \frac{1}{(N-1)!} \cdot \tau^{(N-1)} \cdot e^{-\alpha\tau} \cdot U_0 e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau \cdot s(t) \\
 &= \alpha^N \cdot \frac{1}{(N-1)!} \cdot e^{-\alpha t} \cdot U_0 \cdot \left[-e^{\alpha T} \cdot \int_{t-2T}^{t-T} \tau^{(N-1)} d\tau + \int_{t-T}^t \tau^{(N-1)} d\tau \right] \cdot s(t) \\
 &= \alpha^N \cdot \frac{1}{N!} \cdot e^{-\alpha t} \cdot U_0 \cdot [t^N - (t-T)^N - e^{\alpha T} ((t-T)^N - (t-2T)^N)] \cdot s(t)
 \end{aligned}$$

e) Realisierung eines Netzwerkes NW_i :



\equiv



Aufgabe 4

Allgemein gilt:

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu} \cos(\mu\omega_0 t) + \sum_{\mu=1}^{\infty} b_{\mu} \sin(\mu\omega_0 t) \quad \text{wobei}$$

$$a_{\mu} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \cos(\mu\omega_0 t) dt \quad \text{und}$$

$$b_{\mu} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \sin(\mu\omega_0 t) dt \quad \text{mit } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Bei einer geraden Funktion sind alle b_{μ} Null, bei einer ungeraden Funktion verschwinden alle a_{μ} . Ist kein Gleichanteil vorhanden, gilt $\frac{a_0}{2} = 0$.

Bild 4.1 Stationäre Schwingung

$$u(t) = U_0 \sin(\omega_0 t)$$

$$\frac{a_0}{2} = 0 \quad (\text{kein Gleichanteil})$$

$$a_{\mu} = 0 \quad \forall \mu \quad (\text{ungerade Funktion})$$

$$b_1 = U_0$$

$$b_{\mu} = 0 \quad \text{für } \mu \neq 1$$

Bild 7.2 Stationäre Dreieckschwingung

Hier, wie in allen vier Beispielen handelt es sich um eine ungerade Funktion ohne Gleichanteil, d.h. $\frac{a_0}{2} = 0$ und $a_{\mu} = 0, \forall \mu$

$$u(t) = \begin{cases} \frac{4U_0}{T}(t + kT) & \text{für } -\frac{T}{4} + kT \leq t < \frac{T}{4} + kT \\ -\frac{4U_0}{T}(t + kT - \frac{T}{2}) & \text{für } \frac{T}{4} + kT \leq t < \frac{3T}{4} + kT \end{cases}$$

$$b_{\mu} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \frac{4U_0}{T} t \sin(\mu\omega_0 t) dt + \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \left(-\frac{4U_0}{T}\right) \left(t - \frac{T}{2}\right) \sin(\mu\omega_0 t) dt$$

$$= \frac{8U_0}{T^2} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} t \sin(\mu\omega_0 t) dt - \frac{8U_0}{T^2} \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} t \sin(\mu\omega_0 t) dt + \frac{4U_0}{T} \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \sin(\mu\omega_0 t) dt$$

$$= \frac{8U_0}{T^2} \left[\frac{\sin(\mu \frac{2\pi}{T} t)}{(\mu \frac{2\pi}{T})^2} - \frac{t \cos(\mu \frac{2\pi}{T} t)}{(\mu \frac{2\pi}{T})} \right]_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} - \frac{8U_0}{T^2} \left[\frac{\sin(\mu \frac{2\pi}{T} t)}{(\mu \frac{2\pi}{T})^2} - \frac{t \cos(\mu \frac{2\pi}{T} t)}{(\mu \frac{2\pi}{T})} \right]_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}$$

$$- \frac{4U_0}{T} \left[\frac{1}{\mu \frac{2\pi}{T}} \cos(\mu \frac{2\pi}{T} t) \right]_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}$$

$$= \frac{4U_0}{\mu\pi T} \left[\frac{\sin(\mu \frac{\pi}{2})}{\mu \frac{2\pi}{T}} - \frac{T}{4} \cos(\mu \frac{\pi}{2}) - \frac{\sin(-\mu \frac{\pi}{2})}{\mu \frac{2\pi}{T}} - \frac{T}{4} \cos(\mu \frac{\pi}{2}) \right]$$

$$- \frac{4U_0}{\mu\pi T} \left[\frac{\sin(\mu \frac{3\pi}{2})}{\mu \frac{2\pi}{T}} - \frac{3T}{4} \cos(\mu \frac{3\pi}{2}) - \frac{\sin(\mu \frac{\pi}{2})}{\mu \frac{2\pi}{T}} + \frac{T}{4} \cos(\mu \frac{\pi}{2}) \right]$$

$$- \frac{2U_0}{\mu\pi} \left[\cos(\mu \frac{3\pi}{2}) - \cos(\mu \frac{\pi}{2}) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4U_0}{\mu\pi} \left[\left(\frac{\sin(\mu\frac{\pi}{2})}{\mu 2\pi} - \frac{1}{4} \cos(\mu\frac{\pi}{2}) + \frac{\sin(\mu\frac{\pi}{2})}{\mu 2\pi} - \frac{1}{4} \cos(\mu\frac{\pi}{2}) \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\sin(\mu\frac{3\pi}{2})}{\mu 2\pi} + \frac{3}{4} \cos(\mu\frac{3\pi}{2}) + \frac{\sin(\mu\frac{\pi}{2})}{\mu 2\pi} - \frac{1}{4} \cos(\mu\frac{\pi}{2}) \right) \right] \\
&\quad + \frac{2U_0}{\mu\pi} \underbrace{\left(-2 \sin(\mu\pi) \sin(\mu\frac{\pi}{2}) \right)}_{=0} \\
&= \frac{4U_0}{\mu\pi} \left[\frac{3 \sin(\mu\frac{\pi}{2})}{\mu 2\pi} - \frac{\sin(\mu\frac{3\pi}{2})}{\mu 2\pi} + \frac{3}{4} \underbrace{\left(\cos(\mu\frac{3\pi}{2}) - \cos(\mu\frac{\pi}{2}) \right)}_{=0} \right] \\
&= \frac{2U_0}{(\mu\pi)^2} (3 \sin(\mu\frac{\pi}{2}) - \sin(\mu\frac{3\pi}{2})) \\
&= \frac{8U_0}{\mu^2\pi^2} \sin^3(\mu\frac{\pi}{2})
\end{aligned}$$

Bild 4.2 Stationäre Sägezahnswingung

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{2U_0}{T}(t + kT) \quad \left(-\frac{T}{2} + kT\right) \leq t < \left(\frac{T}{2} + kT\right) \\
b_\mu &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U_0 \frac{2}{T} t \sin(\mu\omega_0 t) dt \\
&= \frac{4U_0}{T^2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t \sin(\mu\omega_0 t) dt \\
&= \frac{4U_0}{T^2} \left[\frac{\sin(\mu\frac{2\pi}{T}t)}{(\mu\frac{2\pi}{T})^2} - \frac{t \cos(\mu\frac{2\pi}{T}t)}{(\mu\frac{2\pi}{T})} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{2U_0}{\mu\pi T} \left(\underbrace{\frac{\sin(\mu\pi)}{(\mu 2\pi)}}_{=0} - \frac{T}{2} \cos(\mu\pi) - \left(\underbrace{\frac{\sin(-\mu\pi)}{(\mu 2\pi)}}_{=0} + \frac{T}{2} \cos(\mu\pi) \right) \right) \\
&= \frac{2U_0}{\mu\pi T} (-T) \cos(\mu\pi) \\
&= -\frac{2U_0}{\mu\pi} (-1)^\mu = \frac{2U_0}{\mu\pi} (-1)^{\mu+1}
\end{aligned}$$

Bild 7.4 Stationäre Rechteckswingung

$$u(t) = \begin{cases} U_0 & \text{für } kT \leq t < \frac{T}{2} + kT \\ -U_0 & \text{für } -\frac{T}{2} + kT \leq t < kT \end{cases}$$

$$b_\mu = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 -U_0 \sin(\mu\omega_0 t) dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U_0 \sin(\mu\omega_0 t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2U_0}{T} \left[-\frac{1}{\mu\omega_0} \cos(\mu\omega_0 t) \right]_{-\frac{T}{2}}^0 + \frac{2U_0}{T} \left[-\frac{1}{\mu\omega_0} \cos(\mu\omega_0 t) \right]_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{U_0}{\mu\pi} \left[\cos\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right) \right]_{-\frac{T}{2}}^0 - \frac{U_0}{\mu\pi} \left[\cos\left(\mu \frac{2\pi}{T} t\right) \right]_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{U_0}{\mu\pi} (1 - \cos(\mu\pi)) - \frac{U_0}{\mu\pi} (\cos(\mu\pi) - 1) \\
&= \frac{U_0}{\mu\pi} (1 + 1 - 2 \cos(\mu\pi)) \\
&= \frac{2U_0}{\mu\pi} (1 - (-1)^\mu)
\end{aligned}$$

Theoretische Elektrotechnik II

2. Aufgabenblatt

Aufgabe 5: Übertragungsfunktion und Impulsantwort von Netzwerken

Das in Bild 5.1 dargestellte zeitbegrenzte Signal $h_1(t)$ ist die Impulsantwort eines linearen, zeitinvarianten Netzwerkes.

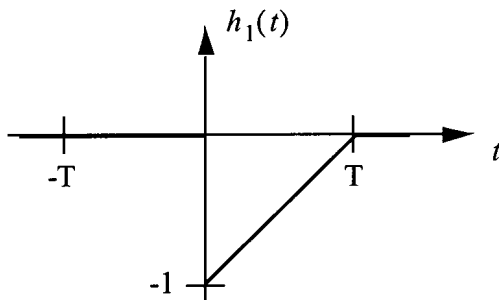


Bild 5.1 zeitbegrenzte Signal $h_1(t)$

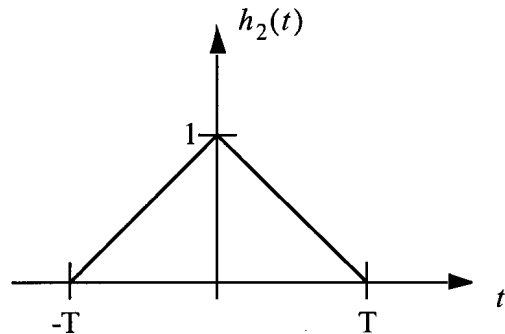


Bild 5.2 zeitbegrenzte Signal $h_2(t)$: Dreiecksimpuls

- Wie lautet die Übertragungsfunktion $\underline{H}_1(j\omega)$ des Netzwerkes?
- Benutzen Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil a), um die Übertragungsfunktion $\underline{H}_2(j\omega)$ eines Netzwerkes zu berechnen, dessen Impulsantwort $h_2(t)$ nach Bild 5.2 ist.
- Ist das Netzwerk aus Aufgabenteil b) realisierbar? Falls nein, wie lässt es sich realisierbar machen?

Aufgabe 6: Fourieranalyse einer periodischen Spannung

Gegeben ist die stationäre, periodische Spannung in Bild 6.1.

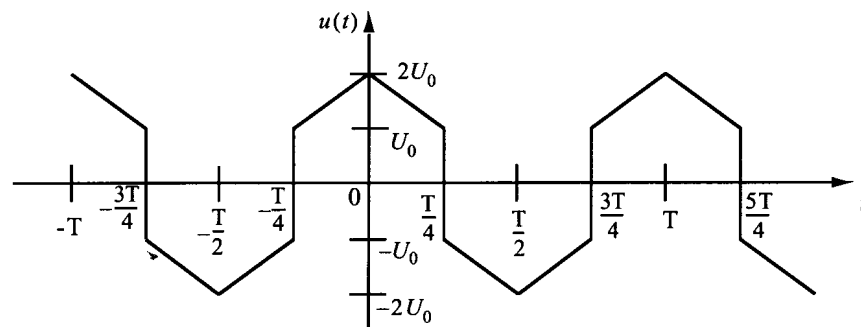


Bild 6.1 Zusammengesetzte Rechteck/Dreieckspannung

Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten $a_0/2$, a_μ und b_μ der Fourier-Reihenentwicklung

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \cos(\mu\omega_0 t) + \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu \sin(\mu\omega_0 t).$$

Hinweis: Verwenden Sie dabei die Ergebnisse aus Aufgabe 4!

Aufgabe 7: Vierpolberechnung (Klausuraufgabe WS00/01)

Gegeben ist ein nicht idealer Trennverstärker mit endlichem Eingangswiderstand R_e und einem Ausgangswiderstand $R_a > 0$ gemäß Bild 7.1a, dessen Ersatzschaltbild in Bild 7.1b gezeigt ist.

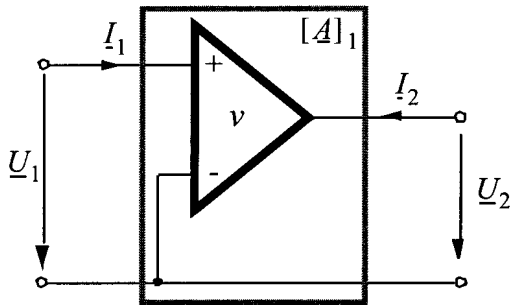


Bild 7.1 a: Nichtidealer Trennverstärker

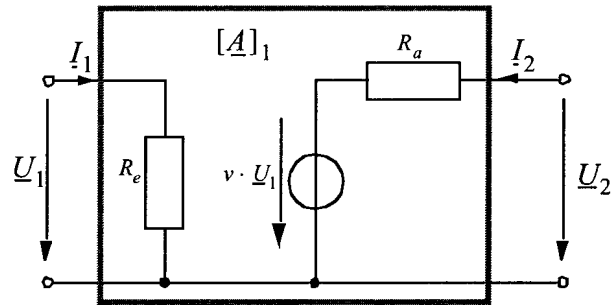


Bild 7.1b: Ersatzschaltbild des Trennverstärkers

- Welche Art von Symmetrie weist der Vierpol $[A]_1$ auf? Begründung.
- Wie lauten allgemein die Vierpolgleichungen für die Kettenform?
- Berechnen Sie für obiges Ersatzschaltbild die Elemente der Kettenmatrix $[A]_1$.

Zur Filterung des Ausgangssignals \underline{U}_2 wird ein Tiefpaß erster Ordnung gemäß Bild 7.2 nachgeschaltet, dessen Widerstandsmatrix $[Z]_2$ lautet:

$$[Z]_2 = \begin{bmatrix} R + \frac{1}{j\omega C} & \frac{1}{j\omega C} \\ \frac{1}{j\omega C} & \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix}$$

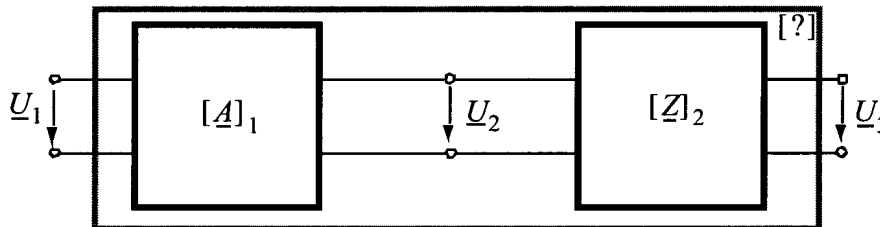


Bild 7.2 Zusammenschaltung beider Vierpole

- Wählen Sie eine für die in Bild 7.2 gezeigte Schaltung geeignete Darstellungsform der Vierpolparameter des Tiefpasses.
- Berechnen Sie die Elemente der resultierenden Matrix $[?]$.
- Berechnen Sie aus den Vierpolparametern der resultierenden Matrix die Übertragungsfunktion $\underline{H}(j\omega)$ der Schaltung nach Bild 7.2.
- Welche Art von Vierpolsymmetrie weist der Tiefpaß auf? Begründung!
- Wie lautet die Übertragungsfunktion $\underline{H}_{id}(j\omega)$ der Schaltung nach Bild 7.2 bei idealem Trennverstärker, d.h. $R_e \rightarrow \infty$, $R_a = 0\Omega$ und endlicher Verstärkung v ?

Theoretische Elektrotechnik II, Musterlösung

Aufgabe 5: a)

$$\begin{aligned}\underline{H}_1(j\omega) &= F\{h_1(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^T \left(-1 + \frac{t}{T}\right) \cdot e^{-j\omega t} dt = -\int_0^T 1 \cdot e^{-j\omega t} dt + \frac{1}{T} \int_0^T t \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= -\left[\frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega t}\right]_0^T + \frac{1}{T} \left[\frac{e^{-j\omega t}}{(-j\omega)^2} \cdot (-j\omega t - 1)\right]_0^T \\ &= \frac{1}{j\omega} [e^{-j\omega T} - 1] + \frac{e^{-j\omega T}}{(-j\omega)} - \frac{e^{-j\omega T}}{(-j\omega)^2 T} + \frac{1}{(-j\omega)^2 T} \\ &= \frac{-1}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega T}}{(-j\omega)^2 T} + \frac{1}{(-j\omega)^2 T}\end{aligned}$$

Bronstein, Nr. 448

weitere Umformungen nicht notwendig bzw. sinnvoll

b)

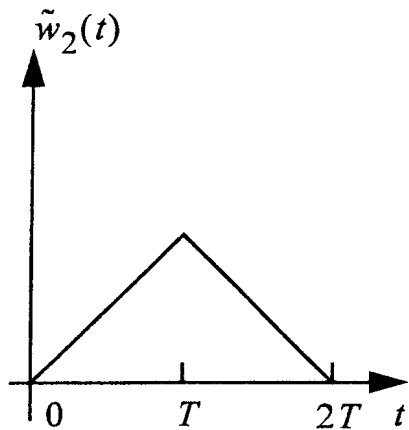
$$h_2(t) = -h_1(t) + (-h_1(-t)) = -h_1(t) - h_1(-t) = -(h_1(t) + h_1(-t))$$

$$\underline{H}_2(j\omega) = F\{h_2(t)\} = -F\{h_1(t) + h_1(-t)\} = -(F\{h_1(t)\} + F\{h_1(t)\}^*)$$

(Spiegelung im Zeitbereich)

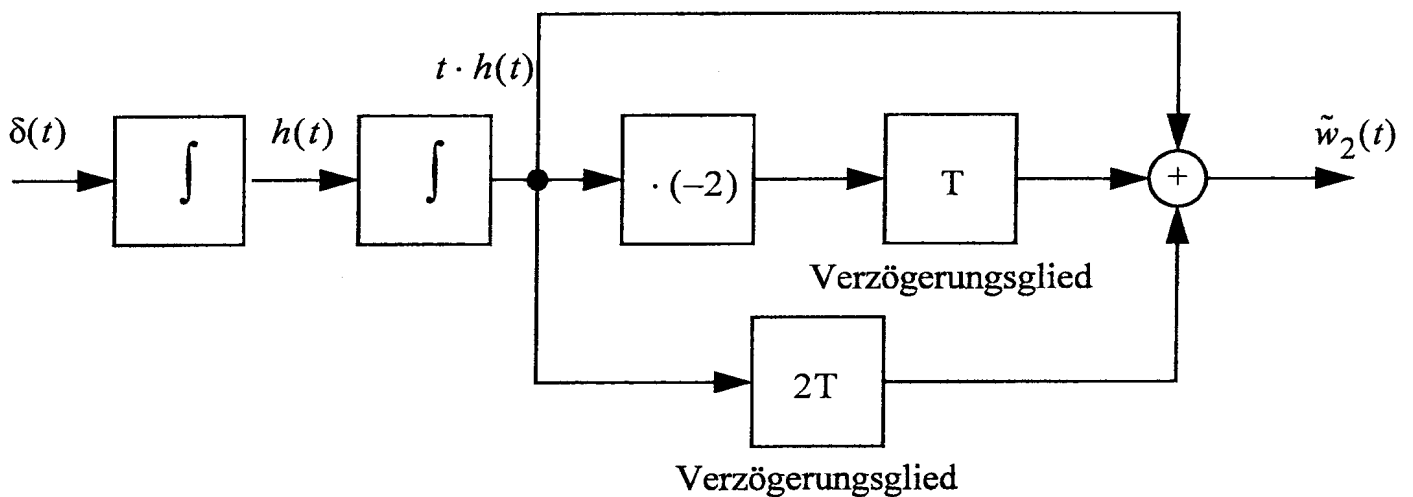
$$\begin{aligned}&= -2 \cdot \operatorname{Re}\{\underline{H}_1(j\omega)\} = -2 \cdot \left(\operatorname{Re}\left(\frac{e^{-j\omega T}}{-\omega^2 T}\right) + \frac{1}{-\omega^2 T}\right) \\ &= -2 \cdot \left(\frac{\cos(\omega T)}{\omega^2 T} - \frac{1}{\omega^2 T}\right) = -\frac{2}{\omega^2 T} \cdot (\cos(\omega T) - 1) = \frac{2}{\omega^2 T} \cdot (1 - \cos(\omega T)) \\ &= \frac{2}{\omega^2 T} \cdot 2 \cdot \left(\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right)^2 = T \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}}\right)^2 = T \cdot \left(\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}\right)^2 = T \cdot \operatorname{sinc}^2(fT)\end{aligned}$$

c) Da das Netzwerk nicht kausal ist (bzw. die Impulsantwort des Netzwerks), ist es nicht realisierbar. Verzögert man $w_2(t)$ um mindestens T , wird die Impulsantwort kausal und das Netzwerk realisierbar.



Eine Realisierungsmöglichkeit ist folgende:

$$\tilde{w}_2(t) = t \cdot h(t) - 2 \cdot (t - T) \cdot h(t - T) + (t - 2T) \cdot h(t - 2T)$$



Aufgabe 6

Bei der Lösung dieser Aufgabe ist die halbkomplexe Form der Fourier-Reihendarstellung von Vorteil (siehe Skript).

$$x(t) = x_0 + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\mu=1}^{\infty} \underline{x}_{\mu} \cdot e^{j\mu\omega_0 t} \right\}$$

$$\text{mit } x_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt$$

$$\text{und } \underline{x}_{\mu} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-j\mu\omega_0 t} dt$$

Vorteil: ein Integral weniger
 Nachteil: evtl. schwieriger zu berechnen
 Es gilt:

$$\underline{x}_{\mu} = x_{\mu} \cdot e^{j\varphi_{\mu}} = x_{\mu} (\cos \varphi_{\mu} + j \sin \varphi_{\mu}) = a_{\mu} - j b_{\mu}$$

$$x_0 = \frac{a_0}{2}$$

IDEE:

Die Fourier-Reihenentwicklung ist linear, d.h. man faßt $u(t)$ als Superposition einer verschobenen Rechteckschwingung ($\tilde{u}_1(t)$) und einer verschobenen Dreieckschwingung ($\tilde{u}_2(t)$) auf.

- $u_1(t)$: Rechteckschwingung aus Aufgabe 4
- $\tilde{u}_1(t)$: $u_1(t)$ zeitverschoben
- $u_2(t)$: Dreieckschwingung aus Aufgabe 4
- $\tilde{u}_2(t)$: $u_2(t)$ zeitverschoben

VERSCHOBENE RECHTECKSCHWINGUNG $\tilde{u}_1(t)$

$$\tilde{u}_1(t) = u_1\left(t + \frac{T}{4}\right)$$

$$\text{mit } u_1(t) = \underbrace{\frac{a_{10}}{2}}_{=0} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \underbrace{\{a_{1\mu} \cos(\mu\omega_0 t) + b_{1\mu} \sin(\mu\omega_0 t)\}}_{=0} \quad (\text{Aufgabe 4})$$

$$= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\mu=1}^{\infty} \underline{u}_{1\mu} \cdot e^{j\mu\omega_0 t} \right\} \quad \text{mit } \underline{u}_{1\mu} = a_{1\mu} - j b_{1\mu}$$

Mit dem Zeitverschiebungssatz gilt:

$$\tilde{\underline{u}}_{1\mu} = \underline{u}_{1\mu} \cdot e^{j\mu\omega_0 \frac{T}{4}}$$

$$\tilde{\underline{u}}_{1\mu} = \underbrace{(a_{1\mu} - j b_{1\mu})}_{=0} \cdot \left\{ \cos\left(\mu\omega_0 \frac{T}{4}\right) + j \sin\left(\mu\omega_0 \frac{T}{4}\right) \right\}$$

$$= -j b_{1\mu} \cos\left(\mu \frac{\pi}{2}\right) + b_{1\mu} \sin\left(\mu \frac{\pi}{2}\right) \quad (1)$$

Mit $b_{1\mu}$ aus Aufgabe 4:

$$b_{1\mu} = \frac{2U_0}{\mu\pi}(1 - \cos \mu\pi) = \frac{4U_0}{\mu\pi} \sin^2\left(\mu\frac{\pi}{2}\right) \quad \frac{1}{2}(1 - \cos x) = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Betrachte nun (1):

$$\begin{aligned} \cos\left(\mu\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \text{ für alle ungeraden } \mu \\ b_{1\mu} &= 0 \text{ für alle geraden } \mu \end{aligned}$$

\Rightarrow Der erste Term von $\tilde{u}_{1\mu}$ ist für alle μ identisch 0: $-jb_{1\mu} \cos\left(\mu\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\forall \mu = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{1\mu} &= b_{1\mu} \sin\left(\mu\frac{\pi}{2}\right) = \tilde{a}_{1\mu} - j\tilde{b}_{1\mu} \\ \tilde{a}_{1\mu} &= b_{1\mu} \sin\left(\mu\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4U_0}{\mu\pi} \sin^3\left(\mu\frac{\pi}{2}\right) \quad (*) \\ \tilde{b}_{1\mu} &= 0 \quad (\text{gerade Funktion}) \\ \frac{\tilde{a}_{10}}{2} &= 0 \quad (\text{kein Gleichanteil}) \end{aligned}$$

VERSCHOBENE DREIECKSCHWINGUNG $\tilde{u}_2(t)$ (analog)

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{2\mu} &= (a_{2\mu} - jb_{2\mu}) \left[\cos\left(\mu\omega_0\frac{T}{4}\right) + j \sin\left(\mu\omega_0\frac{T}{4}\right) \right] \\ \tilde{u}_{2\mu} &= -jb_{2\mu} \cos\left(\mu\frac{\pi}{2}\right) + b_{2\mu} \sin\left(\mu\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Mit $b_{2\mu}$ aus Aufgabe 4:

$$\begin{aligned} b_{2\mu} &= \frac{8U_0}{\mu^2\pi^2} \sin^3\left(\mu\frac{\pi}{2}\right) \\ \Rightarrow b_{2\mu} &= 0 \quad \forall \text{ geraden } \mu \\ \Rightarrow \cos\left(\mu\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \quad \forall \text{ ungeraden } \mu \\ \tilde{u}_{2\mu} &= b_{2\mu} \sin\left(\mu\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8U_0}{\mu^2\pi^2} \sin^4\left(\mu\frac{\pi}{2}\right) = \tilde{a}_{2\mu} - j\tilde{b}_{2\mu} \\ \tilde{a}_{2\mu} &= \frac{8U_0}{\mu^2\pi^2} \sin^4\left(\mu\frac{\pi}{2}\right) \quad (**) \\ \tilde{b}_{2\mu} &= 0 \quad (\text{gerade Funktion}) \\ \frac{\tilde{a}_{10}}{2} &= 0 \quad (\text{kein Gleichanteil}) \end{aligned}$$

Aufgabe7 Vierpolberechnung

a) keine Symetrie, da Eingang und Ausgang nicht vertauscht werden können, auch nicht kopplungssymmetrisch, da Kurzschlußstrom nicht unabhängig davon, welches Klemmenpaar kurzgeschlossen wird.

b)

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = (\underline{A}) \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Aus (1)

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \underline{U}_2 - \underline{A}_{12} \underline{I}_2 \quad (2)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \underline{U}_2 - \underline{A}_{22} \underline{I}_2 \quad (3)$$

c)

Aus ESB:

$$\underline{U}_2 = R_a \underline{I}_2 + v \underline{U}_1 \quad (4)$$

$$\underline{U}_1 = R_e \underline{I}_1 \quad (5)$$

Sei $\underline{U}_2 = 0$:

aus (2):

$$\underline{U}_1 = -\underline{A}_{12} \underline{I}_2 \quad (6)$$

ZUSAMMENFASSUNG BZGL. $u(t)$

$$\begin{aligned}u(t) &= \tilde{u}_1(t) + \tilde{u}_2(t) \\&= u_1\left(t + \frac{T}{4}\right) + u_2\left(t + \frac{T}{4}\right) \\&= \left(\frac{\tilde{a}_{10}}{2} + \frac{\tilde{a}_{20}}{2}\right) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ (\tilde{a}_{1\mu} + \tilde{a}_{2\mu}) \cos(\mu\omega_0 t) + (\tilde{b}_{1\mu} + \tilde{b}_{2\mu}) \sin(\mu\omega_0 t) \right\}\end{aligned}$$

Mit (*) und (**):

$$a_{\mu} = \tilde{a}_{1\mu} + \tilde{a}_{2\mu} = \frac{4U_0}{\mu\pi} \sin^3\left(\mu\frac{\pi}{2}\right) + \frac{8U_0}{\mu^2\pi^2} \sin^4\left(\mu\frac{\pi}{2}\right)$$

$$a_{\mu} = \frac{4U_0}{\mu\pi} \sin^3\left(\mu\frac{\pi}{2}\right) \left[1 + \frac{2}{\mu\pi} \sin\left(\mu\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$b_{\mu} = \tilde{b}_{1\mu} + \tilde{b}_{2\mu} = 0 \quad \text{wie erwartet, da gerade Funktion!}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\tilde{a}_{10}}{2} + \frac{\tilde{a}_{20}}{2} = 0 \quad \text{wie erwartet, da zu gleichen Anteilen positiv wie negativ!}$$

aus (4): $R_a I_2 = -v U_1$ dann:

$$I_2 = -\frac{v U_1}{R_a} \quad (7)$$

(7) in (6): $U_1 = A_{12} \frac{v U_1}{R_a}$ dann:

$$\underline{A_{12}} = \frac{R_a}{v} \quad (8)$$

aus (3):

$$I_1 = -A_{22} I_2 = A_{22} \frac{v U_1}{R_a} = A_{22} \frac{v}{R_a} R_e I_1 \quad (9)$$

Dann:

$$\underline{A_{22}} = \frac{R_a}{v R_e} \quad (10)$$

Sei $I_2 = 0$:

aus(2):

$$U_1 = A_{11} U_2 \quad (11)$$

aus(4):

$$U_2 = v U_1 \quad (12)$$

(12) in (11): $U_1 = A_{11} v U_1$ dann:

$$\underline{A_{11}} = \frac{1}{v} \quad (13)$$

aus (3):

$$\underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \underline{U}_2 = \underline{A}_{21} v \underline{U}_1 = \underline{A}_{21} v R_e \underline{I}_1 \quad (14)$$

Dann:

$$\underline{A}_{21} = \frac{1}{v R_e} \quad (15)$$

Dann:

$$\left(\underline{A} \right)_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{v R_e} & \frac{R_a}{v R_e} \\ \frac{1}{v R_e} & \frac{R_a}{v R_e} \end{pmatrix} \quad (16)$$

d)

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}_2 \quad (17)$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}_2 \quad (18)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \underline{U}_2 - \underline{A}_{12} \underline{I}_2 \quad (19)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \underline{U}_2 - \underline{A}_{22} \underline{I}_2 \quad (20)$$

Sei $\underline{I}_2 = 0$:
aus (17)

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 \quad (21)$$

aus (18)

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 \quad (22)$$

aus (19)

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \underline{U}_2 \quad (23)$$

aus (20)

$$\underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \underline{U}_2 \quad (24)$$

aus (22)

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{21}} \quad (25)$$

in (21) einsetzen,

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}} \quad (26)$$

vgl. mit (23):

$$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}} = \frac{R + \frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C}} = 1 + j\omega RC \quad (27)$$

aus (22): $\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{21}}$ vgl. mit (24):

$$\underline{A}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_{21}} = j\omega C \quad (28)$$

Sei $\underline{I}_1 = 0$:
aus (17):

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{12} \underline{I}_2 \quad (29)$$

aus (18):

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{22} \underline{I}_2 \quad (30)$$

aus (19):

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \underline{U}_2 - \underline{A}_{12} \underline{I}_2 \quad (31)$$

aus (20):

$$\underline{A}_{21} \underline{U}_2 = \underline{A}_{22} \underline{I}_2 \quad (32)$$

Dann:

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}} \underline{I}_2 \quad (33)$$

vgl. mit (30):

$$\underline{Z}_{22} = \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}} = \underline{A}_{22} \underline{Z}_{21} \quad (34)$$

$$\underline{A}_{22} = \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}} = 1 \quad (35)$$

aus (31):

$$\underline{A}_{12} \underline{I}_2 = \underline{A}_{11} \underline{U}_2 - \underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \underline{Z}_{22} \underline{I}_2 - \underline{Z}_{12} \underline{I}_2 \quad (36)$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{A}_{11} \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12} = \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}} \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12} = R \quad (37)$$

Theoretische Elektrotechnik II

3. Aufgabenblatt

Aufgabe 8: Rechteckimpuls: Darstellung im Zeit- und Frequenzbereich

- a) Welche allgemeine Anforderungen muß eine Funktion $x(t)$ erfüllen, damit die Fouriertransformierte $\underline{X}(j\omega)$ existiert?

Gegeben ist ein symmetrischer Rechteckimpuls $x(t)$ nach Bild 8.1a), der als Modell für viele Impulse der (opto-)elektronischen Praxis betrachtet werden kann.

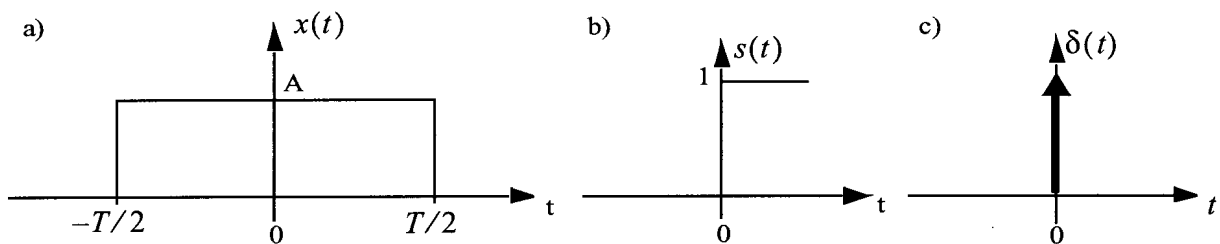


Bild 8.1 a) Symmetrischer Rechteckimpuls mit der Amplitude A und der Periode T
 b) Einheits-Sprungfunktion c) Dirac-Impuls

- b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\underline{X}(j\omega)$ dieses Rechteckimpulses, indem Sie das Fourierintegral explizit ausrechnen.
- c) Stellen Sie den Impuls $x(t)$ aus Bild 8.1a) unter Verwendung von Sprungfunktionen $s(t)$ gemäß Bild 8.1b) im Zeitbereich dar.
- d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen Dirac-Impuls $\delta(t)$ in Bild 8.1c) und Sprungfunktion $s(t)$? Stellen Sie unter Ausnutzung dieses Zusammenhangs die Rechteckfunktion $x(t)$ in Abhängigkeit von Dirac-Impulsen im Zeitbereich dar.
- e) Berechnen Sie ausgehend von dem unter Aufgabenteil d) entwickelten Ausdruck die Fouriertransformierte $\underline{X}(j\omega)$ des Rechteckimpulses $x(t)$ unter Ausnutzung der Sätze der Fouriertransformation und vergleichen diese mit dem Ergebnis unter Aufgabenteil b).

Aufgabe 9: Rechteckschwingung am Eingang eines Netzwerkes

Die Erregung eines Netzwerkes, bestehend aus einem Ohmwiderstand R und einem Kondensator C nach Bild 9.1, ist das periodische Signal $u_e(t)$ mit

$$u_e(t) = \frac{U_0}{2} + \frac{2\check{U}_0}{\pi} \cos(\omega_0 t) - \frac{2U_0}{3\pi} \cos(3\omega_0 t) + \frac{2U_0}{5\pi} \cos(5\omega_0 t) - \dots$$

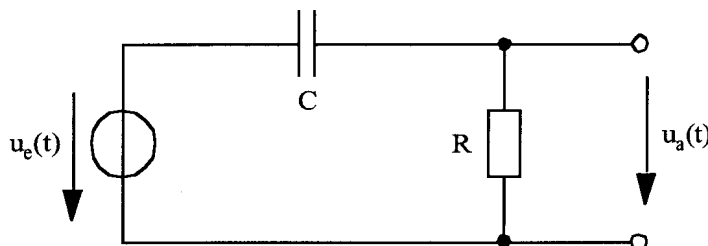


Bild 9.1 RC-Netzwerk

- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $\underline{H}(j\omega) = \underline{U}_a(j\omega) / \underline{U}_e(j\omega)$ des Netzwerkes, indem Sie die komplexe Wechselstromrechnung anwenden.
- Wie lautet die Differentialgleichung des Netzwerkes aus Bild 9.1? Skizzieren Sie kurz einen alternativen Lösungsweg!
- Berechnen Sie den Gleichanteil des Ausgangssignals $u_a(t)$.
- Berechnen Sie den Betrag und die Phase von $\underline{H}(j\omega)$ bei Grundschiwingung. Wie lautet die entsprechende Zeitfunktion des Ausgangssignals $u_{a0}(t)$?
Benutzen Sie die Werte $R = 1\Omega$, $C = 0,2\mu\text{F}$ und $f_0 = \omega_0 / (2\pi) = 1 / (2\pi)\text{MHz}$.
- Berechnen Sie den Betrag und die Phase von $\underline{H}(j\omega)$ bei Oberschiwingung mit der Kreisfrequenz $\omega = 5\omega_0$. Benutzen Sie die gleichen Werte für R, C und ω_0 wie in Teilaufgabe c).
Wie lautet die entsprechende Zeitfunktion des Ausgangssignals $u_{a5}(t)$?
Vergleichen Sie die Ergebnisse und beschreiben Sie die Charakteristik des Netzwerkes.
Welcher Filtertyp liegt also vor?

Aufgabe 10: Fourierintegraldarstellung des δ -Impulses

Ein Signal, das alle Frequenzen von $-\infty$ bis $+\infty$ mit gleichen Amplituden enthält, kann im Zeitbereich durch einen δ -Impuls bei $t = 0$ dargestellt werden:

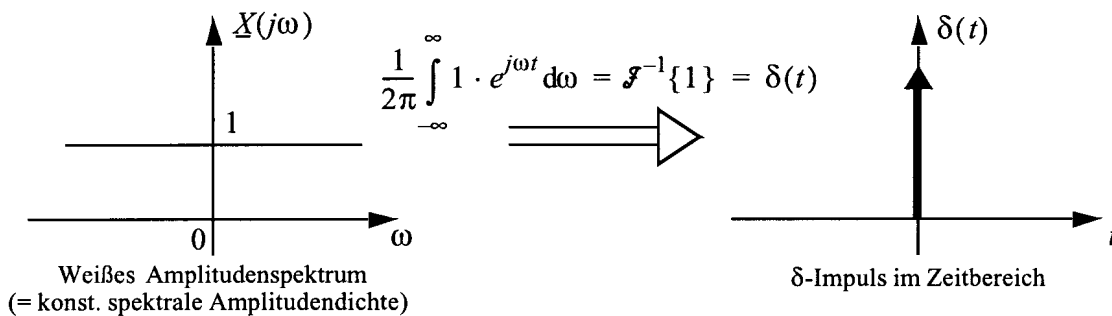


Bild 10.1 Darstellung des δ -Impulses im Frequenz- und im Zeitbereich

- Berechnen Sie, ausgehend von der Fourier-Integral-Darstellung des δ -Impulses, die Zeitfunktion $\delta_{\omega_g}(t)$, die man erhält, wenn das Signal nur die Kreisfrequenzen von $\omega = -\omega_g/2$ bis $\omega = \omega_g/2$ enthält.

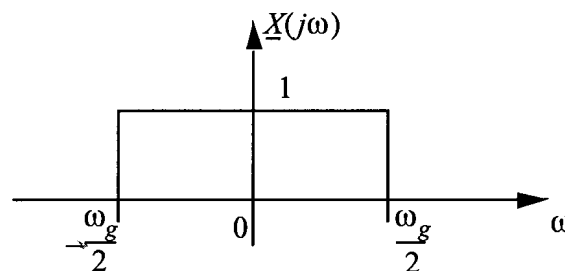


Bild 10.2 Bandbegrenztes weißes Spektrum

- Geben Sie die Korrespondenz $\mathcal{F}\{?\} = \text{rect}(\omega/\omega_g)$ an und vergleichen Sie diese mit der des Rechteckstoßes (Höhe des Rechteckstoßes $A_0 = 1$).
- Stellen Sie $\delta_{\omega_g}(t)$ graphisch dar für $f_{g1} = \omega_{g1} / (2\pi) = 1\text{GHz}$ und $f_{g2} = \omega_{g2} / (2\pi) = 5\text{GHz}$. Welche Aussage bezüglich Signal-Bandbreite und Steilheit der entsprechenden Zeitimpulse können Sie anhand der beiden Graphen treffen?

Maßstab: $1\text{GHz} \hat{=} 1\text{cm}$ und $10^{-9}\text{s} \hat{=} 4\text{cm}$.

Theoretische Elektrotechnik II, Musterlösung

Aufgabe 8:

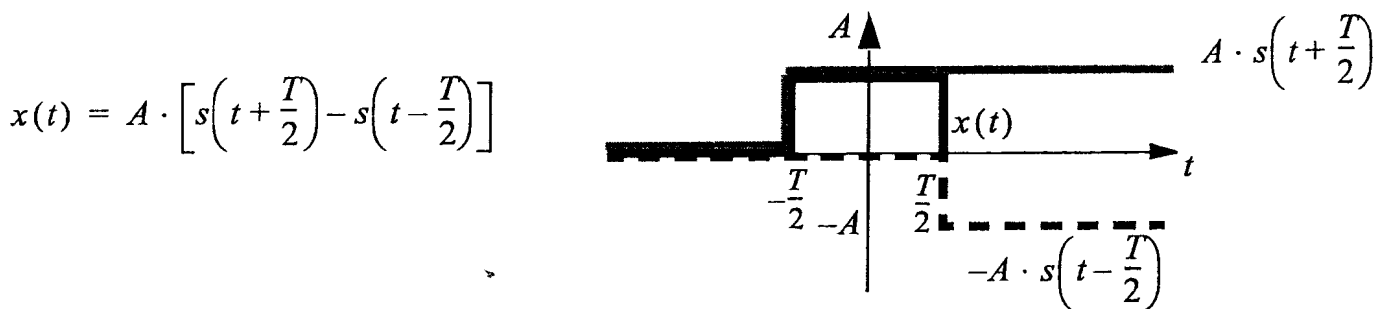
a) Das uneigentliche Fourier-Integral $\underline{X}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$ muss konvergieren. Dies ist der Fall, wenn

$x(t)$ quadratintegabel ist, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$. D.h. das Signal besitzt endliche (finite) Energie (Energiesignal). Tut es das nicht, so kann die Fouriertransformierte nur im verallgemeinerten Sinne existieren, muss aber nicht!

- Die Fouriertransformierte für Leistungssignale (finite Leistung) existiert nur im verallgemeinerten Sinne, d.h. es treten δ -Impulse auf (Bsp.: $s(t) \circ \bullet \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$).

- Für Signale, die auch keine finite Leistung besitzen, kann die Fouriertransformierte existieren oder auch nicht! (Bsp.: $t \cdot s(t) \circ \bullet j \cdot \pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$, aber: $e^{+at} \cdot s(t) \circ \bullet \swarrow \Rightarrow$ Laplace-Transformation)

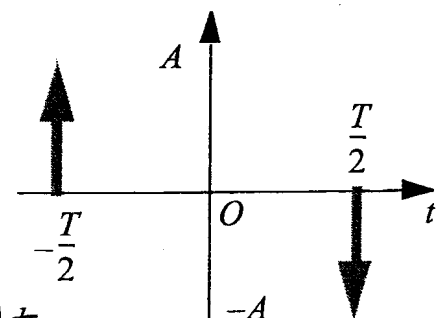
$$\begin{aligned} \underline{X}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = A \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{A}{j\omega} \cdot [e^{-j\omega t}] \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{A}{j\omega} \cdot \left[e^{-j\omega \frac{T}{2}} - e^{j\omega \frac{T}{2}} \right] = \frac{2A}{2j\omega} \cdot \left[e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}} \right] \\ &= 2 \frac{A}{\omega} \cdot \sin\left(\omega \frac{T}{2}\right) \cdot \frac{\frac{T}{2}}{\frac{T}{2}} = \frac{AT}{\omega \frac{T}{2}} \cdot \sin\left(\omega \frac{T}{2}\right) = AT \cdot \text{si}\left(\omega \frac{T}{2}\right) \end{aligned}$$



d)

$$\delta(t) = \dot{s}(t) \quad s(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) \cdot d\tau$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^t A \cdot \delta\left(\tau + \frac{T}{2}\right) - A \cdot \delta\left(\tau - \frac{T}{2}\right) d\tau \\ &= A \cdot \int_{-\infty}^t \delta\left(\tau + \frac{T}{2}\right) - \delta\left(\tau - \frac{T}{2}\right) d\tau \end{aligned}$$



Dann:

$$(\underline{A})_2 = \begin{pmatrix} 1 + j\omega RC & R \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix} \quad (38)$$

e)

$$(\ ?) = (\underline{A})_1 (\underline{A})_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & \frac{R_a}{vR_e} \\ \frac{1}{vR_e} & \frac{R_a}{vR_e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + j\omega RC & R \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix} \quad (39)$$

$$(\ ?) = \begin{pmatrix} \frac{1 + j\omega(R + R_a)C}{1 + j\omega(R + R_a)C} & \frac{R_a + R}{vR_e} \\ \frac{1 + j\omega(R + R_a)C}{vR_e} & \frac{R_a + R}{vR_e} \end{pmatrix} \quad (40)$$

f)

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_3(j\omega)}{\underline{U}_4(j\omega)} = \left| \frac{1}{\underline{A}_{11}} \right|_{I_3=0} = \frac{v}{1 + j\omega(R + R_a)C} \quad (41)$$

g)

kopplungssymmetrisch, da $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$

h)

$$\underline{H}_{id}(j\omega) = \frac{v}{1 + j\omega RC} \quad (42)$$

Aufgabe 9

a) Spannungsteiler:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_a(j\omega)}{\underline{U}_e(j\omega)} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR}$$

b)

$$\frac{\underline{U}_a(j\omega)}{\underline{U}_e(j\omega)} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR}$$

$$\underline{U}_a(j\omega) \cdot (1 + j\omega CR) = \underline{U}_e(j\omega) \cdot j\omega CR$$

Mit harmonischen Größen:

$$u_a(t) = \operatorname{Re}\{\underline{U}_a e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{\underline{U}_a(j\omega)\}$$

$$u_e(t) = \operatorname{Re}\{\underline{U}_e e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{\underline{U}_e(j\omega)\}$$

$$\underline{U}_a(j\omega) + j\omega \underline{U}_a(j\omega) RC = \underline{U}_e(j\omega) \cdot j\omega CR$$

$$\dot{u}_a + u_a \frac{1}{RC} = \dot{u}_e \quad \text{DGL}$$

Alternativ (TET I): Aufstellen der Beziehungen zwischen Bauteilgrößen und den Strömen und Spannungen. Umstellen, Einsetzen und evtl. Differenzieren liefert die DGL.

c) Jeder Teil der Fourier-Reihe des Eingangssignals kann getrennt betrachtet werden, da es sich um ein lineares, zeitinvariantes System handelt.

Für den Gleichanteil gilt:

$$\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{H}(j\omega)|_{\omega=0} = 0$$

$$u_a(t) = 0 \quad \text{für } \omega = 0 \quad \text{Kondensator ist Leerlauf für } \omega = 0$$

d)

$$\underline{H}(j\omega)|_{\omega=\omega_0} = \frac{j\omega_0 RC}{1 + j\omega_0 RC}$$

$$\text{mit } \omega_0 = 10^6 \frac{1}{s}; \quad R = 1\Omega; \quad C = 0,2\mu F$$

$$\text{folgt: } \underline{H}(j\omega_0) = \frac{j \cdot 0,2}{1 + j \cdot 0,2}$$

$$\text{BETRAG: } |\underline{H}(j\omega_0)| = \frac{0,2}{\sqrt{1 + (0,2)^2}} \approx 0,196$$

$$\text{PHASE: } \angle \underline{H}(j\omega_0) = \underbrace{\arctan\left(\frac{0,2}{0}\right)}_{\frac{\pi}{2}} - \arctan\left(\frac{0,2}{1}\right) \approx 1,373$$

$$\underline{Y}(j\omega) = |\underline{X}(j\omega)| \cdot |\underline{H}(j\omega)| \cdot e^{j\angle \underline{X}(j\omega)} e^{j\angle \underline{H}(j\omega)}$$

$$\Rightarrow u_{a0}(t) \approx \frac{2U_0}{\pi} \cdot 0,196 \cdot \cos(\omega_0 t + 1,373)$$

Aufgabe 10

a) Inverse Fouriertransformierte $x(t)$ eines idealen Tiefpasses:

$$\delta(t) = \lim_{\omega_g \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_g}{2}}^{\frac{\omega_g}{2}} e^{j\omega t} d\omega \quad (1)$$

im Falle eines nicht idealen Tiefpasses entfällt der Grenzübergang $\omega_g \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_g}{2}}^{\frac{\omega_g}{2}} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{jt} \cdot [e^{j\omega t}]_{-\frac{\omega_g}{2}}^{\frac{\omega_g}{2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{jt} \cdot (e^{j\frac{\omega_g}{2}t} - e^{-j\frac{\omega_g}{2}t}) \\ &= \frac{1}{\pi \cdot t} \cdot \frac{1}{2j} \cdot (e^{j\frac{\omega_g}{2}t} - e^{-j\frac{\omega_g}{2}t}) \\ &= \frac{1}{\pi \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{\omega_g}{2} \cdot t\right) \cdot \frac{\frac{\omega_g}{2}}{\frac{\omega_g}{2}} \end{aligned} \quad (2)$$

$$x(t) = \frac{\omega_g}{2\pi} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega_g}{2} \cdot t\right)}{t \cdot \frac{\omega_g}{2}} = \frac{\omega_g}{2\pi} \cdot \text{si}\left(\frac{\omega_g}{2} \cdot t\right) \quad (3)$$

b) mit $F^{-1}\left\{\text{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)\right\} = \frac{\omega_g}{2\pi} \cdot \text{si}\left(\frac{\omega_g}{2} \cdot t\right)$ gilt offensichtlich die Korrespondenz:

$$F\left\{\frac{\omega_g}{2\pi} \cdot \text{si}\left(\frac{\omega_g}{2} \cdot t\right)\right\} = \text{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right) \quad (4)$$

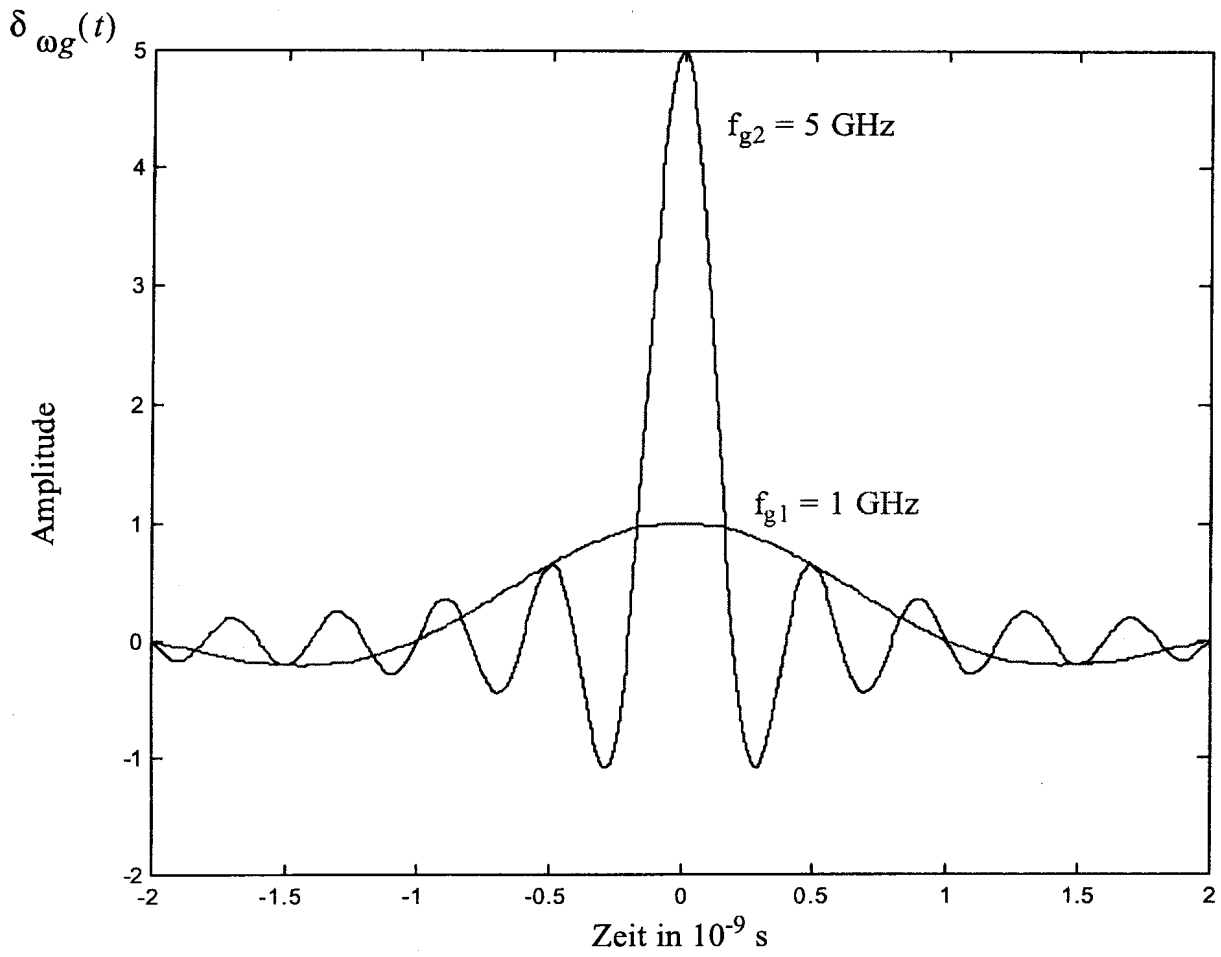
Beim Rechteckstoß hat gegolten:

$$F\left\{\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = T \cdot \text{si}(\pi f T) = T \cdot \text{si}\left(\omega \cdot \frac{T}{2}\right); \quad \omega = 2\pi f \quad (5)$$

→ Fourier-Trafo-Dualismus zu erkennen.

c) Man erkennt: Mit Signalen größerer Bandbreite lassen sich steilere (kürzere) Zeitimpulse realisieren.

c)



Man erkennt: Mit Signalen größerer Bandbreite lassen sich steilere (kürzere) Zeitimpulse realisieren.

Theoretische Elektrotechnik II

4. Aufgabenblatt

Aufgabe 11: Fourieranalyse eines Impulses

Gegeben sei der Spannungsimpuls $u_1(t)$ nach Bild 11.1.

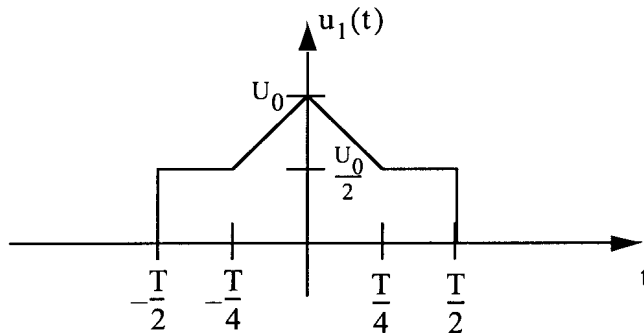


Bild 11.1 Impuls $u_1(t)$

- Welche Symmetrie weist die Fouriertransformierte $\underline{U}_1(j\omega) = \mathcal{F}\{u_1(t)\}$ auf? Ist sie reell, komplex, gerade oder ungerade? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Wie groß ist der spektrale Anteil von $\underline{U}_1(j\omega)$ bei $\omega = 0$?
- Berechnen Sie $\underline{U}_1(j\omega)$.
- Skizzieren Sie das Phasenspektrum $\varphi_1(\omega)$ des Impulses $u_1(t)$.

Es sei nun ein Doppelimpuls $u_2(t)$ gegeben, siehe Bild 11.2.

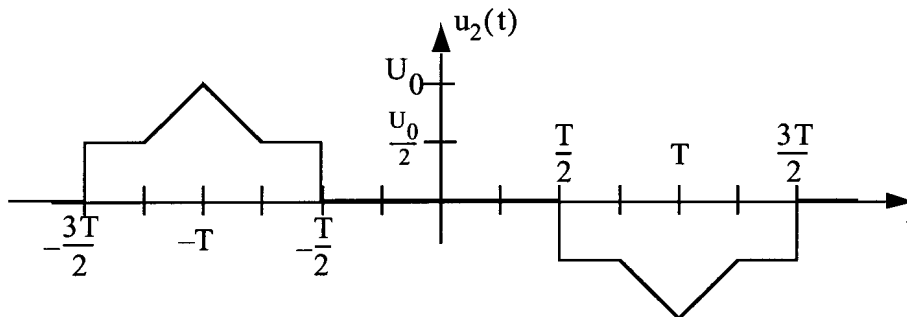


Bild 11.2 Doppelimpuls $u_2(t)$

- Mit welcher Funktion $d(t)$ müsste $u_1(t)$ gefaltet werden, um $u_2(t)$ zu erhalten?
- Welche Symmetrie weist die Fouriertransformierte $\underline{U}_2(j\omega) = \mathcal{F}\{u_2(t)\}$ auf? Ist sie reell, komplex, gerade oder ungerade? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Wie groß ist der spektrale Anteil von $\underline{U}_2(j\omega)$ bei $\omega = 0$?
- Berechnen Sie $\underline{U}_2(j\omega)$ in Abhängigkeit von $\underline{U}_1(j\omega)$.
- Skizzieren Sie das Phasenspektrum $\varphi_2(\omega)$ des Doppelimpulses $u_2(t)$.

Aufgabe 12: Fourierbetragsspektrum eines modulierten Signales

Gegeben ist ein Signal $x(t) = a(t) \cdot \cos(\omega_c t)$ mit der Amplitude $a(t)$, d.h. eine Trägerschwingung werde mit einer zeitveränderlichen Amplitude moduliert. Darin ist ω_c die sogenannte Trägerfrequenz (Index „c“ von Carrier (engl. für Träger)).

- Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\underline{X}(j\omega)$ allgemein in Abhängigkeit der Fouriertransformierten $\underline{A}(j\omega)$ der Amplitudenfunktion.
- Berechnen und zeichnen Sie das Fourierbetragsspektrum $X(j\omega)$, wenn $a(t) = A_0 \cos(\omega_s t)$ ist. ω_s bezeichnet die Modulationsfrequenz (Index „s“ für Signal). Es gelte $\omega_c \gg \omega_s$.
- Kann eine solche Modulation mit einem linearen, zeitinvarianten Netzwerk durchgeführt werden? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 13: Netzwerkanalyse (nach Klausuraufgabe Frühjahr 1985)

Von einem linearen, zeitinvarianten Netzwerk nach Bild 13.1 sei die Antwort $u_a(t)$ auf einen Spannungsdublett-Impuls $u_e(t) = \phi \cdot \delta(t)$ bekannt.

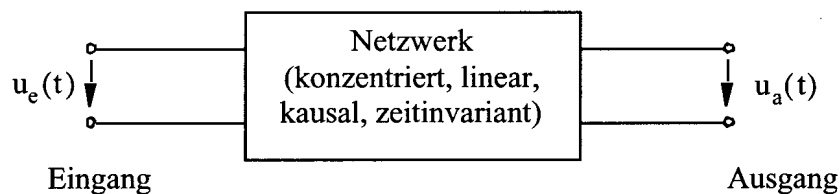


Bild 13.1 Lineares, zeitinvariantes, kausales und konzentriertes Netzwerk

Es sei $u_a(t) = \phi \cdot \alpha^2 \cdot e^{-\alpha t} \cdot s(t) - \phi \cdot \alpha \cdot \delta(t) + \phi \cdot \dot{\delta}(t)$.

- Berechnen Sie mit Hilfe der Fouriertransformation die Übertragungsfunktion $\underline{H}(j\omega)$ des Netzwerkes.
- Geben Sie eine Realisierung des Netzwerkes an und bestimmen Sie dabei die Unbekannte α . Um welchen Filtertyp handelt es sich?
- Das Netzwerk habe nun als Eingangssignal die in Bild 13.2 dargestellte Dreiecksspannung $u_{e1}(t)$.

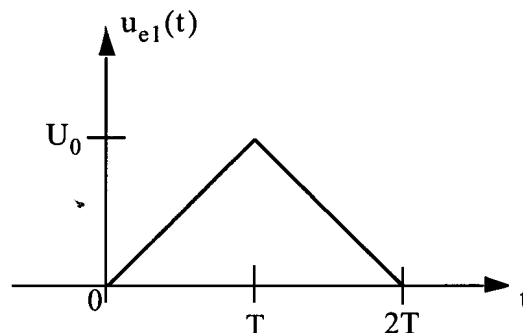


Bild 13.2 Dreiecksspannung $u_{e1}(t)$

Berechnen Sie ausgehend von der Ausgangsspannung $u_a(t)$ die Fouriertransformierte $\underline{U}_{a1}(j\omega)$ der Ausgangsspannung $u_{a1}(t)$, die die Antwort auf das Eingangssignal $u_{e1}(t)$ ist.

Theoretische Elektrotechnik II, Musterlösung

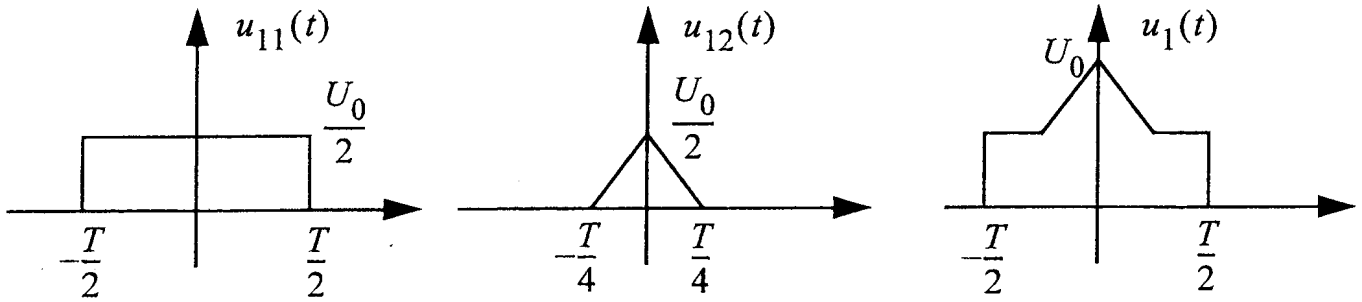
Aufgabe 11:

a) $u_1(t)$ gerade, reell $\Rightarrow \underline{U}_1(j\omega)$ reell, gerade

b)

$$\begin{aligned} \underline{U}_1(j\omega)|_{\omega=0} &= F\{u_1(t)\}|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) \cdot e^{-j\omega t} dt|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) dt \\ &= T \cdot \frac{U_0}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{U_0}{2} = \frac{5}{8} \cdot U_0 \cdot T \end{aligned}$$

c)



$$u_1(t) = u_{11}(t) + u_{12}(t)$$

$$\Rightarrow \underline{U}_1(j\omega) = F\{u_{11}(t)\} + F\{u_{12}(t)\} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{U_0}{2} \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} u_{12}(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Es handelt sich um gerade Funktionen. Deshalb kann man folgendermassen vereinfachen:

$$\underline{U}_1(j\omega) = 2 \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{U_0}{2} \cdot \cos(\omega t) dt + 2 \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{U_0}{2} \cdot \left(1 - \frac{t}{\frac{T}{4}}\right) \cdot \cos(\omega t) dt$$

$$= U_0 \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right] \Big|_0^{\frac{T}{2}} + U_0 \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \cos(\omega t) dt - \frac{4}{T} \cdot U_0 \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} t \cdot \cos(\omega t) dt$$

$$= U_0 \cdot \frac{\sin\left(\omega \frac{T}{2}\right)}{\omega} + U_0 \cdot \frac{\sin\left(\omega \frac{T}{4}\right)}{\omega} - \frac{4U_0}{T} \left[\frac{\cos(\omega t)}{\omega^2} + \frac{t \cdot \sin(\omega t)}{\omega} \right] \Big|_0^{\frac{T}{4}}$$

$$= U_0 \cdot \frac{\sin\left(\omega \frac{T}{2}\right)}{\omega} + U_0 \cdot \frac{\sin\left(\omega \frac{T}{4}\right)}{\omega} - \frac{4U_0}{T} \left[\frac{\cos\left(\omega \frac{T}{4}\right)}{\omega^2} + \frac{\frac{T}{4} \cdot \sin\left(\omega \frac{T}{4}\right)}{\omega} - \frac{1}{\omega^2} \right]$$

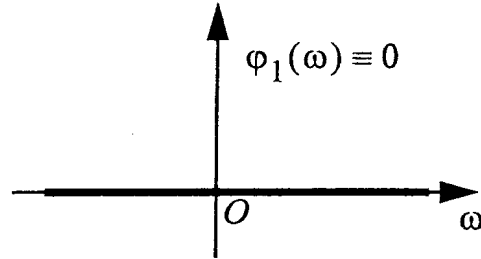
$$= U_0 \cdot \frac{\sin\left(\omega \frac{T}{2}\right)}{\omega} - \frac{4U_0}{T \cdot \omega^2} \cdot \left[\cos\left(\omega \frac{T}{4}\right) - 1 \right] \quad \text{mit } 1 - \cos(2x) = 2 \sin^2(x)$$

$$= \frac{1}{2} U_0 T \cdot \frac{\sin\left(\omega \frac{T}{2}\right)}{\omega \frac{T}{2}} + \frac{8U_0}{T \cdot \omega^2} \cdot \sin^2\left(\omega \frac{T}{8}\right) = \frac{1}{2} U_0 T \cdot \operatorname{si}\left(\omega \frac{T}{2}\right) + \frac{1}{8} U_0 T \cdot \frac{\sin^2\left(\omega \frac{T}{8}\right)}{\omega^2 \left(\frac{T}{8}\right)^2}$$

$$\underline{U}_1(j\omega) = \frac{1}{2} U_0 T \cdot \operatorname{si}\left(\omega \frac{T}{2}\right) + \frac{1}{8} U_0 T \cdot \operatorname{si}^2\left(\omega \frac{T}{8}\right)$$

d)

$$\varphi_1(\omega) = \arctan \frac{\operatorname{Im}\{\underline{U}_1(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{\underline{U}_1(j\omega)\}} \equiv 0$$



e) - Verschiebung um +T: Faltung mit $\delta(t - T)$

- Verschiebung um -T: Faltung mit $\delta(t + T)$

- negatives Vorzeichen bei Verschiebung um +T berücksichtigt liefert:

$$u_2(t) = d(t) * u_1(t) \quad \text{mit} \quad d(t) = \delta(t + T) - \delta(t - T)$$

f) $u_2(t)$ ungerade, reell $\Rightarrow \underline{U}_2(j\omega)$ rein imaginär, ungerade

g)

$$\begin{aligned} \underline{U}_2(j\omega)|_{\omega=0} &= F\{u_2(t)\}|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} u_2(t) \cdot e^{-j\omega t} dt|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} u_2(t) dt \\ &= 0, \text{ da } u_2(t) \text{ ungerade} \end{aligned}$$

h)

$$u_2(t) = u_1(t + T) - u_1(t - T)$$

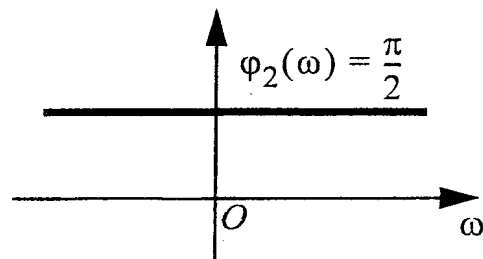
$$\underline{U}_2(j\omega) = F\{u_2(t)\} = F\{u_1(t + T)\} - F\{u_1(t - T)\}$$

$$= \underline{U}_1(j\omega) \cdot e^{j\omega T} - \underline{U}_1(j\omega) \cdot e^{-j\omega T} = \underline{U}_1(j\omega) \cdot [e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}]$$

$$\underline{U}_2(j\omega) = \underline{U}_1(j\omega) \cdot 2j \cdot \sin(\omega T)$$

i)

$$\varphi_2(\omega) = \arctan \frac{\operatorname{Im}\{\underline{U}_2(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{\underline{U}_2(j\omega)\}} = \arctan \frac{U_1(j\omega) \cdot 2 \cdot \sin(\omega T)}{0} = \frac{\pi}{2}$$



e)

$$x(t) = A \cdot \int_{-\infty}^t \delta\left(\tau + \frac{T}{2}\right) - \delta\left(\tau - \frac{T}{2}\right) d\tau$$

1.) Integrationsatz der Fouriertransformation:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t y(\tau) \cdot d\tau \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \underline{X}(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \underline{Y}(j\omega) + \pi \cdot \underline{Y}(0) \cdot \delta(\omega) \quad (*)$$

$$\text{mit } y(\tau) = A \cdot \left(\delta\left(\tau + \frac{T}{2}\right) - \delta\left(\tau - \frac{T}{2}\right) \right) \quad \Rightarrow \underline{Y}(j\omega) = ?$$

2.) Zeitverschiebungssatz der Fouriertransformation:

$$\begin{aligned} \delta(\tau) & \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad 1 \\ \delta\left(\tau + \frac{T}{2}\right) & \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad 1 \cdot e^{j\omega \frac{T}{2}} \\ \delta\left(\tau - \frac{T}{2}\right) & \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad 1 \cdot e^{-j\omega \frac{T}{2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y(\tau) = A \cdot \left(\delta\left(\tau + \frac{T}{2}\right) - \delta\left(\tau - \frac{T}{2}\right) \right) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \underline{Y}(j\omega) = A \cdot \left[e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}} \right]$$

$$\text{mit } \underline{Y}(j\omega = 0) = A \cdot [e^{j0} - e^{-j0}] = A \cdot [1 - 1] = 0$$

eingesetzt in (*):

$$\begin{aligned} \underline{X}(j\omega) &= \frac{1}{j\omega} A \cdot \left[e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}} \right] + \pi \cdot 0 \cdot \delta(\omega) \\ &= \frac{2A}{\omega 2j} \cdot \left[e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}} \right] = \frac{2A}{\omega} \cdot \sin\left(\omega \frac{T}{2}\right) \cdot \frac{\frac{T}{2}}{\frac{T}{2}} = AT \cdot \text{si}\left(\omega \frac{T}{2}\right) \end{aligned}$$

Ergebnis identisch mit dem aus Aufgabenteil b), was zu erwarten war!

Aufgabe 12

Häufig benutzter Zusammenhang:

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

a)

$$\begin{aligned} x(t) &= a(t) \cos(\omega_c t) \\ \Rightarrow \underline{X}(j\omega) &= F\{a(t) \cos(\omega_c t)\} \\ &= \frac{1}{2\pi} F\{a(t)\} * F\{\cos(\omega_c t)\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \underline{A}(j\omega) * F\left\{\frac{1}{2} (e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t})\right\} \quad 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \\ &= \frac{1}{2} \underline{A}(j\omega) * \left\{\frac{1}{2\pi} [2\pi\delta(\omega - \omega_c) + 2\pi\delta(\omega + \omega_c)]\right\} \\ &= \frac{1}{2} \underline{A}(j\omega) * \delta(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} \underline{A}(j\omega) * \delta(\omega + \omega_c) \\ \underline{X}(j\omega) &= \frac{1}{2} \underline{A}(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{2} \underline{A}(j\omega + j\omega_c) \end{aligned}$$

b)

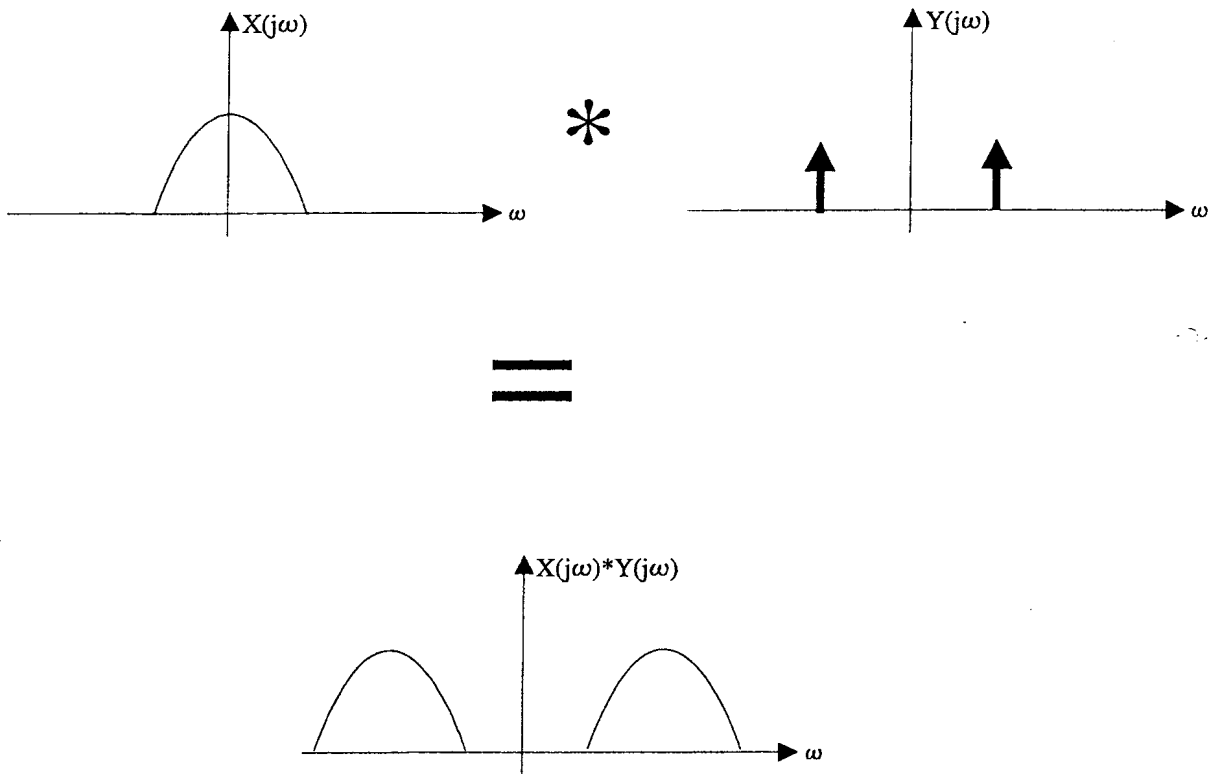
$$\begin{aligned} \underline{A}(j\omega) &= F\{A_0 \cos(\omega_s t)\} \\ &= A_0 \cdot F\left\{\frac{1}{2} (e^{j\omega_s t} + e^{-j\omega_s t})\right\} \\ \underline{A}(j\omega) &= A_0 \pi [\delta(\omega - \omega_s) + \delta(\omega + \omega_s)] \\ \Rightarrow \underline{X}(j\omega) &= \frac{1}{2} A_0 \pi [\delta(\omega - \omega_s - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_s - \omega_c)] \\ &\quad + \frac{1}{2} A_0 \pi [\delta(\omega - \omega_s + \omega_c) + \delta(\omega + \omega_s + \omega_c)] \\ \underline{X}(j\omega) &= \frac{A_0 \pi}{2} \{\delta(\omega - \omega_c - \omega_s) + \delta(\omega - \omega_c + \omega_s) + \delta(\omega + \omega_c - \omega_s) + \delta(\omega + \omega_c + \omega_s)\} \\ &= |\underline{X}(j\omega)| = X(j\omega), \text{ da reell} \end{aligned}$$

c)

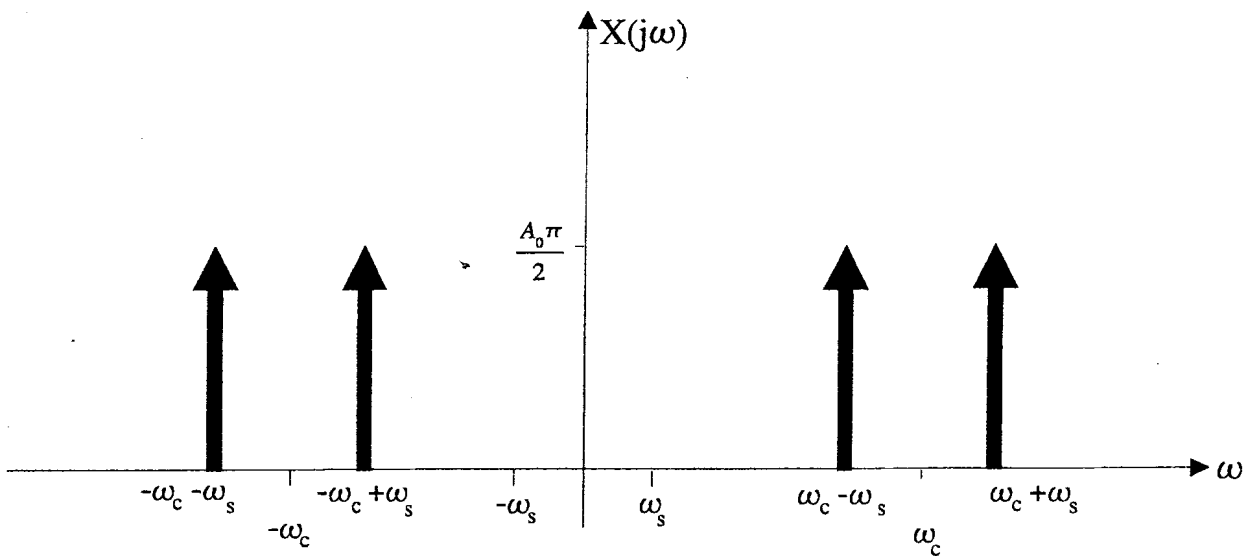
Es handelt sich hierbei um Amplitudenmodulation. Wie man dem Fourierbetragspektrum entnehmen kann, entstehen durch die Modulation neue Frequenzen (Seitenbänder). Ein lineares, zeitinvariantes Netzwerk hat jedoch nur Einfluß auf Amplitude und Phase eines harmonischen Signals, nicht jedoch auf die Frequenz.

Folglich kann eine solche Modulation **nicht** mit einem linearen, zeitinvarianten Netzwerk durchgeführt werden!

Faltung von Spektren



Aufgabe 12b)



d)

$$\underline{I}_a(s) = \underline{H}(s) \cdot \underline{I}_e(s) = \frac{1}{3 + s2\tau} \cdot \frac{A}{s^2} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

e) $i_a(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\underline{I}_a(s)\}$

Partialbruchzerlegung (analog zu Aufgabe 17a)

$$\begin{aligned} \underline{I}_a(s) = \frac{A}{s^2} \cdot \frac{1}{3 + s2\tau} &\equiv \frac{C_0}{s^2} + \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{3 + s2\tau} \\ \frac{A}{s^2(3 + s2\tau)} &\equiv \frac{3C_0 + C_02s\tau + C_2s^2 + C_13s + C_1s\tau s^2}{s^2(3 + 2s\tau)} \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned} s^0: \quad A &= 3C_0 \quad \rightarrow C_0 = \frac{A}{3} \\ s^1: \quad 0 &= C_02\tau + 3C_1 \quad \rightarrow C_1 = -\frac{2}{3}\tau C_0 = -\frac{2}{9}\tau A \\ s^2: \quad 0 &= C_2 + 2\tau C_1 \quad \rightarrow C_2 = -2\tau C_1 = \frac{4}{9}\tau^2 A \end{aligned}$$

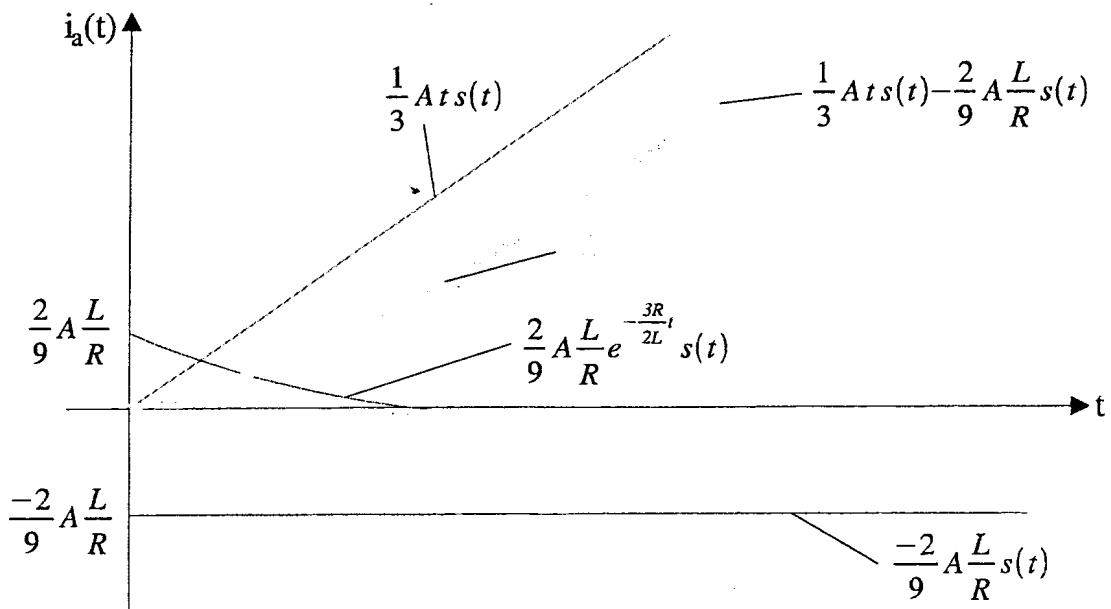
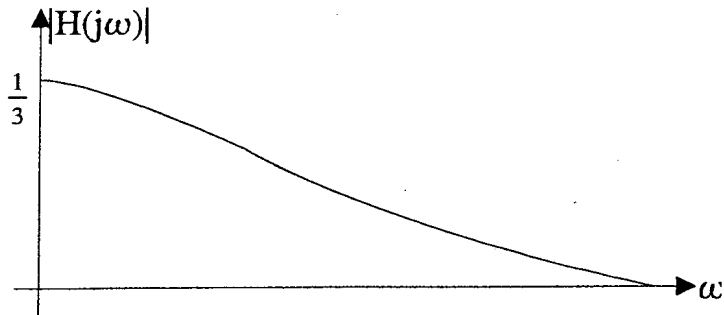
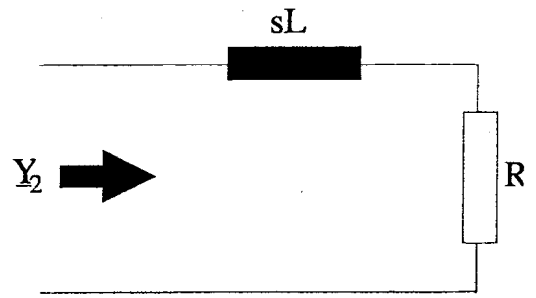
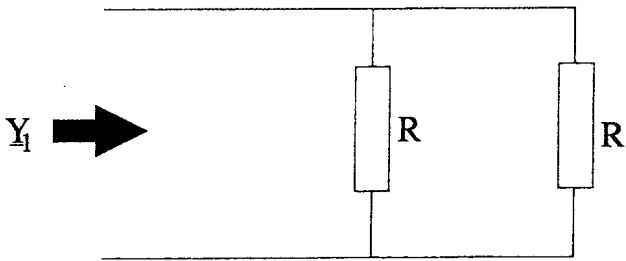
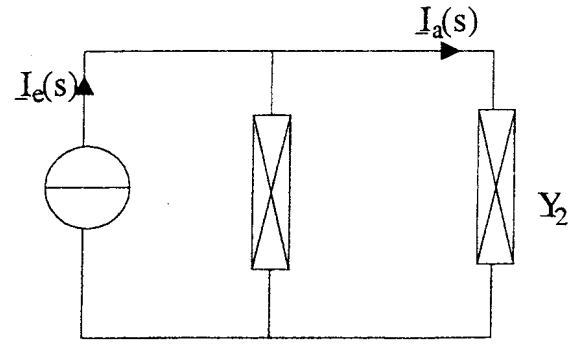
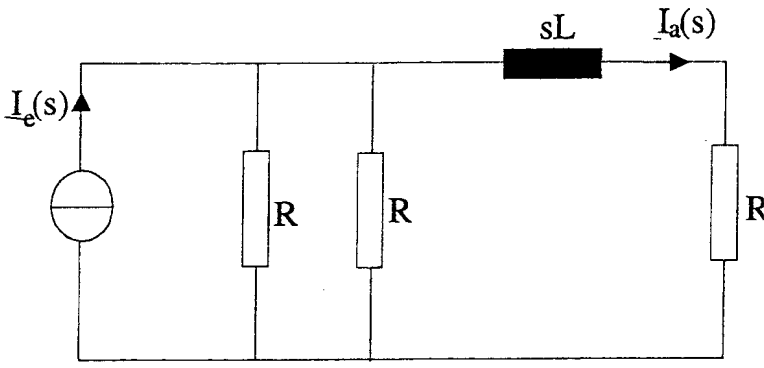
$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{I}_a(s) &= \frac{A}{3} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{2}{9}A \frac{\tau}{s} + \frac{4}{9}A \frac{\tau^2}{3 + 2s\tau} \\ &= \frac{A}{3} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{2}{9}A \frac{\tau}{s} + \frac{2}{9}A \frac{\tau}{s + \frac{3}{2\tau}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow i_a(t) = \frac{A}{3}ts(t) - \frac{2}{9}A\tau s(t) + \frac{2}{9}A\tau e^{-\frac{3}{2\tau}t}s(t)$$

mit $\tau = \frac{L}{R}$ folgt:

$$i_a(t) = \frac{A}{3}ts(t) - \frac{2}{9}A \frac{L}{R}s(t) + \frac{2}{9}A \frac{L}{R}e^{-\frac{3R}{2L}t}s(t)$$

$$i_a(t) = \frac{A}{3}ts(t) + \frac{2}{9}A \frac{L}{R} \left[e^{-\frac{3R}{2L}t} - 1 \right] \cdot s(t)$$



Aufgabe 13

a)
 $\underline{H}(j\omega) = F\{h(t)\}$ mit

$$h(t) = \int_{-\infty}^t \frac{u_a(t')}{\phi} dt' \quad (1)$$

dann es ist ja:

$$\begin{aligned} \text{Eingang} &\rightarrow \text{Ausgang} \\ \delta(t) &\rightarrow h(t) \\ \dot{\delta}(t) &\rightarrow \dot{h}(t) \\ \phi \dot{\delta}(t) &\rightarrow \phi \dot{h}(t) = u_a(t) \\ &\Rightarrow h(t) = \int \frac{u_a(t)}{\phi} dt \end{aligned}$$

aus (1):

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^t (\alpha^2 e^{-\alpha t'} s(t') - \alpha \delta(t') + \dot{\delta}(t')) dt' \\ &= \int_{-\infty}^t \alpha^2 e^{-\alpha t'} s(t') dt' - \alpha \int_{-\infty}^t \delta(t') dt' + \int_{-\infty}^t \dot{\delta}(t') dt' \\ &= \alpha^2 s(t) \int_0^t e^{-\alpha t'} dt' - \alpha \cdot s(t) + \delta(t) \\ &= \alpha^2 s(t) \left[\frac{e^{-\alpha t'}}{-\alpha} \right]_0^t - \alpha \cdot s(t) + \delta(t) \\ &= -\alpha s(t) (e^{-\alpha t} - 1) - \alpha \cdot s(t) + \delta(t) \\ &= \underline{\delta(t) - \alpha e^{-\alpha t} s(t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{H}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt - \alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} s(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt - \alpha \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t} dt \\ &= 1 - \alpha \left[\frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{-(\alpha+j\omega)} \right]_0^{\infty} \\ &= 1 - \alpha \left(0 + \frac{1}{\alpha+j\omega} \right) = 1 - \frac{\alpha}{\alpha+j\omega} \\ &= \underline{\frac{j\omega}{\alpha+j\omega}} \end{aligned}$$

//alternative Möglichkeit zu Aufgabenteil a:

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \underline{U_a(j\omega)} / \underline{U_e(j\omega)} \\ u_e(t) &= \phi \cdot \dot{\delta}(t) \quad \bigcirc \text{---} \bullet \quad \underline{U_e(j\omega)} = \phi \cdot j\omega \cdot 1 \\ u_a(t) &= \phi \cdot \alpha^2 \cdot e^{-\alpha t} \cdot s(t) - \phi \alpha \cdot \delta(t) + \phi \cdot \dot{\delta}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F\{\phi \cdot \alpha^2 \cdot e^{-\alpha t} \cdot s(t)\} &= \phi \cdot \alpha^2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t} dt \\
&= -\frac{\phi \cdot \alpha^2}{\alpha + j\omega} [e^{-(\alpha+j\omega)t}]_0^{\infty} \\
&= -\frac{\phi \cdot \alpha^2}{\alpha + j\omega} [0 - 1] = \frac{\phi \cdot \alpha^2}{\alpha + j\omega}
\end{aligned}$$

$$F\{\phi \alpha \cdot \delta(t)\} = \phi \cdot \alpha \cdot 1$$

$$F\{\phi \cdot \dot{\delta}(t)\} = \phi \cdot j\omega \cdot 1$$

$$\Rightarrow \underline{U}_a(j\omega) = \frac{\phi \cdot \alpha^2}{\alpha + j\omega} - \phi \cdot \alpha + \phi \cdot j\omega$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \underline{H}(j\omega) &= \frac{\phi \cdot \alpha^2 / (\alpha + j\omega) - \phi \cdot \alpha + \phi \cdot j\omega}{\phi \cdot j\omega} \\
&= \frac{\alpha^2 - \alpha^2 - \alpha j\omega + \alpha j\omega + (j\omega)^2}{\alpha \cdot j\omega + (j\omega)^2} \\
&= \frac{j\omega}{\alpha + j\omega}
\end{aligned}$$

b)

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = 0$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \infty} \underline{H}(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\alpha}{j\omega} + 1} = 1$$

\Rightarrow Hochpaß

c) Darstellung der Dreiecksfunktion mit der Rampenfunktion $r(t)$

$$u_{e1}(t) = \frac{U_0}{T}(r(t) - 2r(t-T) + r(t-2T))$$

da $\dot{r}(t) = s(t)$ und $\ddot{r}(t) = \dot{s}(t) = \delta(t)$

\Rightarrow Zweimalige Integration der Impulsantwort liefert Antwort auf Rampenfunktion, bzw: im Frequenzbereich mit Hilfe des Integrationsatzes:

$$\underline{S}(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \underline{H}(j\omega) + \pi \underline{H}(0) \delta(\omega) = \frac{1}{j\omega} \underline{H}(j\omega) \quad , \text{ da } \underline{H}(0) = 0$$

$$\begin{aligned}
\underline{R}(j\omega) &= \frac{1}{j\omega} \underline{S}(j\omega) + \pi \underline{S}(0) \delta(\omega) \\
&= \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{j\omega} \underline{H}(j\omega) + \pi \underline{S}(0) \delta(\omega)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \phi \cdot \alpha^2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t} dt \\
 &= -\frac{\phi \cdot \alpha^2}{\alpha + j\omega} [e^{-(\alpha+j\omega)t}]_0^{\infty} \\
 &= -\frac{\phi \cdot \alpha^2}{\alpha + j\omega} [0 - 1] = \frac{\phi \cdot \alpha^2}{\alpha + j\omega}
 \end{aligned}$$

$$\{t\} = \phi \cdot \alpha \cdot 1$$

$$\} = \phi \cdot j\omega \cdot 1$$

$$\frac{\cdot \alpha^2}{+ j\omega} - \phi \cdot \alpha + \phi \cdot j\omega$$

$$\frac{(\alpha + j\omega) - \phi \cdot \alpha + \phi \cdot j\omega}{\phi \cdot j\omega}$$

$$\frac{2 - \alpha j\omega + \alpha j\omega + (j\omega)^2}{\alpha \cdot j\omega + (j\omega)^2}$$

$$\omega) = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\alpha}{j\omega} + 1} = 1$$

der Rampenfunktion $r(t)$

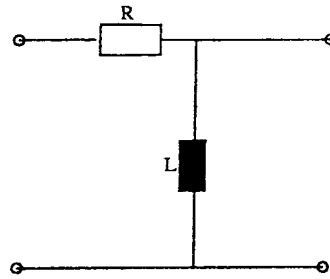
$$2r(t - T) + r(t - 2T))$$

Antwort liefert Antwort auf Rampenfunktion, Integrationsssatzes:

$$\delta(\omega) = \frac{1}{j\omega} \underline{H}(j\omega) \quad , \text{ da } \underline{H}(0) = 0$$

$$(\omega)$$

$$\delta(0)\delta(\omega)$$



$$= \frac{1}{RC} \quad \text{Realisierungsmöglichkeit 2 mit } \alpha = \frac{R}{L}$$

$$\underset{\omega=0}{=} \frac{j/\alpha}{j} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\left. \frac{j\omega - j\omega \cdot j}{+ j\omega)^2} \right|_{\omega=0} = \frac{j\alpha}{\alpha^2} = \frac{j}{\alpha}$$

$$\frac{1}{j\omega} \underline{H}(j\omega) + \frac{\pi}{\alpha} \delta(\omega)$$

$$\cdot e^{-j\omega T} + \underline{R}(j\omega) \cdot e^{-j2\omega T})$$

$$\delta(\omega) - \frac{2}{(j\omega)^2} \underline{H}(j\omega) e^{-j\omega T} -$$

$$\frac{1}{\omega)^2} \underline{H}(j\omega) e^{-j2\omega T} + \frac{\pi}{\alpha} \delta(\omega) e^{-j2\omega T})$$

$$\frac{2}{j\omega)^2} \underline{H}(j\omega) e^{-j\omega T} + \frac{1}{(j\omega)^2} \underline{H}(j\omega) e^{-j2\omega T} +$$

$$\frac{-j\omega T + \frac{\pi}{\alpha} \delta(\omega) e^{-j2\omega T})}{\alpha}$$

$$\frac{\pi}{\alpha} \delta(\omega)$$

$$- e^{-j2\omega T} - 1)$$

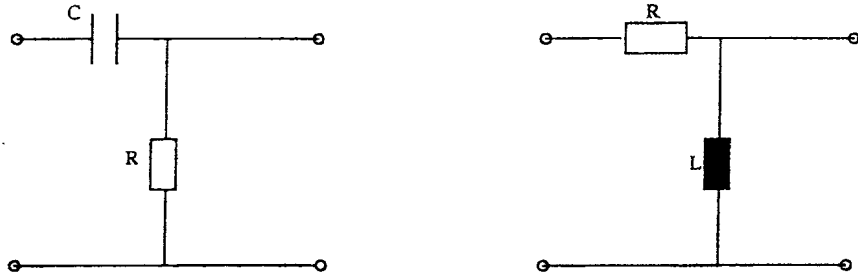


Fig. 1. Realisierungsmöglichkeit 1 mit $\alpha = \frac{1}{RC}$ Realisierungsmöglichkeit 2 mit $\alpha = \frac{R}{L}$

mit $\underline{S}(0) = \left. \frac{H(j\omega)}{j\omega} \right|_{\omega=0}$ mit l'Hospital:

$$\underline{S}(0) = \left. \frac{\frac{dH(j\omega)}{d\omega}}{\frac{d(j\omega)}{d\omega}} \right|_{\omega=0} = \frac{j/\alpha}{j} = \frac{1}{\alpha}$$

Nebenrechnung:

$$\left. \frac{dH(j\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0} = \left. \frac{j(\alpha + j\omega) - j\omega \cdot j}{(\alpha + j\omega)^2} \right|_{\omega=0} = \frac{j\alpha}{\alpha^2} = \frac{j}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \underline{R}(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{j\omega} \underline{H}(j\omega) + \frac{\pi}{\alpha} \delta(\omega)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{U}_{a_1}(j\omega) &= \frac{U_0}{T} (\underline{R}(j\omega) - 2\underline{R}(j\omega) \cdot e^{-j\omega T} + \underline{R}(j\omega) \cdot e^{-j2\omega T}) \\ &= \frac{U_0}{T} \left(\frac{1}{(j\omega)^2} \underline{H}(j\omega) + \frac{\pi}{\alpha} \delta(\omega) - \frac{2}{(j\omega)^2} \underline{H}(j\omega) e^{-j\omega T} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\pi}{\alpha} \delta(\omega) e^{-j\omega T} + \frac{1}{(j\omega)^2} \underline{H}(j\omega) e^{-j2\omega T} + \frac{\pi}{\alpha} \delta(\omega) e^{-j2\omega T} \right) \\ &= \frac{U_0}{T} \left(\frac{1}{(j\omega)^2} \underline{H}(j\omega) - \frac{2}{(j\omega)^2} \underline{H}(j\omega) e^{-j\omega T} + \frac{1}{(j\omega)^2} \underline{H}(j\omega) e^{-j2\omega T} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi}{\alpha} \delta(\omega) - \underbrace{\frac{2\pi}{\alpha} \delta(\omega) e^{-j\omega T}}_{\frac{2\pi}{\alpha} \delta(\omega)} + \underbrace{\frac{\pi}{\alpha} \delta(\omega) e^{-j2\omega T}}_{\frac{\pi}{\alpha} \delta(\omega)} \right) \\ &= \underline{\underline{\frac{U_0}{\omega^2 T} \underline{H}(j\omega) (2e^{-j\omega T} - e^{-j2\omega T} - 1)}}} \end{aligned}$$

Aufgabe 12

Häufig benutzter Zusammenhang:

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

a)

$$\begin{aligned} x(t) &= a(t) \cos(\omega_c t) \\ \Rightarrow \underline{X}(j\omega) &= F\{a(t) \cos(\omega_c t)\} \\ &= \frac{1}{2\pi} F\{a(t)\} * F\{\cos(\omega_c t)\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \underline{A}(j\omega) * F\left\{\frac{1}{2} (e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t})\right\} \quad 1 \circ \bullet 2\pi\delta(\omega) \\ &= \frac{1}{2} \underline{A}(j\omega) * \left\{\frac{1}{2\pi} [2\pi\delta(\omega - \omega_c) + 2\pi\delta(\omega + \omega_c)]\right\} \\ &= \frac{1}{2} \underline{A}(j\omega) * \delta(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} \underline{A}(j\omega) * \delta(\omega + \omega_c) \\ \underline{X}(j\omega) &= \frac{1}{2} \underline{A}(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{2} \underline{A}(j\omega + j\omega_c) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \underline{A}(j\omega) &= F\{A_0 \cos(\omega_s t)\} \\ &= A_0 \cdot F\left\{\frac{1}{2} (e^{j\omega_s t} + e^{-j\omega_s t})\right\} \\ \underline{A}(j\omega) &= A_0 \pi [\delta(\omega - \omega_s) + \delta(\omega + \omega_s)] \\ \Rightarrow \underline{X}(j\omega) &= \frac{1}{2} A_0 \pi [\delta(\omega - \omega_s - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_s - \omega_c)] \\ &\quad + \frac{1}{2} A_0 \pi [\delta(\omega - \omega_s + \omega_c) + \delta(\omega + \omega_s + \omega_c)] \\ \underline{X}(j\omega) &= \frac{A_0 \pi}{2} \{\delta(\omega - \omega_c - \omega_s) + \delta(\omega - \omega_c + \omega_s) + \delta(\omega + \omega_c - \omega_s) + \delta(\omega + \omega_c + \omega_s)\} \\ &= |\underline{X}(j\omega)| = X(j\omega), \text{ da reell} \end{aligned}$$

c)

Es handelt sich hierbei um Amplitudenmodulation. Wie man dem Fourierbetragspektrum entnehmen kann, entstehen durch die Modulation neue Frequenzen (Seitenbänder). Ein lineares, zeitinvariantes Netzwerk hat jedoch nur Einfluß auf Amplitude und Phase eines harmonischen Signals, nicht jedoch auf die Frequenz.

Folglich kann eine solche Modulation **nicht** mit einem linearen, zeitinvarianten Netzwerk durchgeführt werden!

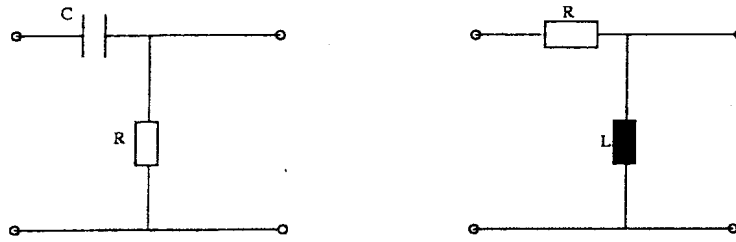


Fig. 1. Realisierungsmöglichkeit 1 mit $\alpha = \frac{1}{RC}$ Realisierungsmöglichkeit 2 mit $\alpha = \frac{R}{L}$

mit $\underline{S}(0) = \left| \frac{\underline{H}(j\omega)}{j\omega} \right|_{\omega=0}$ mit l'Hospital:

$$\underline{S}(0) = \left| \frac{\frac{d\underline{H}(j\omega)}{d\omega}}{\frac{d(j\omega)}{d\omega}} \right|_{\omega=0} = \frac{\operatorname{frac} j\alpha}{j} = \frac{1}{\alpha}$$

Nebenrechnung:

$$\left| \frac{d\underline{H}(j\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0} = \left| \frac{j(\alpha + j\omega) - j\omega \cdot j}{(\alpha + j\omega)^2} \right|_{\omega=0} = \frac{j\alpha}{\alpha^2} = \frac{j}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \underline{R}(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{j\omega} \underline{H}(j\omega) + \frac{\pi}{\alpha} \delta(\omega)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{U}_{a_1}(j\omega) &= \frac{U_0}{T} (\underline{R}(j\omega) - 2\underline{R}(j\omega) \cdot e^{-j\omega T} + \underline{R}(j\omega) \cdot e^{-j2\omega T}) \\ &= \frac{U_0}{T} \left(\frac{1}{(j\omega)^2} \underline{H}(j\omega) + \frac{\pi}{\alpha} \delta(\omega) - \frac{2}{(j\omega)^2} \underline{H}(j\omega) e^{-j\omega T} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\pi}{\alpha} \delta(\omega) e^{-j\omega T} + \frac{1}{(j\omega)^2} \underline{H}(j\omega) e^{-j2\omega T} + \frac{\pi}{\alpha} \delta(\omega) e^{-j2\omega T} \right) \\ &= \frac{U_0}{T} \left(\frac{1}{(j\omega)^2} \underline{H}(j\omega) - \frac{2}{(j\omega)^2} \underline{H}(j\omega) e^{-j\omega T} + \frac{1}{(j\omega)^2} \underline{H}(j\omega) e^{-j2\omega T} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi}{\alpha} \delta(\omega) - \underbrace{\frac{2\pi}{\alpha} \delta(\omega) e^{-j\omega T}}_{\frac{2\pi}{\alpha} \delta(\omega)} + \underbrace{\frac{\pi}{\alpha} \delta(\omega) e^{-j2\omega T}}_{\frac{\pi}{\alpha} \delta(\omega)} \right) \\ &= \underline{\underline{\frac{U_0}{\omega^2 T} \underline{H}(j\omega) (2e^{-j\omega T} - e^{-j2\omega T} - 1)}}} \end{aligned}$$

Aufgabe 13

a)
 $\underline{H}(j\omega) = F\{h(t)\}$ mit

$$h(t) = \int_{-\infty}^t \frac{u_a(t')}{\phi} dt'$$

dann es ist ja:

$$\begin{aligned} \text{Eingang} &\rightarrow \text{Ausgang} \\ \delta(t) &\rightarrow h(t) \\ \dot{\delta}(t) &\rightarrow \dot{h}(t) \\ \phi \dot{\delta}(t) &\rightarrow \phi \dot{h}(t) = u_a(t) \\ &\Rightarrow h(t) = \int \frac{u_a(t)}{\phi} dt \end{aligned}$$

aus (1):

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^t (\alpha^2 e^{-\alpha t'} s(t') - \alpha \delta(t') + \dot{\delta}(t')) dt' \\ &= \int_{-\infty}^t \alpha^2 e^{-\alpha t'} s(t') dt' - \alpha \int_{-\infty}^t \delta(t') dt' + \int_{-\infty}^t \dot{\delta}(t') dt' \\ &= \alpha^2 s(t) \int_0^t e^{-\alpha t'} dt' - \alpha \cdot s(t) + \delta(t) \\ &= \alpha^2 s(t) \left[\frac{e^{-\alpha t'}}{-\alpha} \right]_0^t - \alpha \cdot s(t) + \delta(t) \\ &= -\alpha s(t) (e^{-\alpha t} - 1) - \alpha \cdot s(t) + \delta(t) \\ &= \underline{\delta(t) - \alpha e^{-\alpha t} s(t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{H}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt - \alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} s(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt - \alpha \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t} dt \\ &= 1 - \alpha \left[\frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{-(\alpha+j\omega)} \right]_0^{\infty} \\ &= 1 - \alpha \left(0 + \frac{1}{\alpha+j\omega} \right) = 1 - \frac{\alpha}{\alpha+j\omega} \\ &= \underline{\underline{\frac{j\omega}{\alpha+j\omega}}} \end{aligned}$$

//alternative Möglichkeit zu Aufgabenteil a:

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \underline{U_a(j\omega)} / \underline{U_e(j\omega)} \\ u_e(t) &= \phi \cdot \dot{\delta}(t) \quad \text{O} \text{---} \text{---} \bullet \quad \underline{U_e(j\omega)} = \phi \cdot j\omega \cdot 1 \\ u_a(t) &= \phi \cdot \alpha^2 \cdot e^{-\alpha t} \cdot s(t) - \phi \alpha \cdot \delta(t) + \phi \cdot \dot{\delta}(t) \end{aligned}$$

Theoretische Elektrotechnik II

5. Aufgabenblatt

Aufgabe 14: Aktives RC-Differenziernetzwerk

Aus einem Operationsverstärker mit endlicher Verstärkung v , einem Ohmwiderrstand R und einem Kondensator C wird ein Differenzierwerk nach Bild 14.1 aufgebaut. Das Ausgangssignal $u_2(t)$ ergibt sich aus der Differenzspannung $u_d(t)$ multipliziert mit der negativen Verstärkung v ($u_2(t) = -v \cdot u_d(t)$, $v > 0$). Der Operationsverstärker zeige ideales Eingangsverhalten.

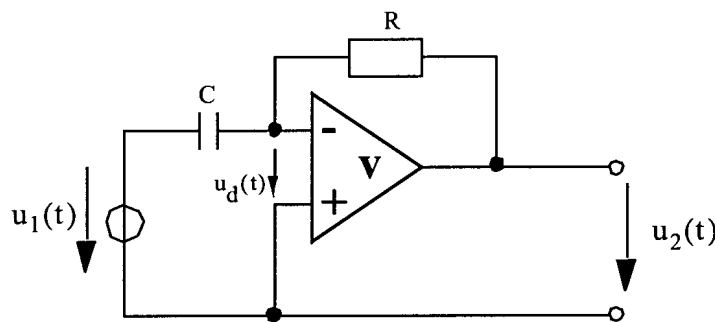


Bild 14.1 Differenziernetzwerk, realisiert als aktives RC-Netzwerk

- Wie groß sind Ein- und Ausgangswiderstand eines idealen Operationsverstärkers?
- Geben Sie die Übertragungsfunktion $\underline{H}(j\omega) = \underline{U}_2(j\omega)/\underline{U}_1(j\omega)$ an.
- Zeigen Sie, daß für eine unendlich große Verstärkung ($v \rightarrow \infty$) $u_2(t) = k \cdot \dot{u}_1(t)$ gilt, d.h. daß das Netzwerk als idealer Differenzierer arbeitet. Wie groß ist k in diesem Fall?
- Bestimmen Sie für den nicht-idealen Fall ($v < \infty$) die Fourier-Transformierte $\underline{U}_2(j\omega)$ des Ausgangssignals $u_2(t)$, wenn $u_1(t)$ den Verlauf nach Bild 14.2 hat.

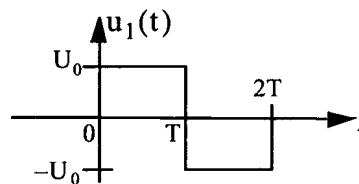


Bild 14.2 zeitlicher Verlauf von $u_1(t)$

- Wie lautet die Fourier-Transformierte $\underline{U}_2(j\omega)$ auf das in Bild 14.2 gegebene Eingangssignal im idealen Fall unendlicher Verstärkung ($v \rightarrow \infty$)? Bestimmen und skizzieren Sie auch den zeitlichen Verlauf der Fourier-Rücktransformierten $u_2(t)$.

Aufgabe 15: Netzwerkanalyse - RC-Kette

RC-Ketten werden in der NF-Technik oft als Spannungsteiler oder Phasenschieber verwendet. Sie bestehen aus hintereinandergeschalteten, elektrisch gleichartigen RC-Gliedern. In Bild 15.1 ist ein Vierpol gezeichnet, der aus einer zweigliedrigen RC-Kette besteht.

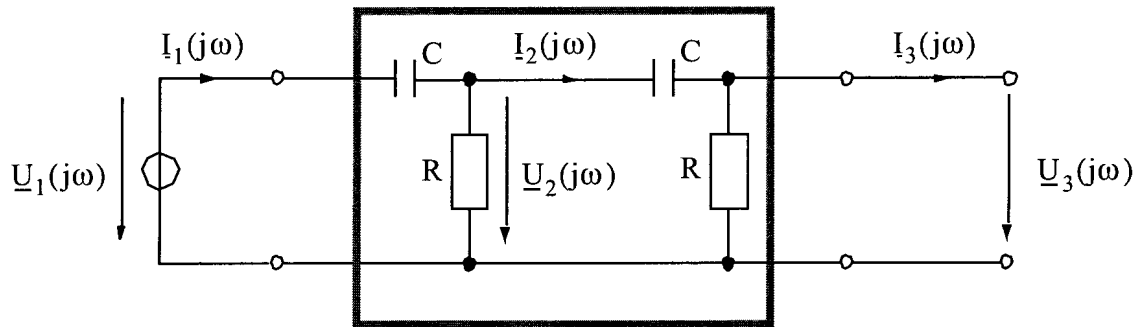


Bild 15.1 zweigliedrige RC-Kette

- Berechnen Sie die Übertragungsfunktionen $\underline{H}_1(j\omega) = \underline{U}_2(j\omega)/\underline{U}_1(j\omega)$, $\underline{H}_2(j\omega) = \underline{U}_3(j\omega)/\underline{U}_2(j\omega)$ und $\underline{H}_{ges}(j\omega) = \underline{U}_3(j\omega)/\underline{U}_1(j\omega)$ als gebrochen rationale Funktionen in $(j\omega)$, wenn $\underline{U}_1(j\omega)$ die Fourier-Transformierte des Eingangssignals und $\underline{U}_3(j\omega)$ die Fourier-Transformierte des Ausgangssignals ist.
- Bestimmen Sie die Differentialgleichung des Netzwerks und geben Sie begründet dessen Ordnung an.
- Bei welcher physikalisch sinnvollen Frequenz ω_0 besteht zwischen Eingangs- und Ausgangsgröße eine Phasendifferenz von π ?
- Um das Wievielfache ist $\underline{U}_1(j\omega)$ betragsmäßig größer als $\underline{U}_3(j\omega)$ bei der unter c) berechneten Frequenz ω_0 ? Zeichnen Sie den qualitativen Verlauf der Ortskurve von $\underline{H}_{ges}(j\omega)$. Geben Sie den Filtertyp des Netzwerks an.
- Warum ist $\underline{H}_1(j\omega) \neq \underline{H}_2(j\omega)$? Geben Sie eine (idealisierte) Lösung für die Innenbeschaltung der „Black Box“ in Bild 15.2 an, damit $\underline{H}_1(j\omega) = \underline{H}_2(j\omega)$ wird. Wie lautet dann $\underline{H}_{ges}(j\omega)$? Wie bestimmt sich demnach $\underline{H}_{ges}^n(j\omega)$ einer „idealisierten“ RC-Kette mit n Gliedern?

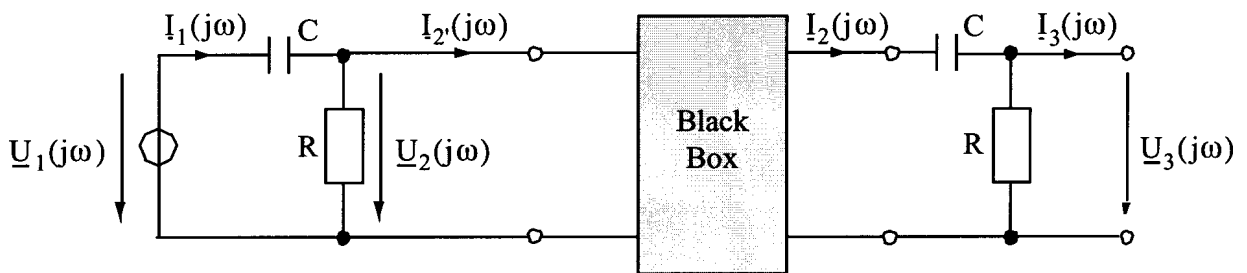


Bild 15.2 zweigliedrige RC-Kette mit Black Box

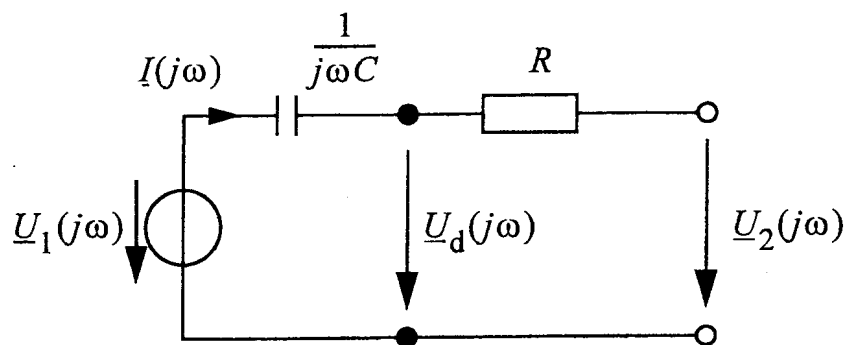
Aufgabe 16: Laplace-Transformation einer abklingenden Rampenfunktion

- Bestimmen Sie die Laplace-Transformation einer abklingenden Rampenfunktion $x_1(t) = t \cdot e^{-\alpha t} \cdot s(t)$, ($\alpha > 0$).
- Für welche Werte von $s = \sigma + j\omega$ konvergiert das Laplace-Integral? Zeigen Sie, daß das Ergebnis auch für komplexes $\alpha = a + j \cdot b$, $a, b \in \mathfrak{R}$ gilt und welche Bedingungen nun in Abhängigkeit von a und b erfüllt werden müssen, damit das Laplace-Integral konvergiert.
- Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus a) die Laplace-Transformation einer Rampenfunktion, die mit einer Kosinusfunktion moduliert wird: $x_2(t) = t \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot s(t)$.

Theoretische Elektrotechnik II, Musterlösung

Aufgabe 14: a) $R_e = \infty, R_a = 0$ (ideal!)

b)



$$\underline{U}_2(j\omega) = -v \cdot \underline{U}_d(j\omega)$$

$$\underline{U}_1(j\omega) = I(j\omega) \left(\frac{1}{j\omega C} + R \right) + \underline{U}_2(j\omega)$$

$$\underline{U}_1(j\omega) = I(j\omega) \frac{1}{j\omega C} + \underline{U}_d(j\omega)$$

$$I(j\omega) = (\underline{U}_1(j\omega) - \underline{U}_d(j\omega)) j\omega C$$

$$\underline{U}_1(j\omega) = \underline{U}_1(j\omega) - \underline{U}_d(j\omega) + j\omega RC(\underline{U}_1(j\omega) - \underline{U}_d(j\omega)) + \underline{U}_2(j\omega)$$

$$\underline{U}_1(j\omega) \cdot j\omega RC = \underline{U}_d(j\omega) \cdot (1 + j\omega RC) - \underline{U}_2(j\omega)$$

$$\underline{U}_1(j\omega) \cdot j\omega RC = -\frac{1}{v} \underline{U}_2(j\omega) \cdot (1 + j\omega RC) - \underline{U}_2(j\omega)$$

$$\underline{U}_1(j\omega) \cdot j\omega RC = \underline{U}_2(j\omega) \cdot \left(-\frac{1}{v} - \frac{j\omega RC}{v} - 1 \right)$$

$$\underline{U}_1(j\omega) \cdot j\omega RC = \underline{U}_2(j\omega) \cdot \left(-\frac{1 + j\omega RC + v}{v} \right)$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)} = -\frac{jv\omega RC}{1 + v + j\omega RC}$$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \underline{H}(j\omega) = \lim_{v \rightarrow \infty} -\frac{jv\omega RC}{1 + v + j\omega RC} = -j\omega RC$$

Mit $u_2(t) = k \cdot \dot{u}_1(t)$ ergibt sich:

$$\underline{U}_2(j\omega) = k \cdot j\omega \cdot \underline{U}_1(j\omega)$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)} = k \cdot j\omega \quad \text{Vergleich ergibt: } k = -RC$$

d)

$$u_1(t) = U_0(s(t) - 2s(t-T) + s(t-2T))$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_1(j\omega) &= U_0 \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} s(t-T)e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} s(t-2T)e^{-j\omega t} dt \right) \\ &= U_0 \left(\int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt - 2 \int_T^{\infty} e^{-j\omega t} dt + \int_{2T}^{\infty} e^{-j\omega t} dt \right) \\ &= U_0 \left(\frac{-1}{j\omega} [e^{-j\omega t}] \Big|_0^{\infty} - 2 \frac{-1}{j\omega} [e^{-j\omega t}] \Big|_T^{\infty} + \frac{-1}{j\omega} [e^{-j\omega t}] \Big|_{2T}^{\infty} \right) \\ &= \frac{U_0}{j\omega} (1 - 2e^{-j\omega T} + e^{-j\omega 2T}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_2(j\omega) &= \underline{H}(j\omega) \underline{U}_1(j\omega) = -\frac{jv\omega RC}{1+v+j\omega RC} \cdot \frac{U_0}{j\omega} (1 - 2e^{-j\omega T} + e^{-j\omega 2T}) \\ &= -\frac{vRC}{1+v+j\omega RC} \cdot U_0 (1 - 2e^{-j\omega T} + e^{-j\omega 2T}) \end{aligned}$$

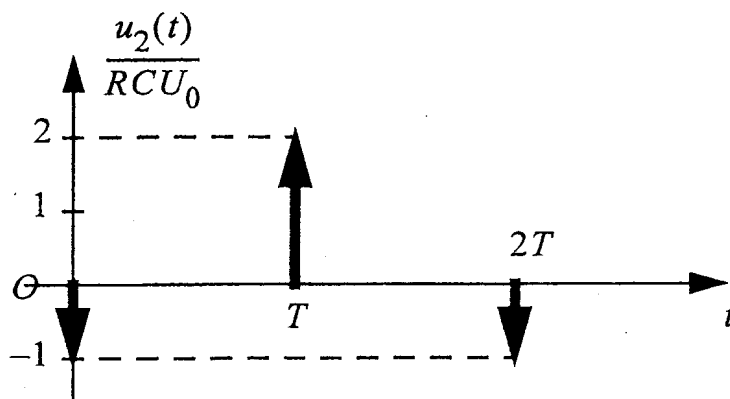
e) im idealen Fall ($v \rightarrow \infty$) erhalt man: $\underline{U}_2(j\omega) = -RC \cdot U_0 (1 - 2e^{-j\omega T} + e^{-j\omega 2T})$

$$u_2(t) = F^{-1} \{ \underline{U}_2(j\omega) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -RC \cdot U_0 (1 - 2e^{-j\omega T} + e^{-j\omega 2T}) e^{j\omega t} d\omega$$

Korrespondenzen:

$$\begin{aligned} 1 &\bullet \text{---} \circ \delta(t) \\ e^{-j\omega T} &\bullet \text{---} \circ \delta(t-T) \\ e^{-j\omega 2T} &\bullet \text{---} \circ \delta(t-2T) \end{aligned}$$

$$u_2(t) = -RC \cdot U_0 (\delta(t) - 2\delta(t-T) + \delta(t-2T))$$



Aufgabe 15

a) $\underline{H}_2(j\omega) = ?$

Spannungsteiler

$$\begin{aligned}\underline{H}_2(j\omega) &= \frac{\underline{U}_3(j\omega)}{\underline{U}_2(j\omega)} \\ &= \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR} = \underline{H}_2(j\omega)\end{aligned}$$

$\underline{H}_1 = ?$

Ersatzschaltbild mit $\underline{Z}(j\omega) \rightarrow$ Spannungsteiler

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{\underline{Z}(j\omega)}{\underline{Z}(j\omega) + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C \underline{Z}(j\omega)}{1 + j\omega C \underline{Z}(j\omega)}$$

$$\underline{Z}(j\omega) = ?$$

$$\underline{Z}(j\omega) = R \parallel \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) = \frac{R \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right)}{R + R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R^2 + \frac{R}{j\omega C}}{2R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R + j\omega CR^2}{1 + j\omega CR^2}$$

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{1 + j\omega CR^2}{1 + \frac{j\omega CR + (j\omega CR)^2}{1 + j\omega CR^2}} = \frac{j\omega CR + (j\omega CR)^2}{1 + 2j\omega CR + j\omega CR + (j\omega)^2 (CR)^2}$$

$$\rightarrow \underline{H}_1(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 (RC)^2 + j\omega RC}{(j\omega)^2 (RC)^2 + 3j\omega RC + 1}$$

$$\underline{H}_{ges}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega) \cdot \underline{H}_2(j\omega) = \frac{j\omega RC(j\omega RC + 1)}{(j\omega)^2 (RC)^2 + 3j\omega RC + 1} \cdot \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

$$\underline{H}_{ges}(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 (RC)^2}{(j\omega)^2 (RC)^2 + 3j\omega RC + 1}$$

b) Die Ordnung des Netzwerkes ist 2, da die höchste Potenz von $(j\omega)$ in $\underline{H}_{ges}(j\omega)$ 2 ist, bzw. weil im NW 2 unabhängige Energiespeicher vorhanden sind.

c)

$$\begin{aligned}\underline{H}_{ges}(j\omega) &= \frac{-\omega^2 R^2 C^2}{1 - \omega^2 R^2 C^2 + j\omega 3RC} \\ &= \frac{-\omega^2 R^2 C^2}{\sqrt{(1 - \omega^2 R^2 C^2)^2 + (\omega 3RC)^2} e^{j \arctan \frac{\omega 3RC}{1 - (\omega RC)^2}}} \\ &= \frac{-(\omega RC)^2}{\sqrt{(1 - (\omega RC)^2)^2 + (\omega 3RC)^2}} \cdot e^{-j \arctan \frac{\omega 3RC}{1 - (\omega RC)^2}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \pi - \arctan \frac{\omega_0 3RC}{1 - (\omega_0 RC)^2} = \pi$$

$$\rightarrow \frac{\omega_0 3RC}{1 - (\omega_0 RC)^2} = 0 \quad \rightarrow \omega_0 = 0$$

d)

$$\begin{aligned} |\underline{H}_{ges}(j\omega_0)| &= 0 \\ \Rightarrow \underline{U}_3(j\omega_0) &= 0 \quad (\infty \text{-fach größer}) \end{aligned}$$

Es handelt sich um einen Hochpaß.

e) $\underline{H}_1(j\omega) \neq \underline{H}_2(j\omega)$, da das 2. RC-Glied Rückwirkungen auf das erste hat.

Die Innenbeschaltung der Black Box besteht aus einem Trennverstärker mit Verstärkung 1 (Spannungsfolger). Hierdurch wird eine Entkopplung erreicht.

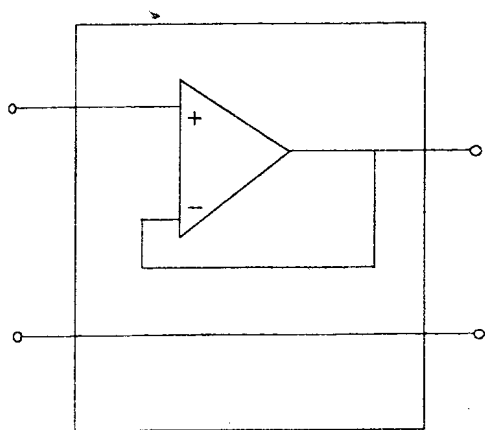
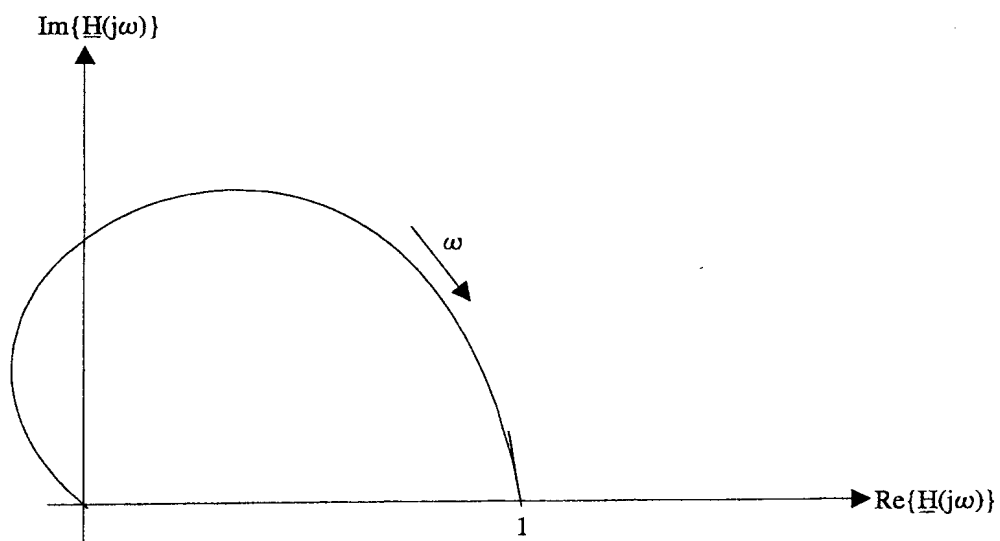
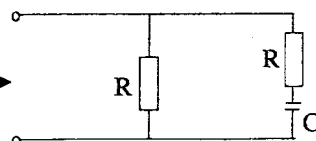
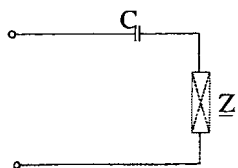
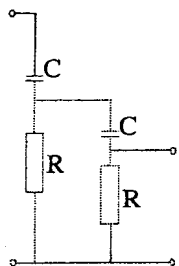
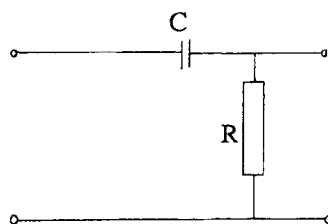
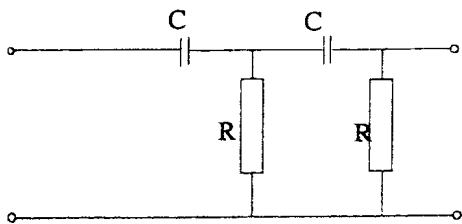
$$\begin{aligned} \underline{H}_{ges}(j\omega) &= \underline{H}_1(j\omega) \cdot \underline{H}_2(j\omega) \\ &= \frac{(j\omega RC)^2}{(1 + j\omega RC)^2} = \frac{-\omega^2 R^2 C^2}{1 - \omega^2 R^2 C^2} \end{aligned}$$

Für n hintereinandergeschaltete RC-Glieder:

$$\begin{aligned} \underline{H}_{ges}^n(j\omega) &= \underbrace{\underline{H}_2(j\omega) \cdot \underline{H}_2(j\omega) \cdot \dots \cdot \underline{H}_2(j\omega)}_{n\text{-mal}} \\ \Rightarrow \underline{H}_{ges}^n(j\omega) &= [\underline{H}_2(j\omega)]^n = \frac{(j\omega RC)^n}{(1 + j\omega RC)^n} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}x_2(t) &= t \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot s(t) \\&= t \cdot \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})s(t) \\ \Rightarrow \underline{X}_2(s) &= L\{x_2(t)\} \\&= L\left\{\frac{1}{2}te^{j\omega_0 t}s(t)\right\} + L\left\{\frac{1}{2}te^{-j\omega_0 t}s(t)\right\} \\&= \frac{\frac{1}{2}}{(s + j\omega_0)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{(s - j\omega_0)^2} \\&= \frac{\frac{1}{2}(s - j\omega_0)^2 + \frac{1}{2}(s + j\omega_0)^2}{(s + j\omega_0)^2 \cdot (s - j\omega_0)^2} \\&= \frac{\frac{1}{2}(s^2 - 2j s \omega_0 - \omega_0^2 + s^2 + 2j s \omega_0 - \omega_0^2)}{(s^2 + \omega_0^2)^2} \\&= \frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}\end{aligned}$$



Aufgabe 16

a)

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= t \cdot e^{-\alpha t} s(t) \\
 \Rightarrow \underline{X}_1(s) &= L\{t \cdot e^{-\alpha t} s(t)\} \\
 &= \int_{0^-}^{\infty} t \cdot e^{-\alpha t} e^{-st} dt \\
 &= \int_{0^-}^{\infty} t \cdot e^{-(s+\alpha)t} dt
 \end{aligned}$$

partielle Integration: $\int_a^b u'v dt = [uv]_a^b - \int_a^b uv' dt$, mit $u' = e^{-(s+\alpha)t}$ und $v = t$ folgt:

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \underline{X}_1(s) &= \int_{0^-}^{\infty} t \cdot e^{-(s+\alpha)t} dt \\
 &= \left[-\frac{1}{(s+\alpha)} e^{-(s+\alpha)t} \cdot t \right]_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} -\frac{1}{(s+\alpha)} e^{-(s+\alpha)t} dt \\
 &= \left[-\frac{1}{(s+\alpha)} e^{-(s+\alpha)t} \cdot t \right]_{0^-}^{\infty} - \left[-\frac{1}{(s+\alpha)^2} e^{-(s+\alpha)t} \right]_{0^-}^{\infty} \\
 &= \frac{1}{(s+\alpha)^2}
 \end{aligned}$$

b) allgemeiner Fall von α :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s+\alpha)t} = \begin{cases} 0 & \text{für } \operatorname{Re}\{s+\alpha\} > 0 \\ \text{unbestimmt} & \text{für } \operatorname{Re}\{s+\alpha\} = 0 \\ \infty & \text{für } \operatorname{Re}\{s+\alpha\} < 0 \end{cases}$$

→ Ist $\alpha \in \mathfrak{R}$, ergibt sich als Konvergenzkriterium: $\sigma > -\alpha$

→ Ist $\alpha = a + jb$ komplex, so ergibt sich als Konvergenzkriterium:

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s+\alpha)t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\sigma+j\omega+a+jb)t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\sigma+a)t} e^{-j(\omega+b)t} < \infty \quad \text{für } \sigma+a > 0 \\
 &\quad \text{bzw. } \sigma > -a \\
 &\text{da } \operatorname{Re}\{\sigma + j\omega + a + jb\} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma + a > 0
 \end{aligned}$$

Theoretische Elektrotechnik II

6. Aufgabenblatt

Aufgabe 17: Laplace-Transformation

Gegeben ist die Laplace-Transformierte $\underline{X}(s) = \frac{1}{s^2 \cdot (s^2 + \omega_0^2)}$. Es soll die zugehörige Zeitfunktion $x(t)$ bestimmt werden.

a) Zerlegen Sie die Funktion in Partialbrüche und transformieren Sie diese gliedweise in den Zeitbereich.

Hinweise: 1) $\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} \cdot s(t)\} = \frac{1}{s + \alpha}$

2) $e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$

b) Wenden Sie den Residuensatz an.

Hinweise: $x(t) = \sum_i \text{Res}[\underline{X}(s_i) \cdot e^{s_i(t)}] \cdot s(t)$

$$\text{Res}[\underline{X}(s_i) \cdot e^{s_i(t)}] = \frac{1}{(m_i - 1)!} \cdot \frac{d^{m_i - 1}}{ds^{m_i - 1}} \cdot [\underline{X}(s) \cdot e^{st} \cdot (s - s_i)^{m_i}]_{s = s_i}$$

mit $s_i = i$ -ter Pol von $\underline{X}(s)$; $m_i =$ Ordnung des i -ten Pols.

c) Nutzen Sie den Integrationssatz der Laplace-Transformation.

Hinweis: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \cdot \underline{X}(s)\right\} = \int_0^t x(\tau) d\tau$

Aufgabe 18: Netzwerkberechnung mit Hilfe der Laplace-Transformation

Eine Rampenfunktion $i_e(t) = A \cdot t \cdot s(t)$ ist das Eingangssignal eines beidseitig mit dem Ohmwiderstand R abgeschlossenen RL-Netzwerkes (Bild 18.1). Das Netzwerk sei für Zeiten $t < 0$ energiefrei.

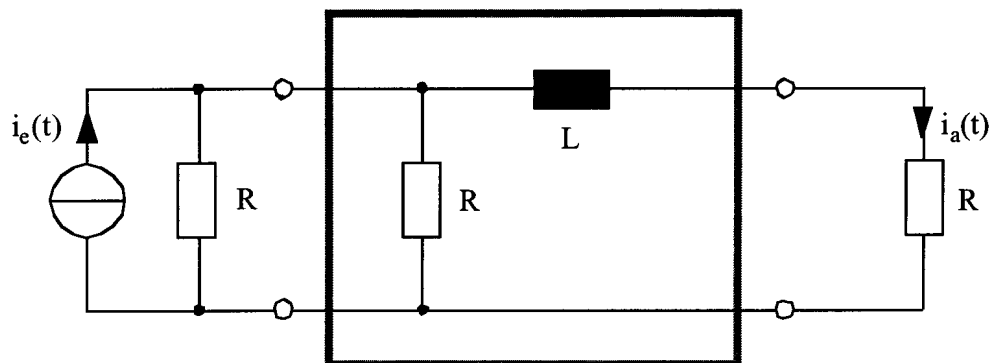


Bild 18.1 RL-Netzwerk

- Zeichnen Sie das Laplace-Ersatzschaltbild des Netzwerkes in Bild 18.1.
- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\underline{H}(s) = \underline{I}_a(s)/\underline{I}_e(s)$ des Netzwerkes. Welche Filtercharakteristik weist das Netzwerk auf? Begründung!
- Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $\underline{I}_e(s)$ des Eingangssignals.
- Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $\underline{I}_a(s)$ des Ausgangssignals.
- Berechnen und skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf von $i_a(t)$.

Aufgabe 19: Laplacetransformierte eines Impulses und eines periodischen Signales

Gegeben ist das periodische Signal nach Bild 19.1.

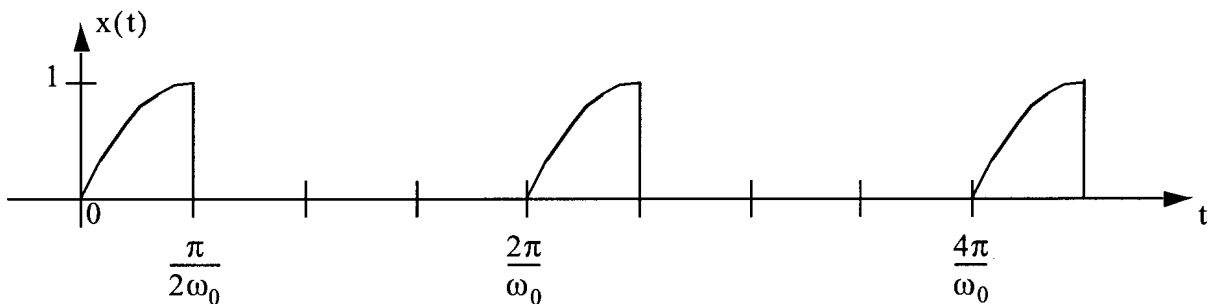


Bild 19.1 Periodisches Signal $x(t)$

Für $x(t)$ gilt:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \sin(\omega_0 t) & \text{für } 2k\pi \leq \omega_0 t < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte des ersten Impulses.
- Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte des periodischen Signals. Sollten Sie die unter Hinweis 2) angegebene Formel verwenden, so zeigen Sie, daß die angegebene Bedingung auch erfüllt wird!

Hinweis: 1) Das periodische Signal läßt sich darstellen als die Summe von zeitverschobenen Einzelimpulsen.

- Die Formel $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ gilt auch für komplexes x , wenn $|x| < 1$ ist.

Theoretische Elektrotechnik II, Musterlösung

Aufgabe 17: a)

$$\underline{X}(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + \omega_0^2)} = \frac{1}{s^2(s + j\omega_0)(s - j\omega_0)}$$

$$\underline{X}(s) = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s + j\omega_0} + \frac{D}{s - j\omega_0}$$

$$= \frac{A(s^2 + \omega_0^2) + Bs(s^2 + \omega_0^2) + Cs^2(s - j\omega_0) + Ds^2(s + j\omega_0)}{s^2(s^2 + \omega_0^2)}$$

$$= \frac{As^2 + A\omega_0^2 + Bs^3 + Bs\omega_0^2 + Cs^3 - Cs^2j\omega_0 + Ds^3 + Ds^2j\omega_0}{s^2(s^2 + \omega_0^2)}$$

Koeffizientenvergleich:

$$s^0: A\omega_0^2 = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\omega_0^2}$$

$$s^1: B\omega_0^2 = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$s^2: A - Cj\omega_0 + Dj\omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0 \quad (1)$$

$$s^3: B + C + D = 0 \Rightarrow C = -D \quad (2)$$

$$(2) \text{ in } (1): A - Cj\omega_0 - Cj\omega_0 = A - 2Cj\omega_0 = 0 \Rightarrow 2Cj\omega_0 = \frac{1}{\omega_0^2}$$

$$\Rightarrow C = -j\frac{1}{2\omega_0^3}, \quad D = j\frac{1}{2\omega_0^3}$$

$$\Rightarrow \underline{X}(s) = \frac{\frac{1}{\omega_0^2}}{s^2} - j\frac{1}{2\omega_0^3} \frac{1}{s + j\omega_0} + j\frac{1}{2\omega_0^3} \frac{1}{s - j\omega_0}$$

$$x(t) = \frac{1}{\omega_0^2} \cdot t \cdot s(t) - j\frac{1}{2\omega_0^3} \cdot e^{-j\omega_0 t} s(t) + j\frac{1}{2\omega_0^3} \cdot e^{j\omega_0 t} s(t)$$

$$= \frac{1}{\omega_0^2} \cdot t \cdot s(t) + \frac{1}{2j \cdot \omega_0^3} \cdot (e^{-j\omega_0 t} - e^{j\omega_0 t}) s(t) = \left(\frac{1}{\omega_0^2} \cdot t - \frac{1}{\omega_0^3} \cdot \sin(\omega_0 t) \right) s(t)$$

b)

Polstellen: $s_1 = 0$, doppelter Pol $\Rightarrow m_1 = 2$

$s_2 = -j\omega_0$, einfacher Pol $\Rightarrow m_2 = 1$

$s_3 = j\omega_0$, einfacher Pol $\Rightarrow m_3 = 1$

berechne Residuen: $Res\left[\underline{X}(s_1)e^{s_1 t}\right] = \frac{1}{1!} \cdot \frac{d}{ds}\left[\underline{X}(s)e^{st}(s-s_1)^2\right]\Bigg|_{s=s_1}$

$$= \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s^2 + \omega_0^2} \cdot e^{st}\right]\Bigg|_{s=0}$$

$$= \frac{te^{st}(s^2 + \omega_0^2) - e^{st}2s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}\Bigg|_{s=0}$$

$$= \frac{\omega_0^2 t}{\omega_0^4} = \frac{t}{\omega_0^2}$$

$$Res\left[\underline{X}(s_2)e^{s_2 t}\right] = \frac{1}{0!} \cdot [\underline{X}(s)e^{st}(s-s_2)]\Bigg|_{s=s_2}$$

$$= \frac{1}{s^2(s-j\omega_0)} \cdot e^{st}\Bigg|_{s=-j\omega_0}$$

$$= \frac{1}{(-j\omega_0)^2(-2j\omega_0)} \cdot e^{-j\omega_0 t}$$

$$= \frac{1}{2j\omega_0^3} \cdot e^{-j\omega_0 t}$$

$$Res\left[\underline{X}(s_3)e^{s_3 t}\right] = \frac{1}{0!} \cdot [\underline{X}(s)e^{st}(s-s_3)]\Bigg|_{s=s_3}$$

$$= \frac{1}{s^2(s+j\omega_0)} \cdot e^{st}\Bigg|_{s=j\omega_0}$$

$$= \frac{1}{(j\omega_0)^2 2j\omega_0} \cdot e^{j\omega_0 t}$$

$$= \frac{-1}{2j\omega_0^3} \cdot e^{j\omega_0 t}$$

$$x(t) = \sum Res = \left(\frac{t}{\omega_0^2} + \frac{1}{2j\omega_0^3}(e^{-j\omega_0 t} - e^{j\omega_0 t})\right)s(t) = \left(\frac{1}{\omega_0^2} \cdot t - \frac{1}{\omega_0^3} \cdot \sin(\omega_0 t)\right)s(t)$$

c)

$$\underline{X}(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{(s^2 + \omega_0^2)}$$

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{(s^2 + \omega_0^2)}\right\} &= \int_{0^-}^t \int_{0^-}^{\tau} L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + \omega_0^2)}\right\} d\tau' d\tau \\ &= \int_{0^-}^t \int_{0^-}^{\tau} \frac{1}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 \tau') d\tau' d\tau \\ &= \int_{0^-}^t \left[-\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \cos(\omega_0 \tau') \right] \Bigg|_{0^-}^{\tau} d\tau \\ &= \int_{0^-}^t \left(-\frac{1}{\omega_0^2} \right) \cdot (\cos(\omega_0 \tau) - 1) d\tau \\ &= \frac{1}{\omega_0^2} \int_{0^-}^t (1 - \cos(\omega_0 \tau)) d\tau \\ &= \frac{1}{\omega_0^2} \left[\tau - \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 \tau) \right] \Bigg|_{0^-}^t \\ &= \frac{1}{\omega_0^2} \left(t - \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right) \end{aligned}$$

$$\text{Also: } x(t) = \left(\frac{1}{\omega_0^2} \cdot t - \frac{1}{\omega_0^3} \cdot \sin(\omega_0 t) \right) s(t)$$

$s(t)$ kann gefahrlos dran multipliziert werden, da für t und $\tau > 0$ integriert wurde.

Aufgabe 18

b) Form eines komplexen Stromteilers!

$$\begin{aligned}
 \underline{Y}_1 &= \frac{1}{R \parallel R} = \frac{1}{\frac{R \cdot R}{R+R}} = \frac{1}{\frac{R}{2}} = \frac{2}{R} \quad \left(= \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) \\
 \underline{Y}_2 &= \frac{1}{R + sL} \\
 \underline{H}(s) &= \frac{\underline{I}_a(s)}{\underline{I}_e(s)} \\
 &= \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} = \frac{\frac{1}{R+sL}}{\frac{2}{R} + \frac{1}{R+sL}} = \frac{\frac{1}{R+sL}}{\frac{2R+2sL+R}{R(R+sL)}} \\
 &= \frac{\frac{R}{(R+sL)R}}{\frac{3R+2sL}{(R+sL)R}} = \frac{R}{3R+2sL} \\
 \underline{H}(s) &= \frac{1}{3 + s \cdot 2\frac{L}{R}} \quad \text{mit } \tau = \frac{L}{R} \text{ folgt: } \underline{H}(s) = \frac{1}{3 + s2\tau}
 \end{aligned}$$

FILTERCHARAKTERISTIK: Betrachte Betrag von $\underline{H}(j\omega)$

$$\text{hierzu: } s \rightarrow j\omega \quad \Rightarrow \quad |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{|3 + j\omega 2\frac{L}{R}|} = \frac{1}{\sqrt{9 + \omega^2 4\frac{L^2}{R^2}}}$$

Anschauliche Begründung:

$$\begin{aligned}
 \omega &= 0 && \text{Spule Kurzschluß, ohmscher Stromteiler} \\
 \omega &\rightarrow \infty && \text{Spule Leerlauf, unendlich großer Widerstand}
 \end{aligned}$$

\Rightarrow Tiefpaß

c)

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_e(s) &= \mathcal{L}\{i_e(t)\} = ? \\
 &= \int_{0^-}^{\infty} Ate^{-st} dt \quad \text{partielle Integration} \\
 &= \left[A \left(-\frac{t}{s} \right) e^{-st} \right]_{0^-}^{\infty} - A \int_{0^-}^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} dt \\
 &= \underbrace{0}_{*} - 0 + A \cdot \frac{1}{s} \cdot \left(-\frac{1}{s} \right) e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} \\
 &= -\frac{A}{s^2} \cdot \underbrace{(0 - 1)}_{**} \\
 \underline{I}_e(s) &= \frac{A}{s^2} \quad \text{mit } \operatorname{Re}\{s\} = \operatorname{Re}\{\sigma + j\omega\} = \sigma > 0
 \end{aligned}$$

Ansonsten konvergieren die Integrale bei * und ** nicht.

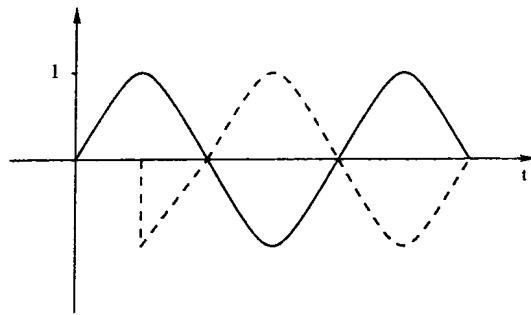


Fig. 1.

Aufgabe 19

a)

$$x_T(t) = \sin(\omega_0 t) s(t) - \cos(\omega_0(t - \frac{\pi}{2\omega_0})) s(t - \frac{\pi}{2\omega_0})$$

$$\begin{aligned} L\{\sin(\omega_0 t) s(t)\} &= L\left\{ \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) s(t) \right\} \\ &= \frac{1}{2j} \left(\int_0^\infty e^{j\omega_0 t} e^{-st} dt - \int_0^\infty e^{-j\omega_0 t} e^{-st} dt \right) \\ &= \frac{1}{2j} \left(\int_0^\infty e^{-(s-j\omega_0)t} dt - \int_0^\infty e^{-(s+j\omega_0)t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2j} \left(\left[-\frac{1}{s-j\omega_0} e^{-(s-j\omega_0)t} \right]_0^\infty - \left[-\frac{1}{s+j\omega_0} e^{-(s+j\omega_0)t} \right]_0^\infty \right) \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-j\omega_0} - \frac{1}{s+j\omega_0} \right) \\ &= \frac{1}{2j} \frac{s+j\omega_0 - s+j\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \\ &= \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

analog: $L\{\cos(\omega_0 t) s(t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$

$$\Rightarrow L\{x_T(t)\} = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} - \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} e^{-s \frac{\pi}{2\omega_0}} = \underline{X_T(s)}$$

b)

$$x(t) = x_T(t) + x_T(t - \frac{2\pi}{\omega_0}) + x_T(t - \frac{4\pi}{\omega_0}) + \dots$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \underline{X}(s) &= \underline{X}_T(s) + \underline{X}_T(s)e^{-s\frac{2\pi}{\omega_0}} + \underline{X}_T(s)e^{-s\frac{4\pi}{\omega_0}} + \dots \\
&= \underline{X}_T(s) \left(1 + e^{-s\frac{2\pi}{\omega_0}} + e^{-s\frac{4\pi}{\omega_0}} + \dots \right) \\
&= \underline{X}_T(s) \sum_{i=0}^{\infty} \left(e^{-s\frac{2\pi}{\omega_0}} \right)^i \\
&= \underline{X}_T(s) \frac{1}{1 - e^{-s\frac{2\pi}{\omega_0}}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{X}(s) = \left(\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} - \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} e^{-s\frac{2\pi}{\omega_0}} \right) \frac{1}{1 - e^{-s\frac{2\pi}{\omega_0}}}$$

Die Formel für die geometrische Reihe kann angewendet werden, da

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\{e^{-s\frac{2\pi}{\omega_0}}\} &= \operatorname{Re}\{e^{-(\delta+j\omega)\frac{2\pi}{\omega_0}}\} \\
&= \operatorname{Re}\{e^{-\delta\frac{2\pi}{\omega_0}} \cdot e^{-j\omega\frac{2\pi}{\omega_0}}\} \\
&= e^{-\delta\frac{2\pi}{\omega_0}} \cdot \operatorname{Re}\{e^{-j\omega\frac{2\pi}{\omega_0}}\}
\end{aligned}$$

Da $\delta > 0$ (sonst konvergiert das Laplace-Integral überhaupt nicht), ist

$$e^{-\delta\frac{2\pi}{\omega_0}} < 1 \quad (\text{da Exponent von } e \text{ negative})$$

und

$$\begin{aligned}
\left| \operatorname{Re}\{e^{-j\omega\frac{2\pi}{\omega_0}}\} \right| &\leq 1 & \text{da } \operatorname{Re}\{e^{-jk}\}_{k \in \mathbb{R}} &= \cos(k) \leq 1 \\
\Rightarrow \underbrace{e^{-\delta\frac{2\pi}{\omega_0}}}_{<1} \cdot \underbrace{\operatorname{Re}\{e^{-j\omega\frac{2\pi}{\omega_0}}\}}_{\leq 1} &\leq 1
\end{aligned}$$

Theoretische Elektrotechnik II

7. Aufgabenblatt

Aufgabe 20: Netzwerkanalyse mit Hilfe der Laplace-Transformation

Gegeben ist ein Netzwerk aus einem Ohmwiderstand R , einer Spule L und einem Kondensator C nach Bild 20.1. Die Anfangswerte für $t = 0^-$ sind $u_c(t = 0^-) = U_{C0}$, $i_L(t = 0^-) = I_{L0}$.

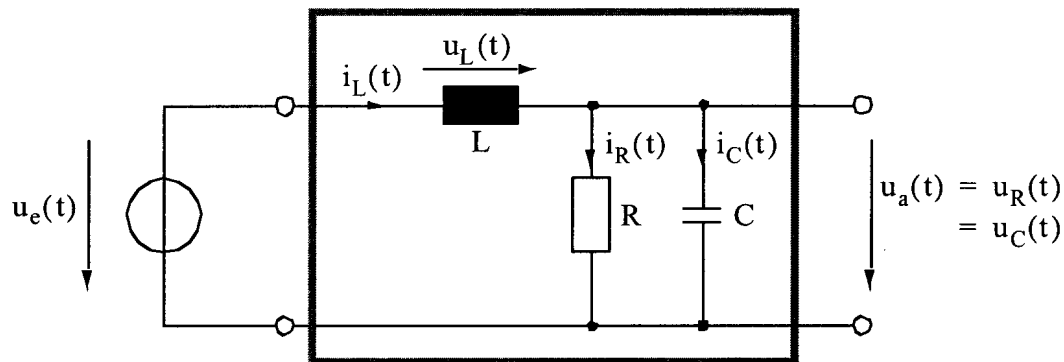


Bild 20.1 Netzwerk aus Ohmwiderstand R , Spule L und Kondensator C

- Bestimmen Sie die Differentialgleichung der Ausgangsgröße $u_a(t)$.
- Transformieren Sie diese Differentialgleichung in den Laplace-Bereich. Beachten Sie dabei die Anfangswerte!
- Zeichnen Sie das Laplace-Ersatzschaltbild und berücksichtigen Sie dabei die Anfangswerte.
- Geben Sie die Übertragungsfunktion $\underline{H}(s) = \underline{U}_a(s)/\underline{U}_e(s)$ des Netzwerkes an.

Die Bauteilgrößen (R, L, C) des Netzwerkes seien nun so dimensioniert, daß der aperiodische Grenzfall eintritt.

- In welcher Beziehung müssen die Bauteilgrößen demnach stehen?
- Wie lautet dann die Nullerregungsantwort $u_a^{NE}(t)$ des Netzwerkes mit den gegebenen Anfangsbedingungen?
- Das Netzwerk werde nun noch mit $u_e(t) = U_0 \cdot s(t)$ erregt. Bestimmen Sie die gesamte Antwort des Netzwerkes $u_a(t)$ unter Verwendung der Laplace-Transformation.
- Gegen welchen Wert strebt die Ausgangsspannung $u_a(t)$ für $t \rightarrow \infty$? Begründung oder Rechnung!

Aufgabe 21: Laplace-Transformation

Gegeben ist das lineare Netzwerk nach Bild 21.1 aus einer Spule, Kondensatoren, Ohmwiderständen und Schaltern. Für Zeiten $t < 0$ seien beide Schalter geöffnet. Die Kondensatoren C_1 und C_2 seien für $t < 0$ bereits auf die Spannungen $u_{C_1}(t < 0) = 2U_0$ und $u_{C_2}(t < 0) = U_0$ aufgeladen. Zur Zeit $t = 0$ werde der Schalter S_1 geschlossen. Der Schalter S_2 bleibe bis zum Zeitpunkt $t = T$ geöffnet.

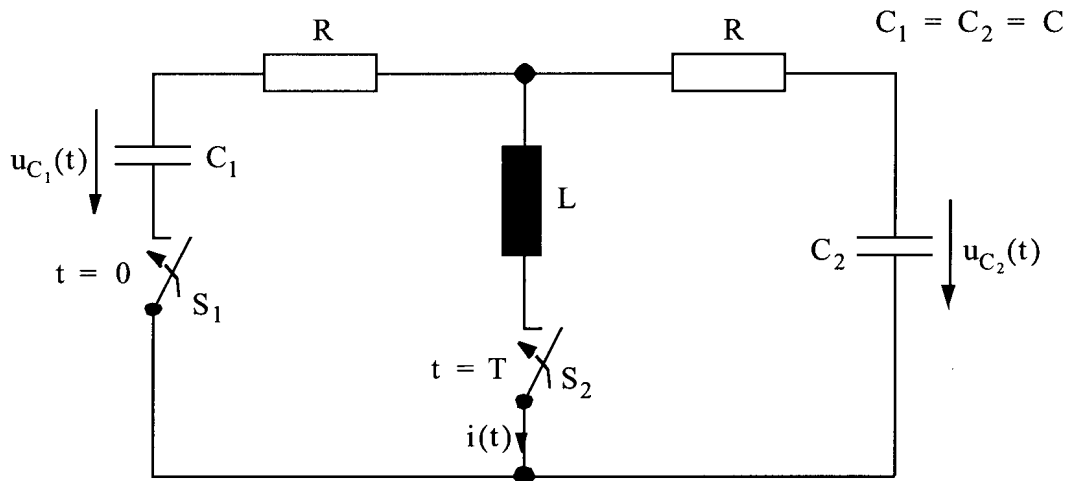
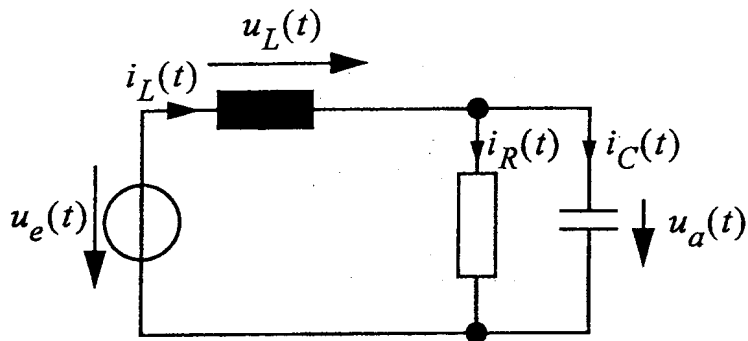


Bild 21.1 Lineares Netzwerk aus einer Spule, Kondensatoren, Ohmwiderständen und Schaltern

- Welche Ordnung hat das Netzwerk für $0 < t < T$?
 - Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild für den Laplacebereich für Zeiten $0 \leq t < T$.
 - Verifizieren Sie, daß bei dem Schaltvorgang keine elektrische Energie verloren geht, d.h. daß $u_{C_1}(0^-) = u_{C_1}(0^+)$ und $u_{C_2}(0^-) = u_{C_2}(0^+)$, und berechnen Sie $u_{C_1}(T)$ sowie $u_{C_2}(T)$ für $T \rightarrow \infty$ mit Hilfe der Grenzwertsätze der Laplace-Transformation.
 - Berechnen Sie die Zeitverläufe $u_{C_1}(t)$ und $u_{C_2}(t)$ und skizzieren Sie diese in einem gemeinsamen Diagramm.
 - Berechnen Sie die bei dem Ausgleichsvorgang in den Widerständen entstehende Wärmeenergie.
- Nach hinreichend langer Zeit, d.h. nach Abklingen aller Ausgleichsvorgänge, werde der Schalter S_2 geschlossen. Dieser Zeitpunkt werde mit $t = T$ bezeichnet.
- Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild im Laplacebereich für $t \geq T$.
 - Berechnen Sie die Laplace-Transformierte des Stromes $i(t)$ durch die Spule und führen Sie die Rücktransformation in den Zeitbereich durch. Gehen Sie vom Fall der schwachen Dämpfung aus und skizzieren Sie $i(t)$ für $T \leq t < \infty$.

Theoretische Elektrotechnik II, Musterlösung

Aufgabe 20:a)



$$i_L(t) = i_R(t) + i_C(t)$$

$$i_R(t) = \frac{u_a(t)}{R}$$

$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_a(t)}{dt}$$

$$u_L(t) = u_e(t) - u_a(t)$$

$$L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = u_e(t) - u_a(t)$$

$$\dot{i}_L = \dot{i}_R + \dot{i}_C$$

$$\frac{u_e - u_a}{L} = \frac{\dot{u}_a}{R} + C \cdot \ddot{u}_a$$

$$\ddot{u}_a + \frac{1}{RC} \cdot \dot{u}_a + \frac{1}{LC} \cdot u_a = \frac{1}{LC} \cdot u_e$$

b)

Information:

$$\begin{aligned} L\{\dot{x}(t)\} &= \int_{0^-}^{\infty} \dot{x}(t) e^{-st} dt = [x(t) e^{-st}] \Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} x(t) (-s) e^{-st} dt \\ &= -x(0^-) + s \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = s \underline{X}(s) - x(0^-) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L\{\ddot{x}(t)\} &= L\{\dot{u}(t)\} = sL\{u(t)\} - u(0^-) = sL\{\dot{x}(t)\} - \dot{x}(0^-) \\ &= s \{s \underline{X}(s) - x(0^-)\} - \dot{x}(0^-) = s^2 \underline{X}(s) - s \cdot x(0^-) - \dot{x}(0^-) \end{aligned}$$

$$L\left\{\ddot{u}_a + \frac{1}{RC} \cdot \dot{u}_a + \frac{1}{LC} \cdot u_a\right\} = L\left\{\frac{1}{LC} \cdot u_e\right\}$$

$$s^2 \underline{U}_a(s) - s \cdot u_a(0^-) - \dot{u}_a(0^-) + \frac{s \underline{U}_a(s)}{RC} - \frac{1}{RC} \cdot u_a(0^-) + \frac{1}{LC} \cdot \underline{U}_a(s) = \frac{1}{LC} \cdot \underline{U}_e(s)$$

$$\underline{U}_a(s) \left\{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}\right\} = \frac{1}{LC} \cdot \underline{U}_e(s) + u_a(0^-) \left(s + \frac{1}{RC}\right) + \dot{u}_a(0^-)$$

c)

Information:

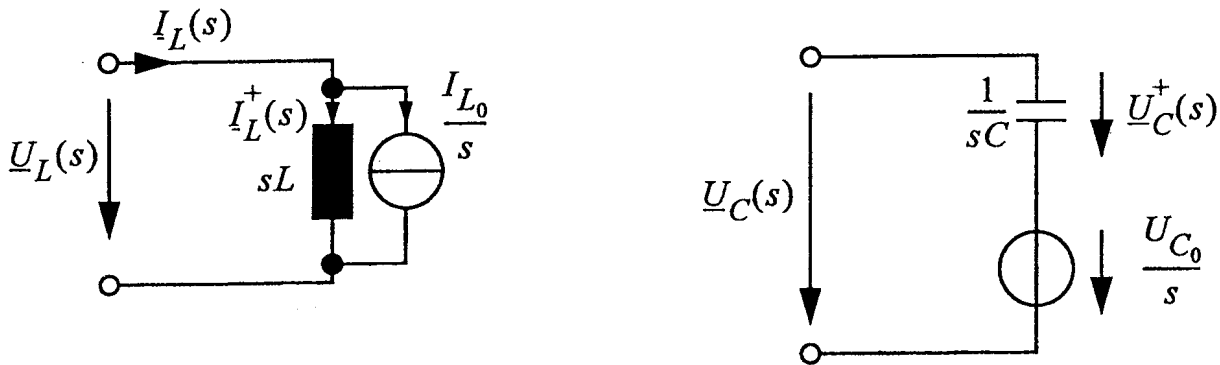
Spule mit Anfangsstrom: $i_L(t) = i_L^+(t) + I_{L_0} s(t)$

Der Spulenstrom setzt sich zusammen aus einem Anteil $i_L^+(t)$, der für $t = 0^-$ Null ist, und dem Anfangswert, der bei $t = 0$ einsetzt. $\Rightarrow \underline{I}_L(s) = \underline{I}_L^+(s) + \frac{I_{L_0}}{s}$

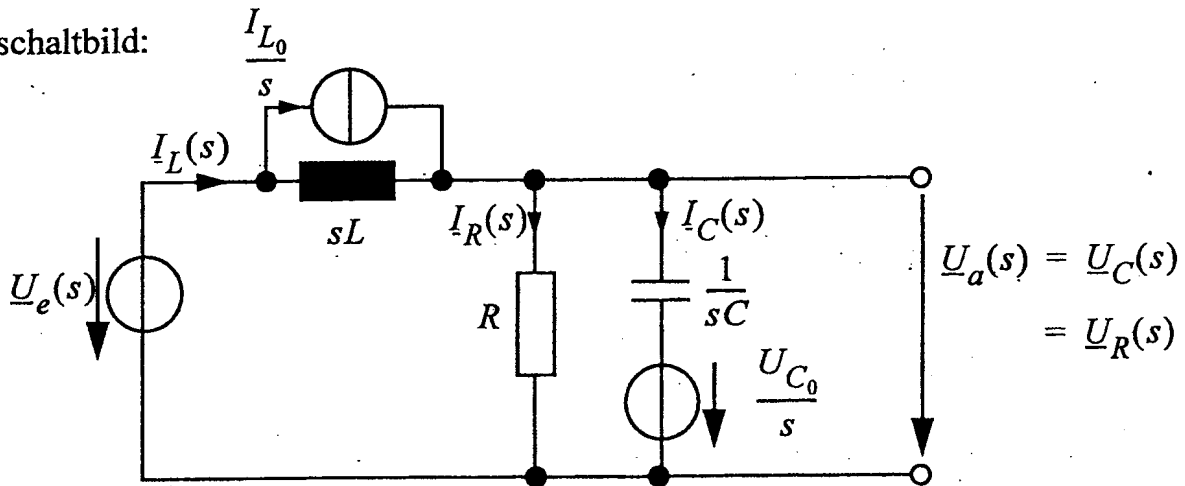
Kondensator mit Anfangsspannung: $u_C(t) = u_C^+(t) + U_{C_0} s(t)$

Die Kondensatorspannung setzt sich zusammen aus einem Anteil $u_C^+(t)$, der für $t = 0^-$ Null ist, und dem Anfangswert, der bei $t = 0$ einsetzt. $\Rightarrow \underline{U}_C(s) = \underline{U}_C^+(s) + \frac{U_{C_0}}{s}$

dem Anfangswert, der bei $t = 0$ einsetzt. $\Rightarrow \underline{U}_C(s) = \underline{U}_C^+(s) + \frac{U_{C_0}}{s}$



\Rightarrow Ersatzschaltbild:



d) $u_a(t)$ setzt sich zusammen aus der Nullzustandsantwort und der Nulleingangsantwort. Die Übertragungsfunktion lässt sich nur aus der Nullzustandsantwort bestimmen. \Rightarrow Anfangswerte = 0:

$$\underline{U}_a(s) \left\{ s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} \right\} = \frac{1}{LC} \cdot \underline{U}_e(s)$$

$$\underline{H}(s) = \frac{\underline{U}_a(s)}{\underline{U}_e(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$$

e) aperiodischer Grenzfall: beide Eigenfrequenzen des Netzwerks stimmen überein! Betrachte Nenner der

Übertragungsfunktion: $N(s) = s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}$

Eigenfrequenzen: $N(s) = 0 \Leftrightarrow s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0$

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

aperiodischer Grenzfall: $\leq 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2RC}\right)^2 = \frac{1}{LC}$

Damit der aperiodische Grenzfall mit der Eigenfrequenz $s_{1,2} = -\frac{1}{2RC}$ eintritt, muss gelten: $L = 4R^2C$.

f) Nullerregungsantwort des Netzwerks:

Betrachte Laplace-transformierte Differentialgleichung aus Aufgabenteil b):

$$\begin{aligned} \underline{U}_a(s) \left\{ s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} \right\} &= \frac{1}{LC} \cdot \underline{U}_e(s) + u_a(0^-) \left(s + \frac{1}{RC} \right) + \dot{u}_a(0^-) \\ &= \left(s + \frac{1}{2RC} \right)^2 \text{ siehe e) } = 0, \text{ da NE-Antwort gesucht} \end{aligned}$$

$$\underline{U}_a^{NE}(s) = \frac{u_a(0^-) \left(s + \frac{1}{RC} \right) + \dot{u}_a(0^-)}{\left(s + \frac{1}{2RC} \right)^2}$$

Bestimme nun $u_a(0^-)$ und $\dot{u}_a(0^-)$ mit Hilfe von Anfangsbedingungen und Netzwerkstruktur:

$$u_a(0^-) = u_a(t=0^-) = u_C(t=0^-) = U_{C_0}$$

$$\dot{u}_a = \dot{u}_C = \frac{i_C}{C} \text{ und } i_C = i_L - i_R = i_L - \frac{u_R}{R} = i_L - \frac{u_a}{R} \Rightarrow \dot{u}_a = \frac{i_L}{C} - \frac{u_a}{RC}$$

$$\dot{u}_a(t=0^-) = \frac{i_L(t=0^-)}{C} - \frac{u_a(t=0^-)}{RC} = \frac{I_{L_0}}{C} - \frac{U_{C_0}}{RC}$$

$$\underline{U}_a^{NE}(s) = \frac{U_{C_0} \left(s + \frac{1}{RC} \right) + \frac{I_{L_0}}{C} - \frac{U_{C_0}}{RC}}{\left(s + \frac{1}{2RC} \right)^2} = \frac{U_{C_0} s + \frac{I_{L_0}}{C}}{\left(s + \frac{1}{2RC} \right)^2}$$

$$u_a^{NE}(t) = ?$$

Residuensatz mit doppelter Nullstelle im Nenner (Polstelle) bei $s_0 = -\frac{1}{2RC}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left[\frac{U_a^{NE}}{s_0} e^{s_0 t}\right] &= \frac{1}{(2-1)!} \cdot \frac{d}{ds} \left[\frac{U_{C_0} s + \frac{I_{L_0}}{C}}{\left(s + \frac{1}{2RC}\right)^2} \cdot e^{st} \cdot \left(s + \frac{1}{2RC}\right)^2 \right] \Bigg|_{s = -\frac{1}{2RC}} \\ &= \frac{d}{ds} \left[U_{C_0} s \cdot e^{st} + \frac{I_{L_0}}{C} \cdot e^{st} \right] \Bigg|_{s = -\frac{1}{2RC}} \\ &= U_{C_0} (e^{st} + s \cdot t \cdot e^{st}) + \frac{I_{L_0}}{C} \cdot t \cdot e^{st} \Bigg|_{s = -\frac{1}{2RC}} \\ &= \left[U_{C_0} + \left(\frac{I_{L_0}}{C} - \frac{U_{C_0}}{2RC} \right) \cdot t \right] \cdot e^{-\frac{t}{2RC}} \end{aligned}$$

$$u_a^{NE}(t) = \left[U_{C_0} + \left(\frac{I_{L_0}}{C} - \frac{U_{C_0}}{2RC} \right) \cdot t \right] \cdot e^{-\frac{t}{2RC}} s(t)$$

g) Die gesamte Antwort des NW ergibt sich aus der Summe der Nullerregungsantwort (siehe f)) und der Nullzustandsantwort.

⇒ Nullzustandsantwort $u_a^{NZ}(t) = ?$

$$\begin{aligned} \text{Erregung: } u_e(t) &= U_0 \cdot s(t) && \text{Sprungerregung} \\ \underline{U}_e(s) &= L\{u_e(t)\} = \frac{U_0}{s} \end{aligned}$$

⇒ Mit aperiodischem Grenzfall (siehe e)):

$$\begin{aligned} \underline{U}_a^{NZ}(s) &= \underline{H}(s) \cdot \underline{U}_e(s) \\ &= \frac{\frac{1}{LC}}{\left(s + \frac{1}{2RC}\right)^2} \cdot \frac{U_0}{s} \quad \bullet \rightarrow \quad u_a^{NZ}(t) = ? \end{aligned}$$

Residuensatz mit einfacher Polstelle $s_0 = 0$ und doppelter Polstelle

$$s_1 = -\frac{1}{2RC}$$

• $s_0 = 0$

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[\underline{U}_a^{NZ}(s_0) e^{s_0 t} \right] &= \frac{1}{(1-1)!} \cdot \frac{d^0}{ds^0} \left\{ \frac{U_0}{LC} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1 \cdot e^{st}}{\left(s + \frac{1}{2RC}\right)^2} \cdot (s-0) \right\} \Big|_{s=0} \\ &= \frac{U_0}{LC} \cdot 4R^2 C^2 \quad \text{mit Ergebnis aus e))} \\ &= U_0 \end{aligned}$$

• $s_1 = -\frac{1}{2RC}$

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[\underline{U}_a^{NZ}(s_1) e^{s_1 t} \right] &= \frac{1}{(2-1)!} \cdot \frac{d}{ds} \left\{ \frac{U_0}{LC} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{e^{st}}{\left(s + \frac{1}{2RC}\right)^2} \cdot \left(s + \frac{1}{2RC}\right)^2 \right\} \Big|_{s=-\frac{1}{2RC}} \\ &= \frac{U_0}{LC} \cdot \frac{te^{st} s - e^{st}}{s^2} \Big|_{s=-\frac{1}{2RC}} \\ &= \frac{U_0}{LC} \cdot 4R^2 C^2 \left(t \left(-\frac{1}{2RC} \right) - 1 \right) e^{-\frac{t}{2RC}} \\ &= -U_0 \left(1 + \frac{t}{2RC} \right) e^{-\frac{t}{2RC}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_a^{NZ}(t) = U_0 \left\{ 1 - \left(1 + \frac{t}{2RC} \right) e^{-\frac{t}{2RC}} \right\} s(t)$$

$$u_a(t) = u_a^{NE}(t) + u_a^{NZ}(t)$$

$$u_a(t) = \left\{ \left[U_{C0} + \left(\frac{I_{L0}}{C} - \frac{U_{C0}}{2RC} \right) t \right] + U_0 \left[1 - \left(1 + \frac{t}{2RC} \right) \right] \right\} e^{-\frac{t}{2RC}} s(t)$$

h) $\lim_{t \rightarrow \infty} u_a(t) = ?$ 2 Lösungswege möglich:

1) anschaulich:

- Nullerregungsantwort klingt mit zunehmender Zeit, im Unendlichen bis auf Null ab, da die anfangs gespeicherte Energie in Spule (I_{L0}) und Kondensator (U_{C0}) im ohmschen Widerstand R in Wärme umgesetzt wird.
 - die Nullzustandsantwort nähert sich mit zunehmender Zeit dem Erregungswert U_0 , da nach anfänglichem Einschwingen beim Einschalten die Spannungsquelle $u_e(t)$ als ideale Gleichspannungsquelle betrachtet werden kann, die als unendlich lange eingeschaltet angesehen werden kann.
- ⇒ Spule: Kurzschluß
 ⇒ Kondensator: Leerlauf
 ⇒ Gesamte Spannung fällt über dem Widerstand R ab

$$\begin{aligned} \sum : \lim_{t \rightarrow \infty} u_a(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} u_a^{NE}(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} u_a^{NZ}(t) \\ &= 0 + U_0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} u_a(t) &= U_0 \end{aligned}$$

2) Endwertsatz der L-Transformation: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$

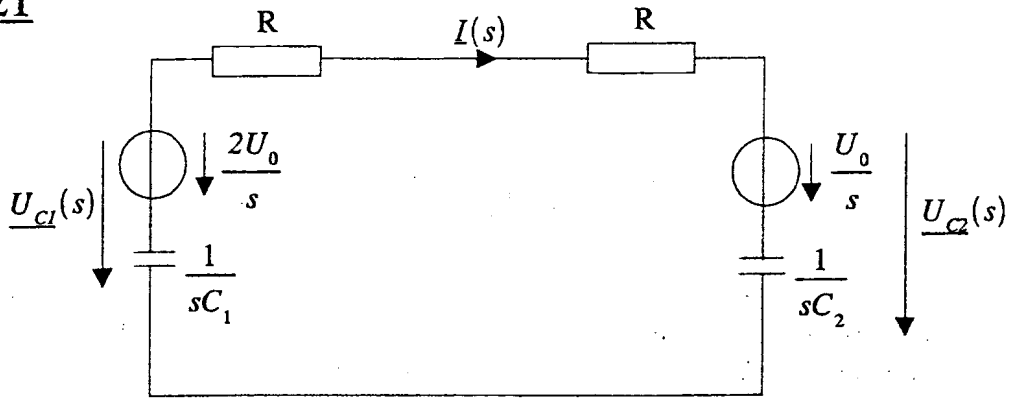
$$\begin{aligned} \underline{U}_a(s) &= \underline{U}_a^{NE}(s) + \underline{U}_a^{NZ}(s) \\ &= \frac{u_a(0^-) \left(s + \frac{1}{RC} \right) + \dot{u}_a(0^-)}{\left(s + \frac{1}{2RC} \right)^2} + \frac{U_0}{LC} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2RC} \right)^2} \frac{1}{s} \quad \text{siehe f) und g)} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} u_a(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} (\underline{U}_a(s) \cdot s) \\ &= s \frac{u_a(0^-) \left(s + \frac{1}{RC} \right) + \dot{u}_a(0^-)}{\left(s + \frac{1}{2RC} \right)^2} + \frac{U_0}{LC} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2RC} \right)^2} \Big|_{s=0} \\ &= 0 + \frac{U_0}{LC} \cdot 4R^2 C^2 \quad \text{mit Ergebnis aus e)} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} u_a(t) &= U_0 \end{aligned}$$

Aufgabe 21

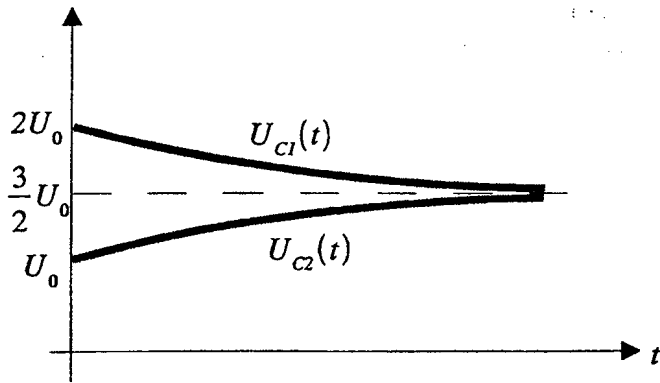
- a) Es sind C_1 und C_2 für $t > 0$ keine unabhängigen Energiespeicher
 → NW ist 1. Ordnung

Aufgabe 21

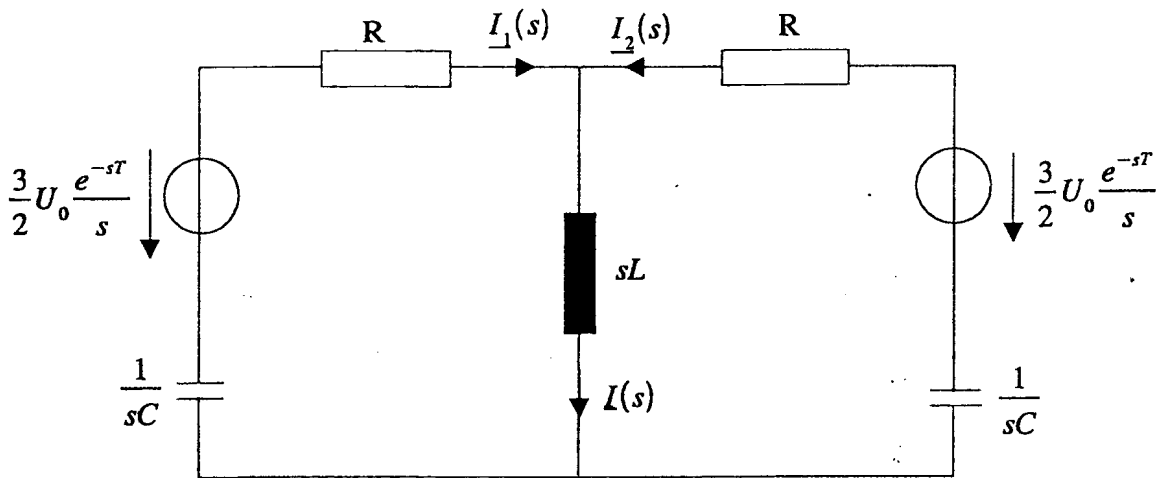
b)



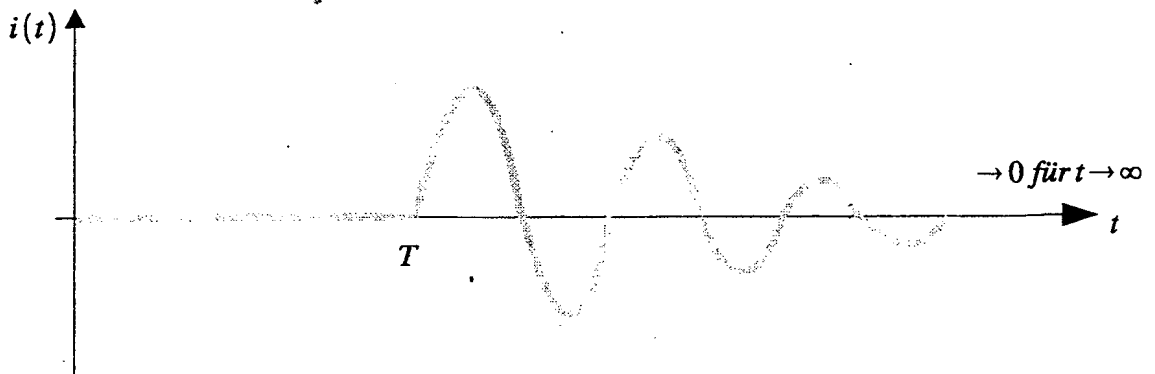
zu d)



f)



zu g)



Aufgabe 21

c)

$$-\frac{2U_0}{s} + 2RI(s) + \frac{U_0}{s} + \underline{I}(s) \left(\frac{1}{sC} + \frac{1}{sC} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\underline{U}_{c1}(s) = -\underline{I}(s) \cdot \frac{1}{sC} + \frac{2U_0}{s} \quad (2)$$

$$\underline{U}_{c2}(s) = \underline{I}(s) \cdot \frac{1}{sC} + \frac{U_0}{s} \quad (3)$$

aus (1): $\underline{I}(s) \cdot \left[2R + \frac{2}{sC} \right] = \frac{U_0}{s}$ dann:

$$\underline{I}(s) = \frac{U_0}{2} \cdot \frac{C}{sRC + 1}$$

$$\Rightarrow \underline{U}_{c1}(s) = -\frac{U_0}{2s} \cdot \frac{1}{sRC + 1} + \frac{2U_0}{s}$$

$$\underline{U}_{c2}(s) = \frac{U_0}{2s} \cdot \frac{1}{sRC + 1} + \frac{U_0}{s}$$

zu zeigen: $U_{c1}(0^-) = 2U_0 = U_{c1}(0^+)$; $U_{c2}(0^-) = U_0 = U_{c2}(0^+)$
Anfangswertsatz der Laplace-Transformation:

$$U_{c1}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \underline{U}_{c1}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} -\frac{U_0}{2} \cdot \frac{1}{sRC + 1} + 2U_0 = 2U_0$$

$$U_{c2}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \underline{U}_{c2}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{U_0}{2} \cdot \frac{1}{sRC + 1} + U_0 = U_0$$

Endwertsatz der Laplace-Transformation:

$$U_{c1}(T \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \underline{U}_{c1}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{U_0}{2(sRC + 1)} + 2U_0 = \frac{3}{2}U_0$$

$$U_{c2}(T \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \underline{U}_{c2}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} +\frac{U_0}{2(sRC + 1)} + U_0 = \frac{3}{2}U_0$$

d) mit Erg. aus c):

$$\underline{U}_{c1}(s) = U_0 \left[\frac{2}{s} - \frac{1}{2s} \cdot \frac{1/RC}{s + 1/RC} \right]$$

$$u_{c1}(t) = U_0 \left[2 \cdot s(t) - \frac{1}{2RC} \cdot \int_0^t e^{-1/RC \cdot t} dt \right]$$

$$= U_0 \left[2 \cdot s(t) + \frac{1}{2} \cdot (e^{-1/RC \cdot t} - 1) \cdot s(t) \right]$$

$$u_{c1}(t) = \underline{\underline{\frac{U_0}{2} \cdot [3 + e^{-1/RC \cdot t}] \cdot s(t)}}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{c2}(s) &= U_0 \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{2s} \cdot \frac{1/RC}{s + 1/RC} \right] \\ u_{c2}(t) &= U_0 \left[s(t) + \frac{1}{2RC} \cdot \int_0^t e^{-1/RC \cdot t} dt \right] \\ &= U_0 \left[s(t) - \frac{1}{2} \cdot (e^{-1/RC \cdot t} - 1) \cdot s(t) \right] \\ u_{c2}(t) &= \underline{\underline{\frac{U_0}{2} \cdot [3 - e^{-1/RC \cdot t}] \cdot s(t)}}$$

e) Aus Energiebilanz

$$\begin{aligned}Q &= \Delta W = W(t < 0) - W(t \rightarrow \infty) \\ &= \frac{1}{2} C (U_0^2 + 4U_0^2) - 2 \cdot \frac{1}{2} C \frac{9}{4} U_0^2 \\ Q &= \left(\frac{10}{4} - \frac{9}{4} \right) C U_0^2 = \underline{\underline{\frac{1}{4} C U_0^2}}\end{aligned}$$

g)

$$\underline{I}(s) = \underline{I}_1(s) + \underline{I}_2(s) \quad (4)$$

$$\underline{I}(s) \cdot sL + \underline{I}_1(s) \left[R + \frac{1}{sC} \right] - \frac{3}{2} \cdot \frac{U_0}{s} \cdot e^{-sT} = 0 \quad (5)$$

$$\underline{I}(s) \cdot sL + \underline{I}_2(s) \left[R + \frac{1}{sC} \right] - \frac{3}{2} \cdot \frac{U_0}{s} \cdot e^{-sT} = 0 \quad (6)$$

$$(5) + (6) \quad 2\underline{I}(s) \cdot sL + \underline{I}(s) \left[R + \frac{1}{sC} \right] - 3 \frac{U_0}{s} \cdot e^{-sT} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{I}(s) = \frac{3U_0}{2L} \cdot \frac{1}{s^2 + s \frac{R}{2L} + \frac{1}{2LC}} e^{-sT}$$

h) Rücktrafo $\underline{I}(s) \bullet \text{---} \circ i(t)$:

1. Möglichkeit: konventioneller Weg

Pole von $\underline{I}(s) = ?$

$$\text{dazu } s^2 + s \cdot \frac{R}{2L} + \frac{1}{2LC} = 0$$

$$\Leftrightarrow s_{1/2} = -\frac{R}{4L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{16L^2} - \frac{1}{2LC}} = -\frac{R}{4L} \pm j \cdot \sqrt{\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2}}$$

<0 wegen schwachgedämpfter Schwingung

Partialbruchzerlegung: von $\underline{I}'(s) = \underline{I}(s) \cdot e^{-sT}$

$$\begin{aligned}\underline{I}'(s) &= \frac{A}{(s - (-\frac{R}{4L} - j\sqrt{\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2}}))} + \frac{B}{(s - (-\frac{R}{4L} + j\sqrt{\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2}}))} \\ &= \frac{A \cdot (s + \frac{R}{4L} - j\sqrt{\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2}}) + B \cdot (s + \frac{R}{4L} + j\sqrt{\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2}})}{s^2 + s \cdot \frac{R}{2L} + \frac{1}{2LC}} \\ &= \frac{\frac{3U_0}{2L}}{s^2 + s \cdot \frac{R}{2L} + \frac{1}{2LC}}\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$s^1: A + B = 0 \rightsquigarrow A = -B$$

$$s^0: \frac{R}{4L} \cdot (A + B) + j \cdot \sqrt{\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2}} \cdot (-A + B) = \frac{3U_0}{2L}$$

$$\Rightarrow B = -A = \frac{3U_0}{4L} \cdot \left(j \sqrt{\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2}} \right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \underline{I}'(s) = \frac{3U_0}{4L} \cdot \frac{1}{j \sqrt{\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2}}} \cdot \left\{ \frac{1}{s + \frac{R}{4L} + j \sqrt{\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2}}} + \frac{1}{s + \frac{R}{4L} - j \sqrt{\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2}}} \right\}$$

$$\Rightarrow i'(t) = \frac{3U_0}{2L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2}}} \cdot e^{-\frac{R}{4L}t} \cdot \frac{1}{2j} \cdot \left\{ e^{j \sqrt{\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2}}t} - e^{-j \sqrt{\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2}}t} \right\} \cdot s(t)$$

$$i'(t) = \frac{3U_0}{2L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2}}} \cdot e^{-\frac{R}{4L}t} \cdot \sin \left(\sqrt{\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2}} \cdot t \right) \cdot s(t)$$

Berücksichtigung von e^{-sT} verlangt von satz der Zeitverschiebung:

$$\underline{I}(s) = \underline{I}'(s) \cdot e^{-sT} \quad \bullet \text{---} \circ \quad i(t) = i'(t - T)$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{3U_0}{2L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2}}} \cdot e^{-\frac{R}{4L}(t-T)} \cdot \sin \left(\sqrt{\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2}} \cdot (t - T) \right) \cdot s(t - T)$$

2. Möglichkeit:

Umschreiben des Nenners von $\underline{I}(s)$:

$$s^2 + s \cdot \frac{R}{2L} + \frac{1}{2LC} = s^2 + 2 \cdot s \cdot \frac{R}{4L} + \frac{R^2}{16L^2} - \frac{R^2}{16L^2} + \frac{1}{2LC}$$

$$= \left(s + \frac{R}{4L} \right)^2 + \left(\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2} \right)$$

somit:

$$\underline{I}(s) = \frac{3U_0}{2L} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{R}{4L} \right)^2 + \left(\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2} \right)} \cdot e^{-sT}$$

Schwachgedämpfte Schwingung \rightsquigarrow sin oder cos!

wissen: $\sin(\beta t) \cdot s(t) \quad \bullet \text{---} \circ \quad \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$

angewendet auf $\underline{I}(s)$: $s^2 \rightsquigarrow \left(s + \frac{R}{4L} \right)^2$

$$\beta^2 \rightsquigarrow \left(\sqrt{\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2}} \right)^2$$

$$\Rightarrow \underline{I}(s) = \frac{3U_0}{2L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2}}}{\left(s + \frac{R}{4L}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2}}\right)^2} \cdot e^{-sT}$$

$$i(t) = \frac{3U_0}{2L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2}}} \cdot e^{-\frac{R}{4L} \cdot (t-T)} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2}} \cdot (t-T)\right) \cdot s(t-T)$$

Theoretische Elektrotechnik II

8. Aufgabenblatt

Aufgabe 22: Laplace-Transformation

Ein Parallelschwingkreis sei schon seit geraumer Zeit an einer Konstantstromquelle angeschlossen (vgl. Bild 22.1).

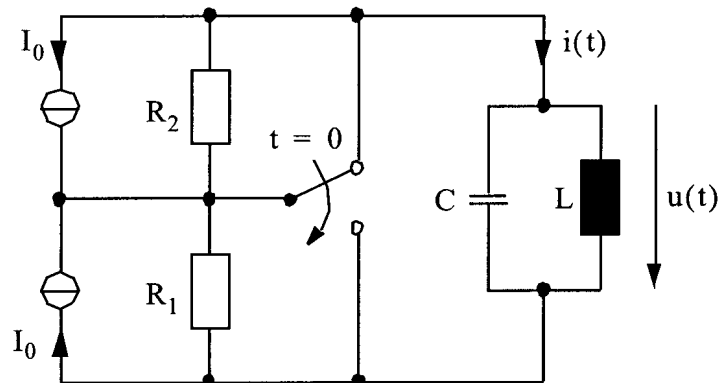


Bild 22.1 Parallelschwingkreis mit zwei Konstantstromquellen

Zur Zeit $t = 0$ wird auf eine zweite Konstantstromquelle mit gleichem Betrag, aber umgekehrter Stromrichtung umgeschaltet.

- Geben Sie $u(0^-)$, $i(0^-)$, $u(\infty)$, $i(\infty)$ an.
- Geben Sie das Laplace-Ersatzschaltbild für Zeiten $t \geq 0$ an.
- Ermitteln Sie die gebrochen-rationale Funktion $\underline{U}(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$.
- Welcher Zusammenhang ergibt sich für $\underline{I}(s) = \mathcal{L}\{i(t)\}$?
- Geben Sie die Spannung $u(0^+)$ und den Strom $i(0^+)$, d.h. unmittelbar nach dem Umschalten an. Welche Beziehung verwenden Sie vorteilhaft?
- Berechnen Sie $i(t)$ für Zeiten $t \geq 0$ für den Fall schwacher Dämpfung. Skizzieren Sie $i(t)$ für alle Zeiten t .
- Geben Sie den gesamten Energieverbrauch im Widerstand R_2 für den Fall kritischer Dämpfung an.

Aufgabe 23: Laplace-Transformation

Gegeben ist eine Brückenschaltung aus den Ohmwiderständen R_1 , R_2 , der Spule L mit dem Wicklungswiderstand R_L und dem Kondensator C (s. Bild 23.1).

Die Eingangsspannung $u_0(t)$ stammt von einer idealen Spannungsquelle. Zum Zeitpunkt $t = 0^-$ fließt der Strom I_{L0} durch die Spule L und die Spannung U_{C0} liegt am Kondensator C an.

Gesucht ist der zeitliche Verlauf der Ausgangsspannung $u_a(t)$ an den Klemmen der Brückendiagonalen.

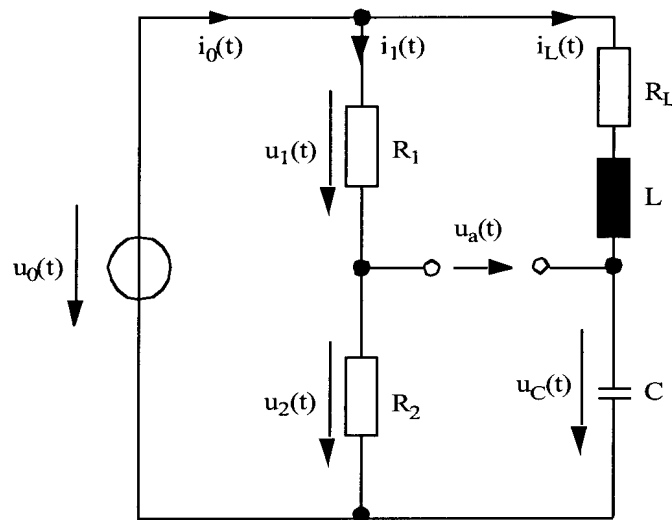


Bild 23.1 Brückenschaltung

- Zeichnen Sie das Laplace-Ersatzschaltbild der Schaltung mit allen Bauelementen. Berücksichtigen Sie dabei die Anfangswerte.
- Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $\underline{U}_C(s)$ der Spannung $u_C(t)$ in Abhängigkeit von der Laplace-Transformierten $\underline{U}_0(s)$ der Eingangsspannung, den Bauelementgrößen und den Anfangswerten. Trennen Sie dabei in Nullzustands- und Nulerregungsantwort.

c) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $\underline{H}(s) = \frac{\underline{U}_a(s)}{\underline{U}_0(s)}$.

- d) Kann die Brücke für $s = j\omega_0$ abgeglichen werden, d.h. kann $\underline{U}_a(s)$ für eine stationäre, periodische Erregung Null werden? Begründen Sie ihre Überlegung.

Im folgenden werden für die Berechnung normierte Größen verwendet. Bei geeigneter Wahl der Bauelementgrößen ergibt sich die Übertragungsfunktion aus Aufgabenteil c) zu:

$$\underline{H}(s) = \frac{1}{2} - \frac{2}{s^2 + 2 \cdot s + 2}$$

- e) Wie lautet die Nullzustandsantwort des Netzwerkes auf einen normierten Spannungssprung $u_0(t) = s(t)$?

Aufgabe 24: Z-Transformation

Stellen Sie die untenstehenden Folgen im Originalbereich grafisch dar, berechnen Sie jeweils deren Z-Transformierte und bestimmen Sie außerdem den jeweiligen Konvergenzbereich. Geben Sie den Konvergenzbereich als formalen Ausdruck an und veranschaulichen Sie ihn grafisch in der z-Ebene.

a) Einheitsimpuls: $x_\mu = \delta_\mu = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

b) Sprungfolge: $x_\mu = s_\mu = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

c) Rechtsseitige Exponentialfolge: $x_\mu = s_\mu \cdot a^\mu$

d) Beidseitige Exponentialfolge: $x_\mu = a^{|\mu|}$, welche Bedingung muß a hier erfüllen, damit die Z-Transformierte überhaupt existiert?

e) Rechtsseitige Sinusfunktion: $x_\mu = s_\mu \cdot \sin(\mu\omega_0)$

f) Rampenfolge: $x_\mu = s_\mu \cdot \mu$

Theoretische Elektrotechnik II, Musterlösung

Aufgabe 22: Laplace-Transformation: a)

$t = 0^- \Rightarrow$ Annahme: Konstantstromquelle liegt schon unendlich lang

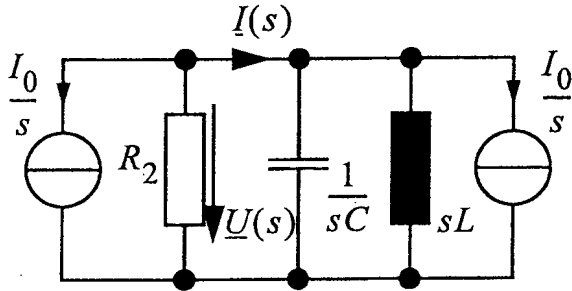
an Schwingkreis an \Rightarrow alle Ausgleichsvorgänge abgeschlossen!

\Rightarrow Kondensator: Leerlauf; Spule: Kurzschluss

$$u(0^-) = 0 \quad i(0^-) = I_0$$

$$t \rightarrow \infty \text{ analog zu oben: } u(\infty) = 0 \quad i(\infty) = -I_0$$

b) $t \geq 0$, d.h. für Spule: es existiert ein Anfangsstrom $i(0^-) = I_0$, der berücksichtigt werden muss!



c)

$$\underline{U}(s) = L\{u(t)\}$$

$$\underline{U}(s) = -2 \cdot \frac{I_0}{s} \cdot \underline{Z}(s) \quad \text{mit } \underline{Z}(s) = R_2 \parallel \frac{1}{sC} \parallel sL = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + sC + \frac{1}{sL}} = \frac{1}{sL + s^2 LCR_2 + R_2}$$

$$= \frac{sLR_2}{sL + s^2 LCR_2 + R_2}$$

$$\underline{U}(s) = -2 \cdot \frac{I_0}{C} \cdot \frac{1}{s^2 + s \frac{1}{R_2 C} + \frac{1}{LC}}$$

d)

$$\underline{I}(s) = L\{i(t)\} = -\frac{I_0}{s} - \frac{\underline{U}(s)}{R_2} = -\frac{I_0}{s} + 2 \cdot \frac{I_0}{R_2 C} \cdot \frac{1}{s^2 + s \frac{1}{R_2 C} + \frac{1}{LC}}$$

$$\underline{I}(s) = I_0 \left(\frac{2}{R_2 C} \cdot \frac{1}{s^2 + s \frac{1}{R_2 C} + \frac{1}{LC}} - \frac{1}{s} \right)$$

e) Ausnutzen des Anfangswertsatzes der Laplace-Transformation:

$$u(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0} u(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \underline{U}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(-2 \cdot \frac{I_0}{C} \cdot \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{sR_2 C} + \frac{1}{s^2 LC}} \right) = 0$$

$$i(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0} i(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \underline{I}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} I_0 \left(\frac{2}{R_2 C} \cdot \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{sR_2 C} + \frac{1}{s^2 LC}} - 1 \right) = -I_0$$

f) Umschreiben des Nenners von $I(s)$:

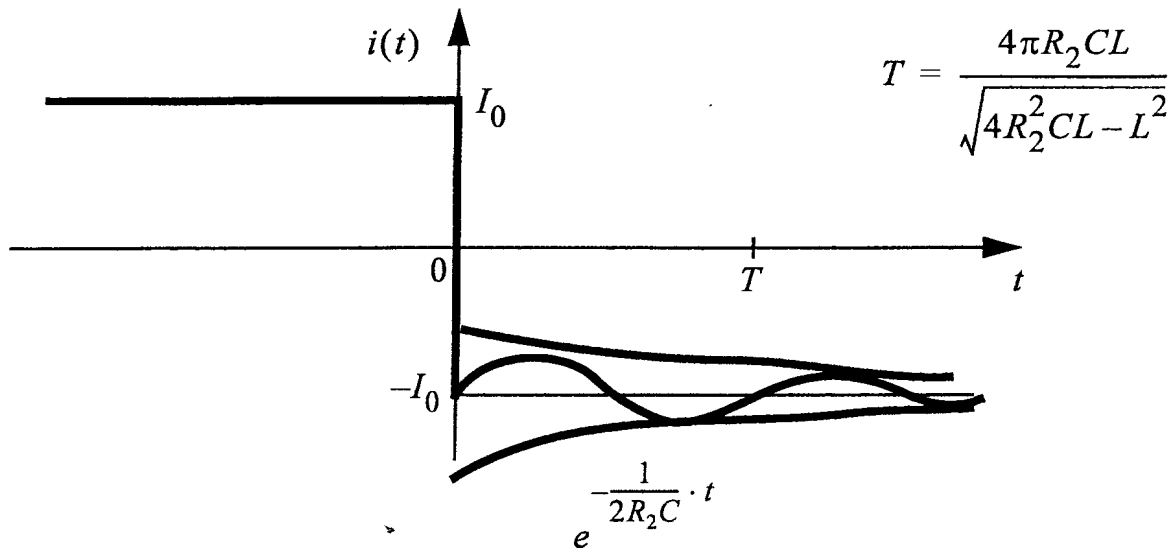
$$s^2 + s \frac{1}{R_2 C} + \frac{1}{LC} = s^2 + 2s \frac{1}{2R_2 C} + \left(\frac{1}{2R_2 C}\right)^2 - \left(\frac{1}{2R_2 C}\right)^2 + \frac{1}{LC}$$

$$= \left(s + \frac{1}{2R_2 C}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2R_2 C}\right)^2}\right)^2 \quad \frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2R_2 C}\right)^2 > 0 \text{ wegen schwacher Dämpfung}$$

$$I(s) = I_0 \left[\frac{2}{R_2 C} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2R_2 C}\right)^2}}{\left(s + \frac{1}{2R_2 C}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2R_2 C}\right)^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2R_2 C}\right)^2}} - \frac{1}{s} \right]$$

$$i(t) = I_0 s(t) \left[\frac{2}{\sqrt{\frac{R_2^2 C^2}{LC} - \frac{R_2^2 C^2}{4R_2^2 C^2}}} \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R_2^2 C^2}} \cdot t\right) \cdot e^{-\frac{1}{2R_2 C} \cdot t} - 1 \right]$$

$$i(t) = I_0 \left[\frac{4L}{\sqrt{4R_2^2 CL - L^2}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R_2^2 C^2}} \cdot t\right) \cdot e^{-\frac{1}{2R_2 C} \cdot t} - 1 \right] s(t)$$



g)

$$W = \frac{1}{R_2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt \quad u(t) \text{ --- } \bullet \underline{U}(s) \quad \text{hier: kritische Dämpfung!}$$

$$\text{Nenner von } \underline{U}(s): s^2 + s \frac{1}{R_2 C} + \frac{1}{LC} = \left(s + \frac{1}{2R_2 C}\right)^2 \text{ mit } LC = 4R_2^2 C^2$$

$$\underline{U}(s) = -2 \cdot \frac{I_0}{C} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2R_2 C}\right)^2} \quad \bullet \text{ --- } \circ \quad u(t) = -2 \cdot \frac{I_0}{C} \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{2R_2 C} \cdot t} s(t)$$

$$u^2(t) = 4 \cdot \frac{I_0^2}{C^2} \cdot t^2 \cdot e^{-\frac{1}{R_2 C} \cdot t} s^2(t)$$

$$W = \frac{4I_0^2}{C^2 R_2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot e^{-\frac{1}{R_2 C} \cdot t} s(t) dt = \frac{4I_0^2}{C^2 R_2} \cdot \int_0^{\infty} t^2 \cdot e^{-\frac{1}{R_2 C} \cdot t} dt$$

$$= \frac{4I_0^2}{C^2 R_2} \left\{ \underbrace{-t^2 R_2 C \cdot e^{-\frac{1}{R_2 C} \cdot t}}_0 \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2t R_2 C e^{-\frac{1}{R_2 C} \cdot t} dt \right\}$$

= 0

$$= \frac{4I_0^2}{C^2 R_2} \left\{ \underbrace{2R_2 C \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{R_2 C} \cdot t}}_0 \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} R_2 C e^{-\frac{1}{R_2 C} \cdot t} dt \right\}$$

= 0

$$= \frac{8I_0^2}{C^2 R_2} R_2^2 C^2 \left(-R_2 C \cdot e^{-\frac{1}{R_2 C} \cdot t} \Big|_0^{\infty} \right) = 8I_0^2 R_2^2 \cdot 1 \cdot C$$

$$W = 8I_0^2 R_2^2 C$$

Aufgabe 23 Laplace-Transformation

b)

$$\begin{aligned}
 \underline{u}_c(s) &= L\{u_C(t)\} \\
 \underline{u}_c(s) &= \frac{U_{C0}}{s} + \underline{I}_L(s) \frac{1}{sC} \quad (*) \\
 \underline{u}_c(s) - \frac{U_{C0}}{s} &= \underline{I}_L(s) \left[R_L + \frac{1}{sC} + sL \right] - \frac{I_0}{s} sL \\
 \Leftrightarrow \underline{I}_L(s) &= \frac{\underline{U}_0(s) - \frac{U_{C0}}{s} + I_0 L}{R_L + \frac{1}{sC} + sL} = \frac{\underline{U}_0(s) - \frac{U_{C0}}{s} + I_0 L}{\frac{1}{sC} (s^2 LC + sCR_L + 1)} \\
 \text{in } (*): \underline{U}_c(s) &= \frac{U_{C0}}{s} + \frac{\underline{U}_0(s) - \frac{U_{C0}}{s} + I_0 L}{s^2 LC + sCR_L + 1} \\
 &= \frac{U_{C0} s LC + U_{C0} R_L C + \frac{U_{C0}}{s} - \frac{U_{C0}}{s} + I_0 L + \underline{U}_0(s)}{s^2 LC + sCR_L + 1} \\
 &= \frac{U_{C0} s - U_{C0} \frac{R_L}{L} + \frac{I_0}{C} + \frac{\underline{U}_0(s)}{LC}}{s^2 + s \frac{R_L}{L} + \frac{1}{LC}} \\
 \underline{U}_c(s) &= \underbrace{\underline{U}_0(s) \cdot \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + s \frac{R_L}{L} + \frac{1}{LC}}}_{\text{NZ-Antwort}} + \underbrace{\frac{\frac{I_0}{C} + U_{C0} \left(s + \frac{R_L}{L} \right)}{s^2 + s \frac{R_L}{L} + \frac{1}{LC}}}_{\text{NE-Antwort}}
 \end{aligned}$$

c)

$$\underline{H}(s) = \frac{\underline{U}_a(s)}{\underline{U}_0(s)}$$

Da Übertragungsfunktion gesucht, werden die Anfangswerte auf Null gesetzt, d.h. NE-Antwort = 0.

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_a(s) + \underline{U}_C(s) - \underline{U}_0(s) &= 0 \quad (\text{Maschenumlauf}) \\
 \underline{U}_a(s) &= \underline{U}_2(s) - \underline{U}_C(s) \quad \text{mit } \underline{U}_2(s) = \frac{R_2}{R_2 + R_1} \cdot \underline{U}_0(s) \\
 &= \frac{R_2}{R_2 + R_1} \cdot \underline{U}_0(s) - \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + s \frac{R_L}{L} + \frac{1}{LC}} \cdot \underline{U}_0(s) \\
 \Rightarrow \underline{H}(s) &= \frac{R_2}{R_2 + R_1} - \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + s \frac{R_L}{L} + \frac{1}{LC}}
 \end{aligned}$$

d) Nein, denn: $\underline{H}(j\omega) \equiv 0$ liefert:

$$\begin{aligned}
 \frac{R_2}{R_2 + R_1} &= \frac{\frac{1}{LC}}{-\omega_0^2 + j\omega_0 + \frac{1}{LC}} \\
 \Leftrightarrow -\omega_0^2 R_2 + j\omega_0 R_2 + \frac{R_2}{LC} &= \frac{R_2}{LC} + \frac{R_1}{LC} \\
 \text{Re: } R_1 + R_2 \omega_0^2 LC &= 0 \\
 \text{Im: } \omega_0 R_2 &= 0
 \end{aligned}$$

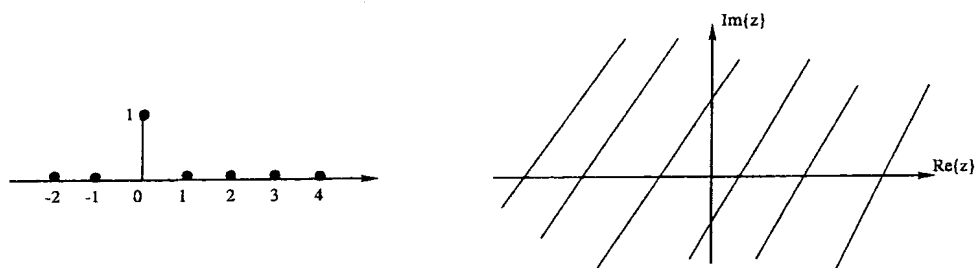


Fig. 1.

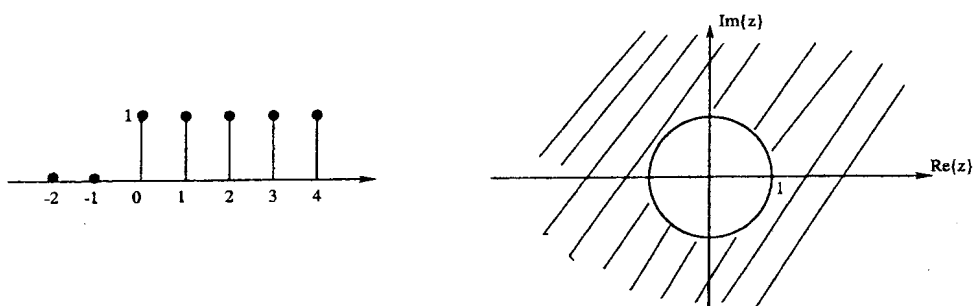


Fig. 2.

Aufgabe 24 Z-Transformation

a) Einheitsimpuls:

$$x_\mu = \delta_\mu = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = 0 \\ 0 & \text{Sonst} \end{cases}$$

$$\underline{\mathbf{X}}(z) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} x_\mu \cdot z^{-\mu} = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \delta_\mu \cdot z^{-\mu} = 1 \cdot z^{-0} = 1$$

$$\underline{\mathbf{X}}(z) = 1 \text{ konvergiert } \forall z$$

b) Sprungfolge:

$$x_\mu = s_\mu = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu \geq 0 \\ 0 & \text{Sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{X}}(z) &= \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} s_\mu \cdot z^{-\mu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-\mu} \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty} (z^{-1})^\mu = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \end{aligned}$$

$$\underline{\mathbf{X}}(z) = \frac{z}{z - 1}$$

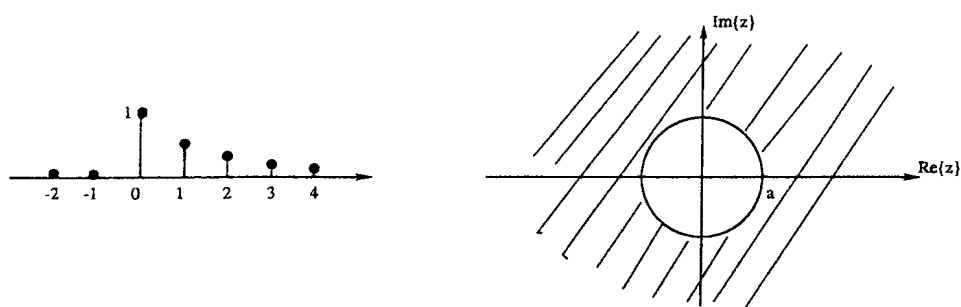


Fig. 3.

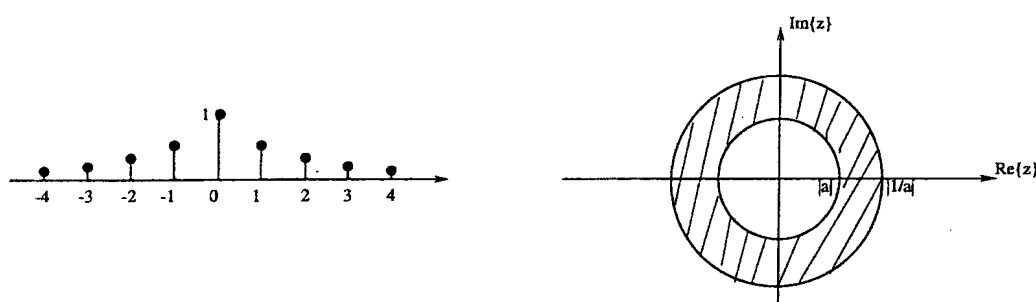


Fig. 4.

Konvergenzbereich: aus Bedingung für die Anwendung der geom. Summenformel
folgt: $\left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$

c) Rechtsseitige Exponentialfolge: $x_\mu = s_\mu \cdot a^\mu$

$$\underline{X}(z) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} s_\mu \cdot a^\mu \cdot z^{-\mu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^\mu$$

$$\underline{X}(z) = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a}$$

Konvergenzbereich: $\left|\frac{a}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > |a|$

d) Beidseitige Exponentialfolge: $x_\mu = a^{|\mu|}$

$$\underline{X}(z) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} a^{|\mu|} \cdot z^{-\mu} = \sum_{\mu=-\infty}^0 a^{-\mu} \cdot z^{-\mu} + \sum_{\mu=1}^{\infty} a^\mu \cdot z^{-\mu}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} (a \cdot z)^\mu + \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^\mu - \left(\frac{a}{z}\right)^0$$

$$= \frac{1}{1 - a \cdot z} + \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} - 1$$

$$\underline{X}(z) = \frac{z \cdot (1 - a^2)}{(1 - a \cdot z) \cdot (z - a)}$$

Im und Re sind für kein ω_0 vereinbar \Rightarrow hierfür nicht abgleichbar!

e)

$$u_0(t) = s(t) \quad \circ \bullet \quad \underline{U}_0(s) = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \underline{U}_a^{NZ}(s) = \underline{H}(s) \cdot \underline{U}_0(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{\frac{1}{2}s^2 + s - 1}{((s+1)^2 + 1)s}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{\frac{1}{2}s^2 + s - 1}{((s+1)^2 + 1)s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s+1)^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}s^2 + s - 1 = A(s^2 + 2s + 2) + Bs^2 + Cs$$

Koeffizientenvergleich:

$$s^0: \quad -1 = 2A \quad \rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$s^1: \quad 1 = 2A + C \quad \rightarrow C = 2$$

$$s^2: \quad \frac{1}{2} = A + B \quad \rightarrow B = 1$$

$$\Rightarrow \underline{U}_a(s) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} + \frac{1}{(s+1)^2 + 1}$$

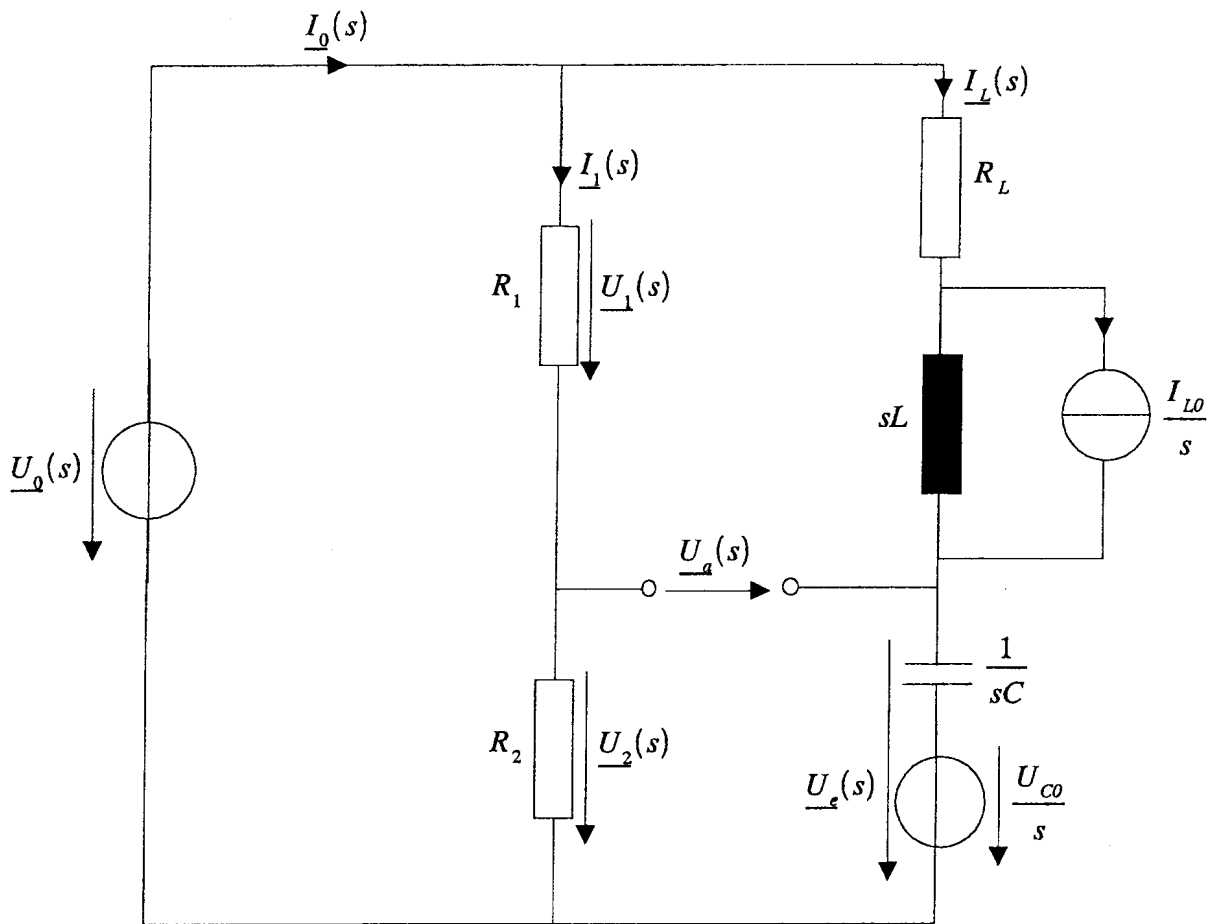
$$\bullet$$

$$|$$

$$\circ$$

$$u_a^+(t) = \left[-\frac{1}{2} + (\cos t + \sin t) \cdot e^{-t} \right] \cdot s(t)$$

Aufgabe 23 a)



Theoretische Elektrotechnik II

9. Aufgabenblatt

Aufgabe 25: Untersuchung eines nichtrekursiven, digitalen Filters

Das sogenannte nichtrekursive, digitale Filter (siehe Bild 25.1) besteht aus N in Kette geschalteten Verzögerungsgliedern und einem Addierer.

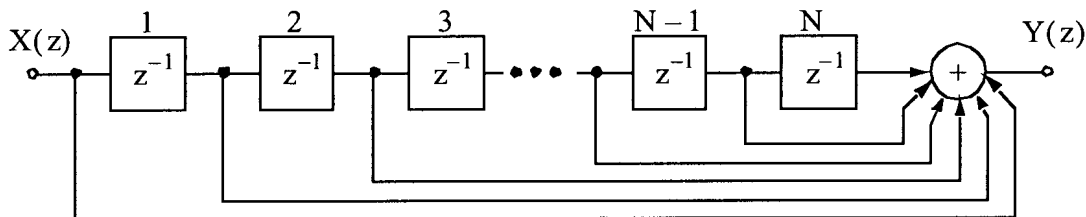


Bild 25.1 Nichtrekursives, digitales Filter

- Wie lautet die Übertragungsfunktion $H(z) = Y(z)/X(z)$ des Filters?
- Geben Sie $H(z)$ als rationale Funktion an, indem Sie die Summenformel für die geometrische Reihe benutzen.
- Bestimmen Sie die Differenzgleichung des digitalen Filters nach Bild 25.1.
- Zeigen Sie, daß auch die Vierpole in Bild 25.2 und in Bild 25.3 die Übertragungsfunktion $H(z)$ besitzen.

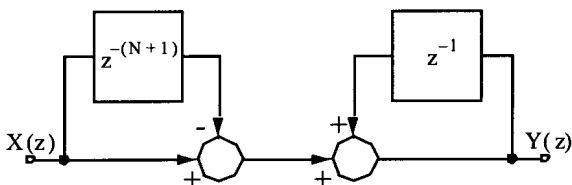


Bild 25.2 Vierpol 1

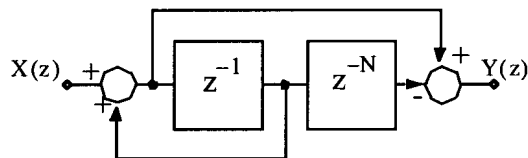


Bild 25.3 Vierpol 2

- Worin liegt der grundsätzliche, strukturelle Unterschied zwischen dem Filter aus Bild 25.1 und den beiden anderen Filtern?

Aufgabe 26: Z-Rücktransformation und Z-Transformations-Theoreme

- Gegeben ist die Z-Transformierte von $x(\mu)$ zu $X(z) = \frac{z \cdot (z - \cos \omega_0)}{z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos \omega_0 + 1}$ mit dem Konvergenzbereich von $|z| > 1$. Bestimmen Sie mittels Partialbruchzerlegung die Folge $x(\mu)$ im Originalbereich. Wie nennt man die sich ergebende Folge $x(\mu)$?

- Beweisen Sie das Reihentheorem (vgl. Skript Kap. 15.4.12.1) $\lim_{z \rightarrow 1} X(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} x(\mu)$.

- Beweisen Sie das Anfangswerttheorem (vgl. Skript Kap. 15.4.12.2) $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x(0) = x_0$.

Aufgabe 27: Laplace - Z-Transformation - Bilineare Transformation

Beim Entwurf von digitalen Filtern bestimmt man oftmals zuerst die gewünschte Filtercharakteristik im analogen Bereich und transformiert danach in den digitalen Bereich. Man unterscheidet je nach Anwendungsfall als Ziel eine Übereinstimmung im Zeit- oder Frequenzbereich.

Bei der sogenannten *bilinearen Transformation* wird im Gegensatz zur sogenannten impulsinvarianten bzw. sprunginvarianten Transformation eine Übereinstimmung im Frequenzbereich angestrebt. Der Vorteil ist die Eigenschaft der eindeutigen Umkehrbarkeit (Bijektivität) zwischen analogem und digitalen Bereich, wodurch Aliasing-Effekte vermieden werden. Die Abbildungsvorschrift der bilinearen Transformation lautet:

$$z = \frac{1+s}{1-s} \quad \Leftrightarrow \quad s = \frac{z-1}{z+1}$$

Durch einfache Substitution in der gegebenen Übertragungsfunktion erhält man die entsprechende Übertragungsfunktion im korrespondierenden Bereich.

Gegeben sei der in Bild 27.1 dargestellte analoge RC-Tiefpaß.

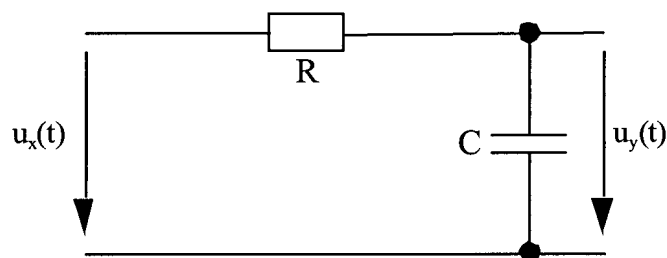


Bild 27.1 Analoges RC-Tiefpaß

- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\underline{H}(s) = \underline{U}_y(s) / \underline{U}_x(s)$.
- Ermitteln Sie durch Anwenden der bilinearen Transformation die Übertragungsfunktion $H(z)$ des entsprechenden digitalen Filters.

Im folgenden gelte $RC = 3$.

- Bestimmen Sie die Differenzgleichung des digitalen Filters und zeichnen die Filterstruktur unter Verwendung von Addierern, Multiplizierern und Verzögerungsgliedern analog zu Bild 25.2 bzw. Bild 25.3.
- Zeigen Sie, daß die Impulsantwort-Folge durch $h(\mu) = \frac{1}{4} \cdot \delta(\mu) + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(\mu+2)} \cdot s(\mu-1)$ gegeben ist, wobei $\delta(\mu)$ der Dirac-Folge und $s(\mu)$ der Einheitssprung-Folge entspricht (vgl. Aufgabe 24).

Gegeben Sei nun die Eingangsfolge $x(\mu) = (1, 2, 1)$.

- Berechnen Sie die ersten 5 Glieder der Antwortfolge $y(\mu)$ durch Faltung im Originalbereich.
- Bilden Sie $X(z)$ und berechnen Sie $Y(z)$.
- Transformieren Sie nun $Y(z)$ zurück in den Originalbereich und verifizieren Sie das Ergebnis aus e).

Theoretische Elektrotechnik II, Musterlösung

Aufgabe 25:a)

$$Y(z) = X(z) + X(z) \cdot z^{-1} + X(z) \cdot z^{-2} + \dots + X(z) \cdot z^{-n}$$

$$= X(z) \cdot [1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots + z^{-n}]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots + z^{-n} = \sum_{\mu=0}^n z^{-\mu}$$

b)

$$H(z) = \sum_{\mu=0}^n z^{-\mu} = \sum_{\mu=0}^n \left(\frac{1}{z}\right)^{\mu} \quad (\text{endliche geometrische Reihe})$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1 - z^{-(n+1)}}{1 - z^{-1}} = \frac{z - z^{-n}}{z - 1}$$

c)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-(n+1)}}{1 - z^{-1}}$$

$$Y(z)(1 - z^{-1}) = X(z)(1 - z^{-(n+1)})$$

$$Y(z) - Y(z) \cdot z^{-1} = X(z) - X(z) \cdot z^{-(n+1)}$$

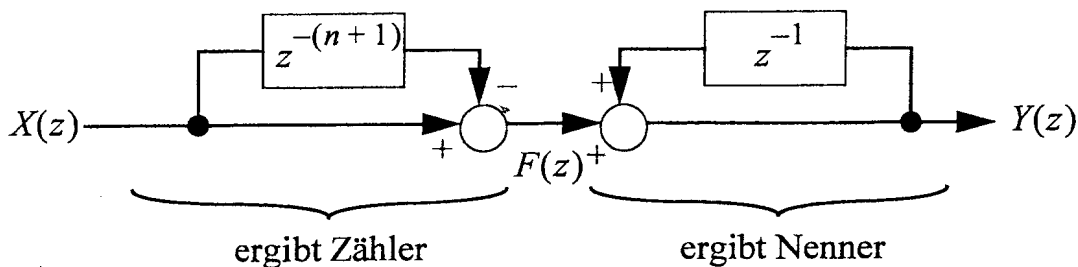
(unter Anwendung des Verschiebungssatzes)

$$y(\mu) - y(\mu - 1) = x(\mu) - x(\mu - (n + 1))$$

$$y(\mu) = y(\mu - 1) + x(\mu) - x(\mu - (n + 1))$$

hieraus ist Filterstruktur aus Bild 25.2 leicht zu zeichnen

d) Vierpol 1 in Bild 25.2:



$$F(z) = X(z) - X(z) \cdot z^{-(n+1)}$$

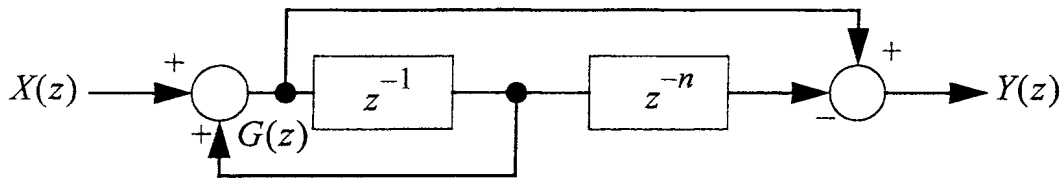
$$= X(z)(1 - z^{-(n+1)})$$

$$Y(z) = F(z) + Y(z) \cdot z^{-1}$$

$$Y(z)(1 - z^{-1}) = F(z) \Rightarrow Y(z) = \frac{F(z)}{(1 - z^{-1})}$$

$$Y(z) = \frac{X(z)(1 - z^{-(n+1)})}{(1 - z^{-1})} \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-(n+1)}}{1 - z^{-1}}$$

Vierpol 2 in Bild 25.3:



$$G(z) = X(z) + G(z) \cdot z^{-1}$$

$$Y(z) = G(z) - G(z) \cdot z^{-1} z^{-n}$$

$$G(z)(1 - z^{-1}) = X(z) \Rightarrow G(z) = \frac{X(z)}{(1 - z^{-1})}$$

$$= G(z)(1 - z^{-(n+1)})$$

$$Y(z) = \frac{X(z)}{(1 - z^{-1})} (1 - z^{-(n+1)}) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-(n+1)}}{1 - z^{-1}}$$

e) Der Filter aus Bild 25.1 ist nichtrekursiv, die beiden anderen aus den Bildern 25.2 und 25.3 sind dagegen rekursiv.

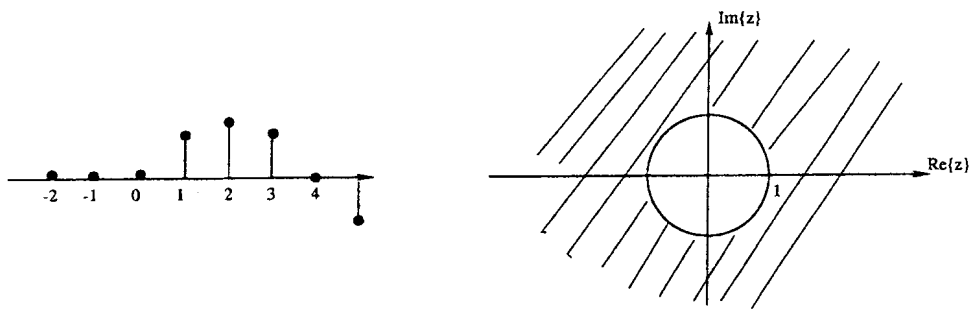


Fig. 5.

$$\begin{aligned}
 \underline{\text{Konvergenzbereich}} : & \quad |a \cdot z| < 1 \quad \wedge \quad \left| \frac{a}{z} \right| < 1 \\
 \Leftrightarrow & \quad |z| < \frac{1}{|a|} \quad \wedge \quad |z| > |a| \\
 \Rightarrow & \quad |a| < 1
 \end{aligned}$$

e) Rechtsseitige Sinusfkt.: $x_\mu = s_\mu \cdot \sin(\mu\omega_0)$

$$\begin{aligned}
 \underline{X}(z) &= \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} s_\mu \cdot \sin(\mu \cdot \omega_0) \cdot z^{-\mu} \\
 &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{2j} \cdot \{e^{j\mu\omega_0} - e^{-j\mu\omega_0}\} \cdot z^{-\mu} = \frac{1}{2j} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega_0}}{z} \right)^\mu - \left(\frac{1}{z \cdot e^{j\omega_0}} \right)^\mu \\
 &= \frac{1}{2j} \cdot \left\{ \frac{1}{1 - \frac{e^{j\omega_0}}{z}} - \frac{1}{1 - \frac{e^{-j\omega_0}}{z}} \right\} = \frac{1}{2j} \cdot \left\{ \frac{z}{z - e^{j\omega_0}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}} \right\} \\
 &= \frac{1}{2j} \cdot \frac{z^2 - z \cdot e^{-j\omega_0} - z^2 + z \cdot e^{j\omega_0}}{z^2 - z \cdot e^{j\omega_0} - z \cdot e^{-j\omega_0} + 1} \\
 \underline{X}(z) &= \frac{z \cdot \sin(\omega_0)}{z^2 - 2z \cdot \cos(\omega_0) + 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\text{Konvergenzbereich}} : & \quad \left| \frac{e^{j\omega_0}}{z} \right| < 1 \quad \wedge \quad \left| \frac{e^{-j\omega_0}}{z} \right| < 1 \\
 \Leftrightarrow & \quad |z| > \underbrace{|e^{j\omega_0}|}_{=1} \quad \wedge \quad |z| > \underbrace{|e^{-j\omega_0}|}_{=1} \\
 \Rightarrow & \quad |z| > 1
 \end{aligned}$$

f) Rampenfolge: $x_\mu = s_\mu \cdot \mu$

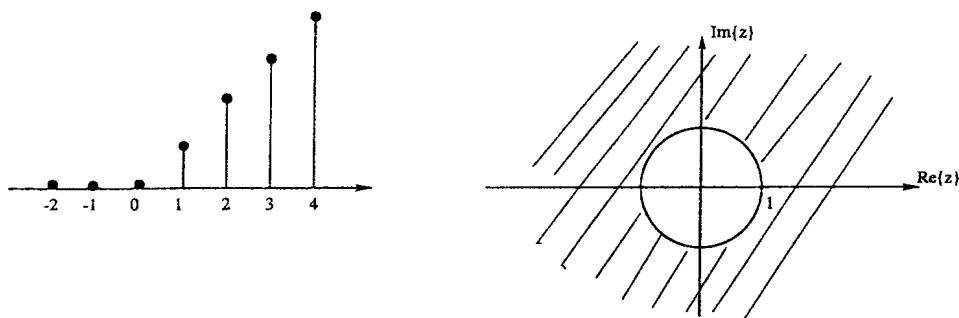


Fig. 6.

$$\begin{aligned} \underline{X}(z) &= \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} s_{\mu} \cdot \mu \cdot z^{-\mu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \mu \cdot z^{-\mu} \\ \text{Trick : } \frac{d}{dz} z^{-\mu} &= -\mu \cdot z^{-\mu-1} \\ \text{also : } \mu \cdot z^{-\mu} &= -z \cdot \frac{d}{dz} z^{-\mu} \\ \Rightarrow \underline{X}(z) &= \sum_{\mu=0}^{\infty} -z \cdot \frac{d}{dz} z^{-\mu} \\ &= -z \cdot \frac{d}{dz} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} z^{-\mu} = -z \cdot \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{1-z^{-1}} \right\} \\ &= -z \cdot \frac{-1 \cdot (z^{-2})}{(1-z^{-1})^2} \\ \underline{X}(z) &= \frac{z}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

Konvergenzbereich: $\left| \frac{1}{z} \right| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$

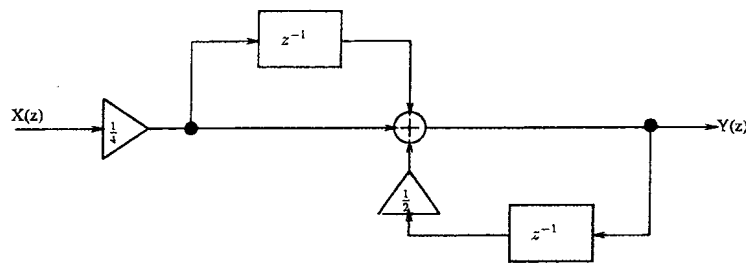


Fig. 1. Aufgabe 27c)

Aufgabe 27 Bilineare-Trafo

a)

$$\underline{H}(s) = \frac{\underline{U}_y(s)}{\underline{U}_x(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{sRC + 1}$$

b) bilineare Transformation:Substituiere $s = \frac{z-1}{z+1}$ in $\underline{H}(s)$, folglich:

$$H(z) = \underline{H}(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{z+1}} = \frac{1}{1 + RC \frac{z-1}{z+1}} = \frac{z+1}{z+1 + RC \cdot (z-1)} \quad (1)$$

$$H(z) = \frac{z+1}{z(1+RC) + (1-RC)}$$

c) Differenzengleichung: $RC=3$

$$H(z) = \frac{z+1}{4 \cdot z - 2} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\Leftrightarrow Y(z) \cdot 4z - Y(z) \cdot 2 = X(z) \cdot z + X(z) \quad | \cdot \frac{1}{4z}$$

$$\Leftrightarrow Y(z) - \frac{1}{2}Y(z) \cdot z^{-1} = \frac{1}{4}X(z) + \frac{1}{4}X(z) \cdot z^{-1} \quad \bullet \text{---} \bigcirc$$

$$\Rightarrow y(\mu) - \frac{1}{2}y(\mu-1) = \frac{1}{4}x(\mu) + \frac{1}{4}x(\mu-1)$$

Umschreiben:

$$y(\mu) = \frac{1}{2}y(\mu-1) + \frac{1}{4}x(\mu) + \frac{1}{4}x(\mu-1)$$

d)

$$\begin{aligned}
 h(\mu) &= Z^{-1}\{H(z)\} \\
 H(z) &= \frac{z+1}{4 \cdot z-2} = \frac{z}{4 \cdot z-2} + \frac{1}{4 \cdot z-2} \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}
 \end{aligned}$$

$$h(\mu) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^\mu \cdot s(\mu) + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu-1} \cdot s(\mu-1)$$

mit $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ folgt:

$$\begin{aligned}
 h(\mu) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{(\mu+2)} \cdot s(\mu) + \left(\frac{1}{2}\right)^{(\mu+1)} \cdot s(\mu-1) \\
 h(0) &= \frac{1}{4} \\
 h(1) &= \frac{3}{8} \quad \left(= \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \\
 h(2) &= \frac{3}{16} \quad \left(= \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) \\
 h(3) &= \frac{3}{32} \quad \left(= \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right) \\
 h(\mu) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{(\mu+1)} \cdot \underbrace{\left[\frac{s(\mu)}{2} + s(\mu-1)\right]}_{\leq \frac{3}{2} \text{ für } \mu \geq 1}
 \end{aligned}$$

 \Rightarrow Zerlege in 2 Teile:

$$1) \mu = 0; \quad 2) \mu \geq 1$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow h(\mu) &= \underbrace{\frac{1}{4}\delta(\mu)}_{1. \text{ Teile für } \mu=0} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{(\mu+1)} \cdot \frac{3}{2} \cdot s(\mu-1)}_{2. \text{ Teile für } \mu \geq 1} \\
 h(\mu) &= \frac{1}{4}\delta(\mu) + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(\mu+2)} \cdot s(\mu-1)
 \end{aligned}$$

e)

$$x(\mu) = (1, 2, 1)$$

Aufgabe 26

a)

$$X(z) = \frac{z \cdot (z - \cos \omega_0)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}; \quad |z| > 1$$

$$x(\mu) = ?$$

Da grad (Zähler) = grad (Nenner) = 2 \Rightarrow Abspaltung einer 1:

$$X(z) = \frac{\overbrace{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}^{=0} - (z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1) + z^2 - z \cos \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$$

$$= 1 + \frac{z^2 - z \cos \omega_0 - z^2 + 2z \cos \omega_0 - 1}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$$

$$X(z) = 1 + \frac{z \cos \omega_0 - 1}{\underbrace{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}_{D(z)}}$$

Pole von $D(z)$:

$$z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1 \equiv 0$$

$$\Leftrightarrow z_{\infty 1,2} = \cos \omega_0 \pm \sqrt{\cos^2 \omega_0 - 1} = \cos \omega_0 \pm j\sqrt{1 - \cos^2 \omega_0}$$

$$= \cos \omega_0 \pm j \sin \omega_0 = e^{\pm j\omega_0}$$

$$\Rightarrow D(z) = \frac{z \cos \omega_0 - 1}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1} = \frac{A}{z - e^{j\omega_0}} + \frac{B}{z - e^{-j\omega_0}}$$

$$= \frac{z(A+B) - (Ae^{-j\omega_0} + Be^{j\omega_0})}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$$

Koeffizientenvergleich:

$$z^1: \quad A + B = \cos \omega_0$$

$$z^0: \quad Ae^{-j\omega_0} + Be^{j\omega_0} = 1$$

durch Rechnung oder durch genaues Hinsehen erkennt man:

$$A = \frac{1}{2}e^{j\omega_0} \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{2}e^{-j\omega_0}$$

$$\Rightarrow D(z) = \frac{\frac{e^{j\omega_0}}{2}}{z - e^{j\omega_0}} + \frac{\frac{e^{-j\omega_0}}{2}}{z - e^{-j\omega_0}}$$

$$\Rightarrow X(z) = 1 + \frac{1}{2} \left\{ e^{j\omega_0} \cdot \frac{z^{-1}}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} + e^{-j\omega_0} \cdot \frac{z^{-1}}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}} \right\}$$

$$\text{dazu: } 1 \bullet \circ \delta(\mu)$$

$$\frac{1}{1 - az^{-1}} = \sum_{\mu=0}^{\infty} a^{\mu} z^{-\mu} = Z \{ a^{\mu} s(\mu) \} \bullet \circ a^{\mu} s(\mu)$$

mit dem Verschiebungssatz gilt:

$$\frac{z^{-1}}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} \bullet \circ (e^{j\omega_0})^{\mu-1} \cdot s(\mu - 1)$$

$$\frac{z^{-1}}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}} \bullet \circ (e^{-j\omega_0})^{\mu-1} \cdot s(\mu - 1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad x(\mu) &= \delta(\mu) + \frac{1}{2} \left\{ e^{j\omega_0} (e^{j\omega_0})^{\mu-1} + e^{-j\omega_0} (e^{-j\omega_0})^{\mu-1} \right\} \cdot s(\mu-1) \\ &= \delta(\mu) + \frac{1}{2} \left\{ e^{j\omega_0\mu} + e^{-j\omega_0\mu} \right\} \cdot s(\mu-1) \\ &= \delta(\mu) + \cos(\omega_0\mu) \cdot s(\mu-1) \end{aligned}$$

mit $\delta(\mu)|_{\mu=0} = 1 = \cos(\omega_0\mu)|_{\mu=0}$ ergibt sich:

$$x(\mu) = \cos(\omega_0\mu) \cdot s(\mu) \quad \text{rechtsseitige Cosinusfunktion}$$

b) Beweis des Reihentheorems

$$\begin{aligned} \text{zu zeigen} \quad \lim_{z \rightarrow 1} X(z) &= \sum_{\mu=0}^{\infty} x(\mu) \\ \lim_{z \rightarrow 1} X(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{\mu=0}^{\infty} x(\mu) z^{-\mu} \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty} x(\mu) \lim_{z \rightarrow 1} (z^{-\mu}) \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty} x(\mu) \cdot 1^{-\mu} \\ \lim_{z \rightarrow 1} X(z) &= \sum_{\mu=0}^{\infty} x(\mu) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

c) Beweis des Anfangswerttheorems:

$$\begin{aligned} \text{zu zeigen} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) &= x(0) \\ \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} x(\mu) z^{-\mu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} x(\mu) \lim_{z \rightarrow \infty} z^{-\mu} \\ &= x(0) \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{z}\right)^0 + x(1) \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{z}\right)^1 + x(2) \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \dots \\ \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) &= x(0) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Theoretische Elektrotechnik II
 10. Aufgabenblatt

Aufgabe 28: 2-dimensionale Fouriertransformation

Die 2D-Fourier-Transformierte des gegebenen Signals $s(x, y)$ werde mit $\underline{S}(f_x, f_y)$ bezeichnet, wobei f_x und f_y die sogenannten Ortsfrequenzen der Spektralfunktion sind.

- Zunächst sei $s(x, y) = s(x) = \delta(x)$ gegeben. Zeigen Sie mit Hilfe der eindimensionalen Fourier-Korrespondenzen und des Separierungsansatzes, daß $\underline{S}(f_x, f_y) = \underline{S}(f_y) = \delta(f_y)$ ist.
- Beweisen Sie den Differentiationssatz der 1-dimensionalen Fouriertransformation und bestimmen Sie unter dessen Zuhilfenahme die Fouriertransformierten $\underline{S}_1(f_x, f_y)$ und $\underline{S}_2(f_x, f_y)$ der beiden folgenden Signale als Funktion von $\underline{S}(f_x, f_y)$.

$$s_1(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} s(x, y) \quad s_2(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} s(x, y)$$

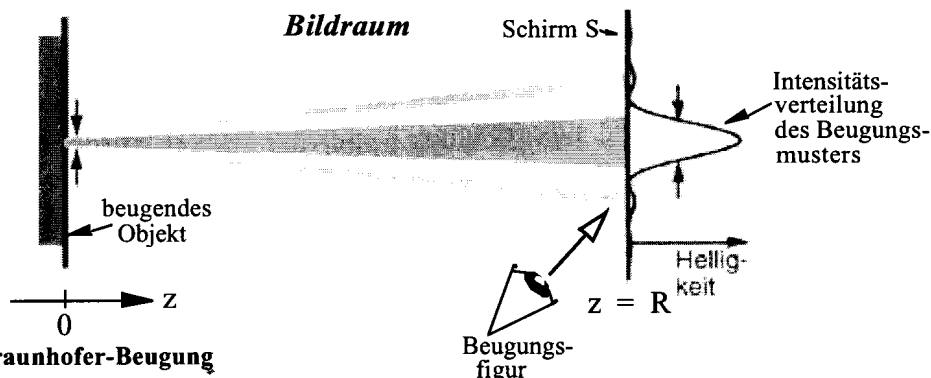
Aufgabe 29: 2D-Gaußfunktion

Gegeben sei die 2D-Gaußfunktion zu $s(x, y) = \exp[-\pi \cdot (x^2 + y^2)/\sigma^2]$.

- Stellen Sie diese zuerst möglichst anschaulich in einer 3D-Skizze dar und zeichnen dann in ein zweites Bild das Schnittbild für $x = 0$.
Hinweis: Hier gelte $\sigma = \sqrt{2 \cdot \pi}$.
- Leiten Sie danach die Fouriertransformierte $\underline{S}(f_x, f_y)$ her. Was fällt Ihnen an dem Fourierpaar auf?

Aufgabe 30: Fourier-Methoden in der Beugungstheorie - Fraunhofersche Beugung

Ein aus dem Bereich der Optik bekanntes Phänomen ist die Beugung von Licht an einem Hindernis. Dabei wird meistens ein monochromatisches Wellenfeld (Licht einer festen Wellenlänge λ_0 , bzw. einer Frequenz f_0) von einem Objekt, dessen Abmessungen im Bereich der Wellenlänge des Lichtes liegt, gestört. Auf dem in einiger Entfernung stehenden Schirm beobachtet man dann keine klare Licht-Schatten-Grenze mehr, sondern ein Beugungsmuster, dessen Intensität örtlich schwankt (siehe Bild 30.1).



Unter der Annahme, die Abmessungen des beugenden Objekts seien sehr viel kleiner als der Abstand zum Schirm, kann in diesem Fall mit guter Näherung die *Fraunhofer-Beugung* angenommen werden (siehe Bild 30.1). Unter bestimmten Voraussetzungen, die hier gegeben sein sollen, bestimmt sich die Amplitudenverteilung des gebeugten Lichtes auf dem Schirm S bei $z = R$ durch folgende Rechenvorschrift:

$$\underline{U}_P(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y) \cdot e^{-j \cdot k \cdot (u \cdot x + v \cdot y)/R} dx dy \quad (\text{Gl. 30.1})$$

Hier ist $\underline{U}_P(u, v)$ die Amplitudenverteilung des gebeugten Lichtes und $A(x, y)$ die Amplitudenverteilung in der Blendenebene des beugenden Objekts (siehe dazu auch Bild 30.2). Ferner sei R der Abstand des Schir-

mes vom beugenden Objekt und k der Betrag des sogenannten Wellenvektors, der als Funktion der Wellenlänge ausgedrückt werden kann: $k = 2\pi/\lambda_0$.
 Die Vorschrift nach Gl. 30.1 erinnert formal sehr stark an die der 2-dimensionalen Fouriertransformation. Die Amplitudenverteilung auf dem Schirm S entspricht demnach dem Raumfrequenzspektrum der Blendenöffnungsfunktion.

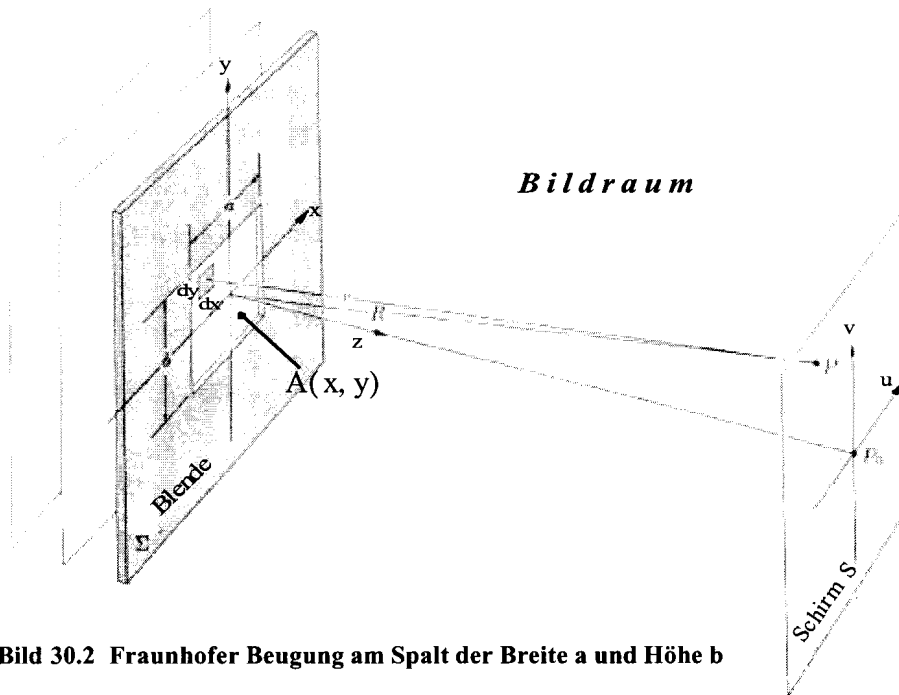


Bild 30.2 Fraunhofer Beugung am Spalt der Breite a und Höhe b

- a) Welche Substitutionen müssen gemacht werden, um direkt die Beziehung $\underline{U}_P(X, Y) = F\{A(x, y)\}$ angeben zu können, ausgehend von der Abbildungsvorschrift der 2D-Fourier-Hin-Transformation im Skript?

Zunächst sei das beugende Objekt durch eine Spaltblende der Breite a und der Höhe b gemäß Bild 30.2 gegeben. Unter der Annahme, daß die Spaltöffnung selbst keine weitere Gewichtung der Amplitude vornimmt, ergibt sich die Spaltöffnungsfunktion demnach zu:

$$A^S(x, y) = \begin{cases} A_0, & \text{für } (|x| \leq a/2) \wedge (|y| \leq b/2) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- b) Geben Sie einen geschlossenen Ausdruck für $A^S(x, y)$ an und bestimmen Sie die Amplitudenverteilung $\underline{U}_P^S(u, v)$ auf dem Schirm.
 c) Durch das Bilden des Betragsquadrats der Amplitudenverteilung erhält man den Verlauf der Intensität des gebeugten Lichtes $I(u, v) = |\underline{U}_P(u, v)|^2$. Bestimmen Sie zunächst alle Stellen der lokalen Extrema dieser Funktion in Abhängigkeit von λ_0 , R , a und b . Skizzieren Sie anschließend qualitativ die entstehende Beugungsfigur auf dem Schirm (in der u - v -Ebene). Zeichnen Sie den Verlauf der normierten Intensitätsverteilung $I^S(u, v)/I_0$ (mit $I_0 = \max(I(u, v))$) auf der u -Achse (d.h. $v = 0$) in ein weiteres Bild.

Nun werde die Spaltblende durch eine Kreisblende mit dem Radius a ersetzt. Die Amplitudenverteilung in

der Kreisblendenebene ergibt sich dann zu: $A^K(x, y) = \begin{cases} A_0, & \text{für } x^2 + y^2 \leq a^2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

- d) Welche Symmetrie weist die Kreisblendenöffnungsfunktion und somit auch deren Fouriertransformierte auf? Welches Koordinatensystem wählt man demnach geschickterweise? Geben Sie einen geschlossenen Ausdruck für $A^K(x, y)$ an (**Hinweis:** siehe Skript).
 e) Bestimmen Sie die Amplitudenverteilungsfunktion $\underline{U}_P^K(\rho, \theta)$ im Bildraum und skizzieren Sie das auf dem Schirm sichtbare Beugungsbild qualitativ.
 f) Wie würde sich das Beugungsbild ändern, wenn die Kreisblende zu einer elliptischen Blende deformiert werden würde, so daß sie in x -Richtung um den Faktor 2 gestreckt, aber in y -Richtung um den Faktor 2 komprimiert werden würde? Skizzieren Sie die dann entstehende Beugungsfigur.

Theoretische Elektrotechnik II, Musterlösung

Aufgabe 28: 2D-Fouriertransformation: a)

$$s(x, y) \circ \text{---} \bullet \underline{S}(f_x, f_y) \quad x, y: \text{Ortskoordinaten}$$

$$\delta(x) \circ \text{---} \bullet \delta(f_y) \quad f_x, f_y: \text{Ortsfrequenzen}$$

$$\begin{aligned} \underline{S}(f_x, f_y) = F\{s(x, y)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x, y) e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-j2\pi f_x 0} dx e^{-j2\pi f_y y} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{-j2\pi f_y y} dy \quad \text{hier nur noch eindimensional} \\ \underline{S}(f_x, f_y) &= \delta(f_y) \\ \delta(x) \circ \text{---} \bullet \delta(f_y) \quad &\text{q.e.d.} \end{aligned}$$

b) Differentiationssatz der eindimensionalen Fouriertransformation:

sei $F\{x(t)\} = \underline{X}(j\omega) = \underline{X}(2\pi f)$, dann gilt:

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \circ \text{---} \bullet (j\omega)^n \underline{X}(j\omega) = (2\pi f)^n \underline{X}(2\pi f); n \in \mathbb{N}$$

Beweis: Trick: gehe von Rücktransformation aus!

$$\begin{aligned} x(t) &= F^{-1}\{\underline{X}(j\omega)\} = F^{-1}\{\underline{X}(2\pi f)\} \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(jf) e^{j2\pi f t} df \end{aligned}$$

man differenziere beide Seiten n-mal:

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} x(t) &= \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] \\ \frac{d^n}{dt^n} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(j\omega) \frac{d^n}{dt^n} e^{j\omega t} d\omega \\ \frac{d^n}{dt^n} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (j\omega)^n \underline{X}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow \frac{d^n}{dt^n} x(t) \circ \text{---} \bullet (j\omega)^n \underline{X}(j\omega) \end{aligned}$$

Damit ist:

$$\begin{aligned}\underline{S}_1(f_x, f_y) &= F\{s_1(x, y)\} = F\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}s(x, y)\right\} = F\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}s(x, y)\right)\right\} \\ &= (j2\pi f_x) \cdot F\left\{\frac{\partial}{\partial x}s(x, y)\right\} = (j2\pi f_x) \cdot (j2\pi f_x) \cdot \underline{S}(f_x, f_y)\end{aligned}$$

$$\underline{S}_1(f_x, f_y) = -4\pi^2 f_x^2 \cdot \underline{S}(f_x, f_y)$$

$$\begin{aligned}\underline{S}_2(f_x, f_y) &= F\{s_2(x, y)\} = F\left\{\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}s(x, y)\right\} = F\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}s(x, y)\right)\right\} \\ &= (j2\pi f_x) \cdot F\left\{\frac{\partial}{\partial y}s(x, y)\right\} = (j2\pi f_x) \cdot (j2\pi f_y) \cdot \underline{S}(f_x, f_y)\end{aligned}$$

$$\underline{S}_2(f_x, f_y) = -4\pi^2 f_x \cdot f_y \cdot \underline{S}(f_x, f_y)$$

$$y(\mu) = \sum_{k=0}^{\mu} h(k) \cdot x(\mu - k)$$

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{16} & \frac{3}{32} & \frac{3}{64} & \dots \\ & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{16} & \frac{3}{32} & \dots \\ & & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{16} & \frac{3}{32} & \frac{3}{64} & \dots \end{array}$$

$$y(\mu) = \left(\frac{1}{4} \quad \frac{7}{8} \quad \frac{19}{16} \quad \frac{27}{32} \quad \frac{3}{64} \right) \dots$$

f)

$$\begin{aligned} X(z) &= Z\{x(\mu)\} = Z\{(1, 2, 1)\} \\ X(z) &= 1 + 2 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z) \cdot X(z) \\ &= \frac{z+1}{4z-2} \cdot (1 + 2 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2}) \\ &= \frac{z+1+2+2z^{-1}+z^{-1}+z^{-2}}{4z-2} \\ &= \frac{3+z+3z^{-1}+z^{-2}}{4z-2} \\ Y(z) &= \frac{1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3}}{4-2z^{-1}} \end{aligned}$$

f) $y(\mu) \quad \circ \text{---} \bullet \quad Y(z)$

Aufspalten: $Y(z) = \frac{1}{4} \cdot \{1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3}\}$
 siehe Aufgabenteil d): $\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad \bullet \text{---} \circ \quad \frac{1}{2} \cdot s(\mu)$

hiermit folgt:

$$\begin{aligned} y(\mu) &= \frac{1}{4} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot s(\mu) + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot s(\mu-1) + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot s(\mu-2) + \frac{1}{2} \cdot s(\mu-3) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot s(\mu) + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{s(\mu-1)}{2} + s(\mu-2) \right) + \frac{1}{2} \cdot s(\mu-3) \end{aligned}$$

Vereinfachung:

$$\begin{aligned}
 \mu = 0: \quad y(0) &= \frac{1^2}{2} = \frac{1}{4} \\
 \mu = 1: \quad y(1) &= \frac{1}{8} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8} \\
 \mu = 2: \quad y(2) &= \frac{1}{16} + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{19}{16} \\
 \mu \geq 3: \quad y(\mu) &= \frac{1^{\mu+2}}{2} + 3 \cdot \frac{1^\mu}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right) + \frac{1^{\mu-1}}{2} \\
 &= 1 \cdot \frac{1^{\mu+2}}{2} + 18 \frac{1^{\mu+2}}{2} + 8 \frac{1^{\mu+2}}{2} \\
 &= 27 \cdot \frac{1^{\mu+2}}{2}
 \end{aligned}$$

$$y(\mu) = \frac{1}{4}\delta(\mu) + \frac{7}{8}\delta(\mu-1) + \frac{19}{16}\delta(\mu-2) + 27 \cdot \frac{1^{\mu+2}}{2} \cdot \delta(\mu-3)$$

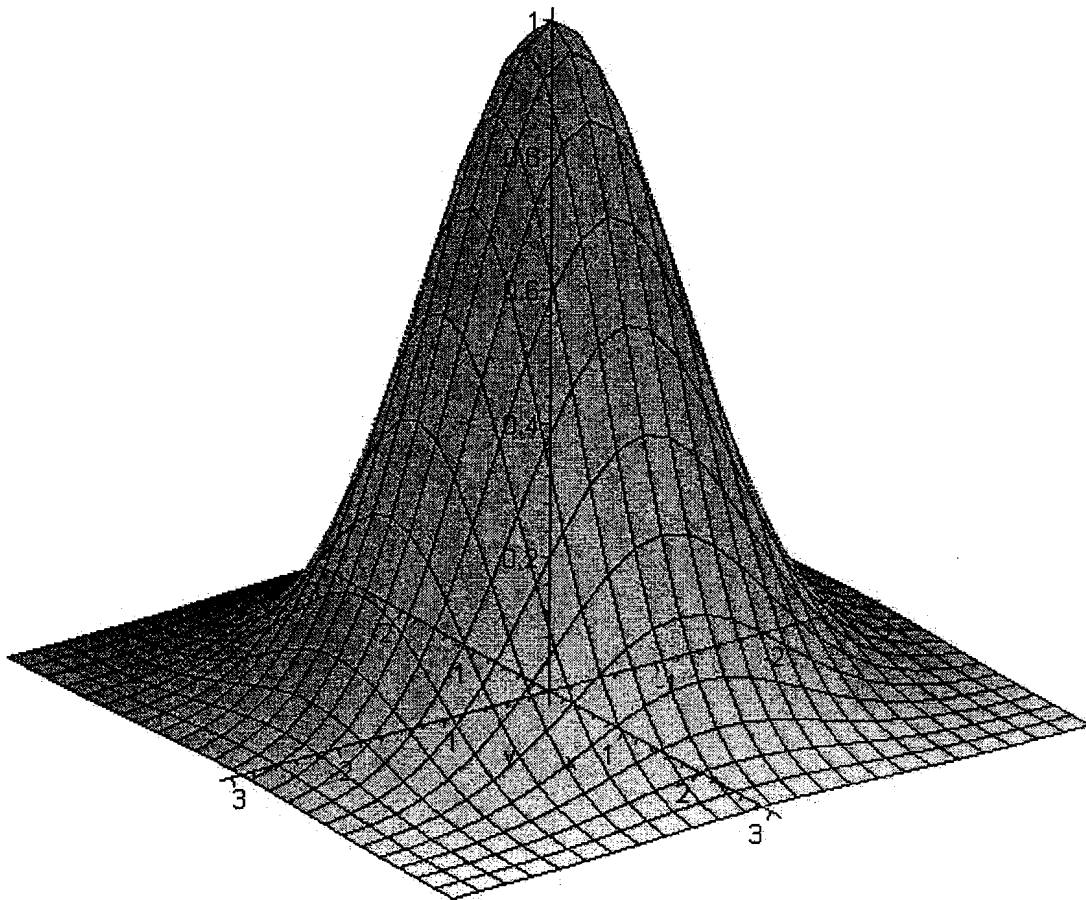
damit:

$$\begin{aligned}
 y(0) &= \frac{1}{4} \\
 y(1) &= \frac{7}{8} \\
 y(2) &= \frac{19}{16} \\
 y(3) &= \frac{27}{32} \\
 y(4) &= \frac{27}{64}
 \end{aligned}$$

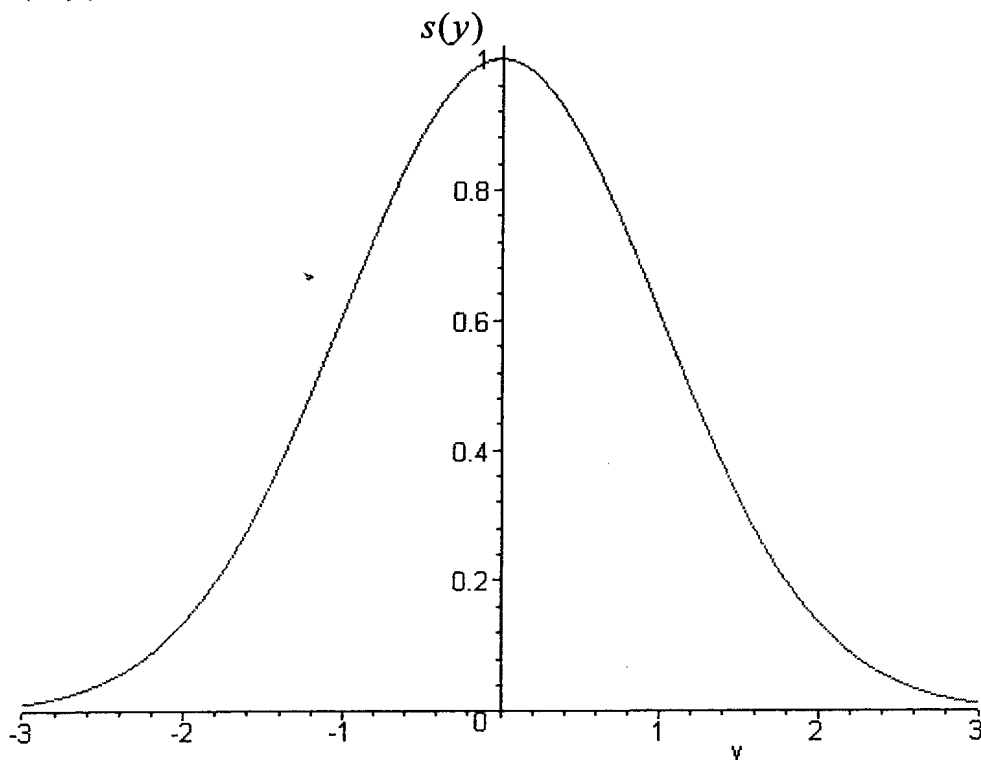
Aufgabe 29:2D-Gaußfunktion: a)

$$s(x, y) = e^{-\frac{(x^2 + y^2)\pi}{\sigma^2}} \quad \text{mit } \sigma = \sqrt{2\pi} \Rightarrow s(x, y) = e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

3D-Skizze: $s(x, y)$



Schnittbild $x=0: s(0, y) = e^{-\frac{y^2}{2}} = s(y)$



Aufgabe 29: 2D-Gaußfunktion

b)

$$\begin{aligned} \text{Gegeben:} \quad s(x, y) &= e^{-\frac{\pi(x^2+y^2)}{\sigma^2}} \\ \text{Gesucht:} \quad F\{s(x, y)\} &= \underline{S}(f_x, f_y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{S}(f_x, f_y) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\pi}{\sigma^2}(x^2+y^2)\right) \cdot \exp(-j2\pi(f_x x + f_y y)) \, dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\pi}{\sigma^2}x^2 - j2\pi f_x x\right) dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\pi}{\sigma^2}y^2 - j2\pi f_y y\right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{\pi}{\sigma^2}(x^2 + j2\sigma^2 f_x x)\right] dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{\pi}{\sigma^2}(y^2 + j2\sigma^2 f_y y)\right] dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{\pi}{\sigma^2}\left(\underbrace{x^2 + 2xj\sigma^2 f_x + (j\sigma^2 f_x)^2}_{\text{2. Bin. Formel}} - (j\sigma^2 f_x)^2\right)\right] dx \cdot \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{\pi}{\sigma^2}\left(\underbrace{y^2 + 2yj\sigma^2 f_y + (j\sigma^2 f_y)^2}_{\text{2. Bin. Formel}} - (j\sigma^2 f_y)^2\right)\right] dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\pi\sigma^2 f_x^2] \cdot \exp\left[\left(x + (j\sigma^2 f_x)\right)^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{\sigma^2}\right)\right] dx \cdot \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\pi\sigma^2 f_y^2] \cdot \exp\left[\left(y + (j\sigma^2 f_y)\right)^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{\sigma^2}\right)\right] dy \\ &= \exp[-\pi\sigma^2 f_x^2] \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\left(x + (j\sigma^2 f_x)\right)^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{\sigma^2}\right)\right] dx \cdot \\ &\quad \exp[-\pi\sigma^2 f_y^2] \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\left(y + (j\sigma^2 f_y)\right)^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{\sigma^2}\right)\right] dy \end{aligned}$$

Aus Wahrscheinlichkeitstheorie bekannt: Gaußsche Glockenkurve
Gaußsche Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung (1-dimensional):

$$\begin{aligned} p_x(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma'}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma'^2}} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} p_x(x) dx &\equiv 1 \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma'}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma'^2}} dx \end{aligned}$$

Anpassen des Ausdrucks:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma'^2}} dx = \sqrt{2\pi\sigma'}$$

Erstes Integral:

$$\begin{aligned} -\mu &\equiv j\sigma^2 f_x \Leftrightarrow \mu = -j\sigma^2 f_x \\ -\frac{\pi}{\sigma^2} &\equiv -\frac{1}{2\sigma'^2} \Leftrightarrow \sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Zweites Integral:

$$\begin{aligned} -\mu &\equiv j\sigma^2 f_y \Leftrightarrow \mu = -j\sigma^2 f_y \\ -\frac{\pi}{\sigma^2} &\equiv -\frac{1}{2\sigma'^2} \Leftrightarrow \sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Eingesetzt ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \underline{S}(f_x, f_y) &= \exp[-\pi\sigma^2 f_x^2] \cdot \sqrt{2\pi} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp[-\pi\sigma^2 f_y^2] \cdot \sqrt{2\pi} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \\ \underline{S}(f_x, f_y) &= \sigma^2 \cdot \exp[-\pi \cdot \sigma^2 (f_x^2 + f_y^2)] \end{aligned}$$

Die Fouriertransformierte eines 2D-Gaußimpulses weist ebenfalls Gaußcharakter auf.

GAUSS BLEIBT GAUSS!

(War zu erwarten, wenn man 1D-Gauß-Funktion betrachtet)

Aufgabe 30 Fraunhofersche Beugung

Gegebene Abbildungsvorschrift, die die Amplitudenverteilung auf dem Schirm in Abhängigkeit von der Blendenöffnungsfunktion wiedergibt.

$$\underline{U}_p(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y) \cdot e^{-j \cdot k \cdot (u \cdot x + v \cdot y) / R} dx dy$$

mit $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$

$$\underline{S}(f_x, f_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(x, y) \cdot e^{-j2\pi \cdot (f_x \cdot x + f_y \cdot y)} dx dy$$

a) Betrachte Phasenterme:

$$-jk \cdot u \cdot x / R = -j2\pi f_x \cdot x \Leftrightarrow f_x = \frac{k \cdot u}{2\pi R} = \frac{u}{\lambda_0 \cdot R}$$

$$-jk \cdot v \cdot y / R = -j2\pi f_y \cdot y \Leftrightarrow f_y = \frac{k \cdot v}{2\pi R} = \frac{v}{\lambda_0 \cdot R}$$

b)

$$\begin{aligned} A^s(x, y) &= A_0 \cdot \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right) \\ \underline{U}_p^s(u, v) &= F\{A^s(x, y)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0 \cdot \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right) \cdot e^{-j2\pi \cdot (f_x \cdot x + f_y \cdot y)} dx dy \quad \left|_{f_x = \frac{k \cdot u}{2\pi R}, f_y = \frac{k \cdot v}{2\pi R}}\right. \\ &= A_0 \cdot \int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-j \cdot k \cdot u \cdot x / R} dx \cdot \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-j \cdot k \cdot v \cdot y / R} dy \\ &= 2 \cdot A_0 \cdot \int_0^{\frac{a}{2}} \cos(k \cdot u \cdot x / R) dx \cdot 2 \cdot \int_0^{\frac{b}{2}} \cos(k \cdot v \cdot y / R) dy \\ &= 4 \cdot A_0 \cdot \frac{\sin(k \cdot u \cdot x / R)}{k \cdot u / R} \Big|_0^{\frac{a}{2}} \cdot \frac{\sin(k \cdot v \cdot y / R)}{k \cdot v / R} \Big|_0^{\frac{b}{2}} \\ &= 4 \cdot A_0 \cdot \frac{\sin(k \cdot u \cdot a / (2R))}{k \cdot u / R \cdot a / 2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin(k \cdot v \cdot b / (2R))}{k \cdot v / R \cdot b / 2} \cdot \frac{b}{2} \\ \underline{U}_p^s(u, v) &= \underline{A_0 \cdot a \cdot b \cdot \text{sinc}(k \cdot u \cdot a / (2R)) \cdot \text{sinc}(k \cdot v \cdot b / (2R))} \end{aligned}$$

wobei $a \cdot b$ der Fläche der Blendenöffnung entspricht!

Bemerkung:

Mit Separierungsansatz hätte man auch unter Verwendung des bekannten 1D-Fourier-Transformationspaares $\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad T \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot T)$

die Lösung erhalten:

$$\begin{aligned} \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad a \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f_x \cdot a) \Big|_{f_x = \frac{k \cdot u}{2\pi R}} &= a \cdot \text{sinc}\left(\frac{k \cdot u \cdot a}{2R}\right) \\ \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right) \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad b \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f_y \cdot b) \Big|_{f_y = \frac{k \cdot v}{2\pi R}} &= a \cdot \text{sinc}\left(\frac{k \cdot v \cdot b}{2R}\right) \\ \Rightarrow \underline{U}_p^s(u, v) &= \underline{A_0 \cdot a \cdot b \cdot \text{sinc}\left(\frac{k \cdot u \cdot a}{2R}\right) \cdot \text{sinc}\left(\frac{k \cdot v \cdot b}{2R}\right)} \end{aligned}$$

c)

$$I^s(u, v) = |U_p^s(u, v)|^2 = A_0^2 a^2 b^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{kua}{2R}\right) \cdot \operatorname{sinc}^2\left(\frac{kvb}{2R}\right)$$

Nullstellen von $I^s(u, v)$:

$$I^s(u, v) = 0 \text{ f\u00fcr } \operatorname{sinc}\left(\frac{kua}{2R}\right) = 0$$

$$\text{oder } \operatorname{sinc}\left(\frac{kvb}{2R}\right) = 0$$

Nullstellen der sinc-Funktion stimmen bis auf die Nullstellen beim Argument gleich Null mit denen der Sinus-Funktion \u00fcberein!

$$\Rightarrow \operatorname{sinc}\left(\frac{kua}{2R}\right) = \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi ua}{\lambda_0 R}\right) = 0$$

$$\text{f\u00fcr } \frac{\pi ua}{\lambda_0 R} = n_\mu \pi; \quad n_\mu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow u_0 = \frac{n_\mu \lambda_0 R}{a}; \quad n_\mu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sinc}\left(\frac{kvb}{2R}\right) = \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi vb}{\lambda_0 R}\right) = 0$$

$$\text{f\u00fcr } \frac{\pi vb}{\lambda_0 R} = n_\nu \pi; \quad n_\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow v_0 = \frac{n_\nu \lambda_0 R}{b}; \quad n_\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

LOKALE EXTREMA VON $I^s(u, v)$:

- i) da $I^s(u, v) \geq 0 \forall (u, v)$ gilt, sind die lokalen Minima durch die oben bestimmten Nullstellen gegeben.
- ii) die Maxima liegen genau zwischen den einzelnen Minima, denn durch das Quadrieren der sinc-Funktion werden auch die Minima der einfachen sinc-Funktion zu lokalen Maxima der sinc^2 -Funktion.

Die Extrema der sinc-Funktion sind bis auf die Funktionswerte bei $0, -\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ identisch mit denen der Sinus-Funktion.

$$\Rightarrow \frac{kua}{2R} = \frac{\pi ua}{\lambda_0 R} = \frac{\pi}{2}(2n_\mu + 1)$$

$$\Leftrightarrow u_{max} = \frac{\lambda_0 R(2n_\mu + 1)}{2a}; \quad n_\mu \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0\}$$

$$\Rightarrow \frac{kvb}{2R} = \frac{\pi vb}{\lambda_0 R} = \frac{\pi}{2}(2n_\nu + 1)$$

$$\Leftrightarrow v_{max} = \frac{\lambda_0 R(2n_\nu + 1)}{2b}; \quad n_\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0\}$$

Das Hauptmaximum liegt analog zum einfachen sinc beim Argument Null.

$$\Rightarrow I_0 = \max\{I^s(u, v)\} = I(0, 0) = (A_0 ab)^2$$

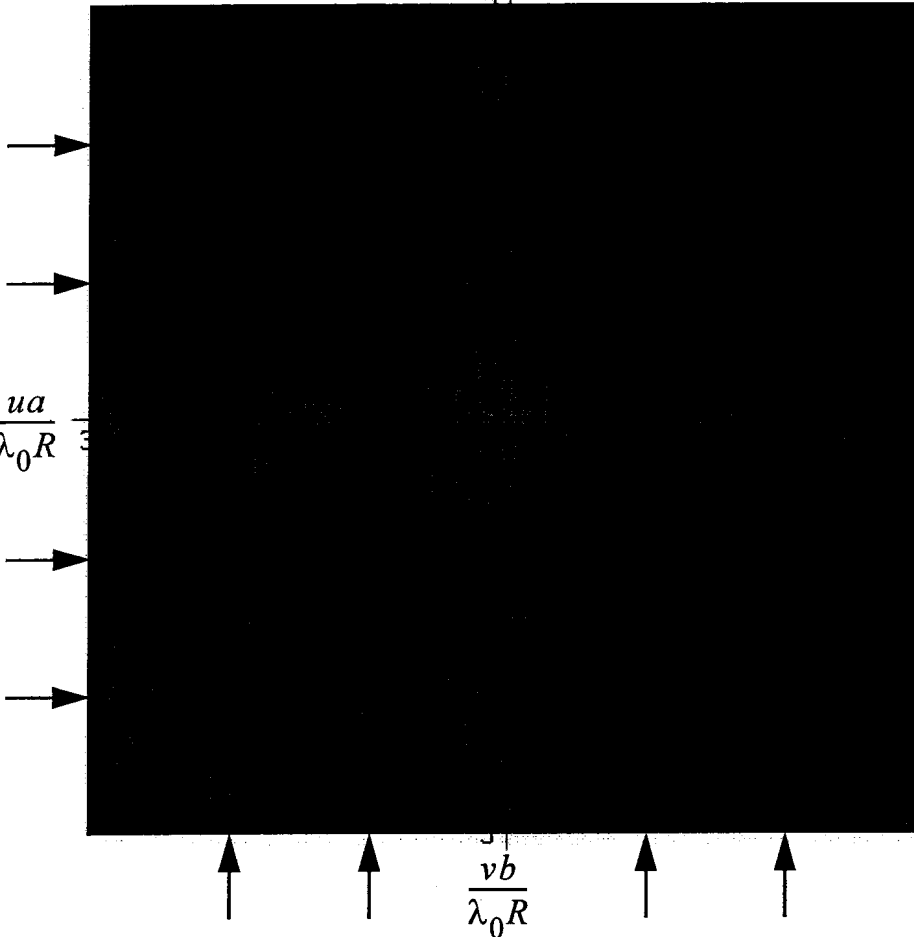
$$ku \frac{a}{2R} = \pi u \frac{a}{\lambda_0 R} = \frac{\pi}{2}(2n_u + 1) \Rightarrow u_{max} = \lambda_0 R \frac{(2n_u + 1)}{2a}; \quad n_u \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$$

$$kv \frac{b}{2R} = \pi v \frac{b}{\lambda_0 R} = \frac{\pi}{2}(2n_v + 1) \Rightarrow v_{max} = \lambda_0 R \frac{(2n_v + 1)}{2b}; \quad n_v \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$$

Das Hauptmaximum liegt analog zum einfachen sinc bei Argument 0

$$I_0 = \max\{I^s(u, v)\} = I(0, 0) = A_0 ab$$

„Nullstellen“ von $\text{sinc}^2(kvb/(2R))$

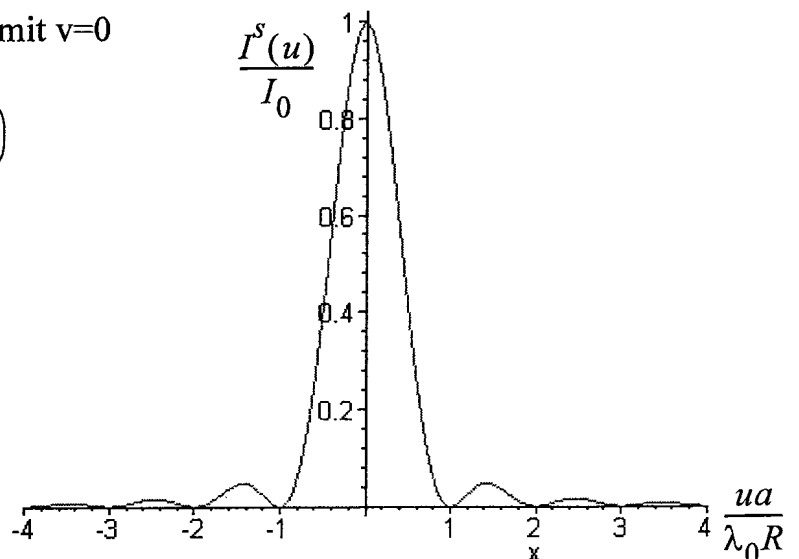


die äußeren Bereiche nehmen schnell an Intensität ab (vgl. sinc^2 -Abfall!)

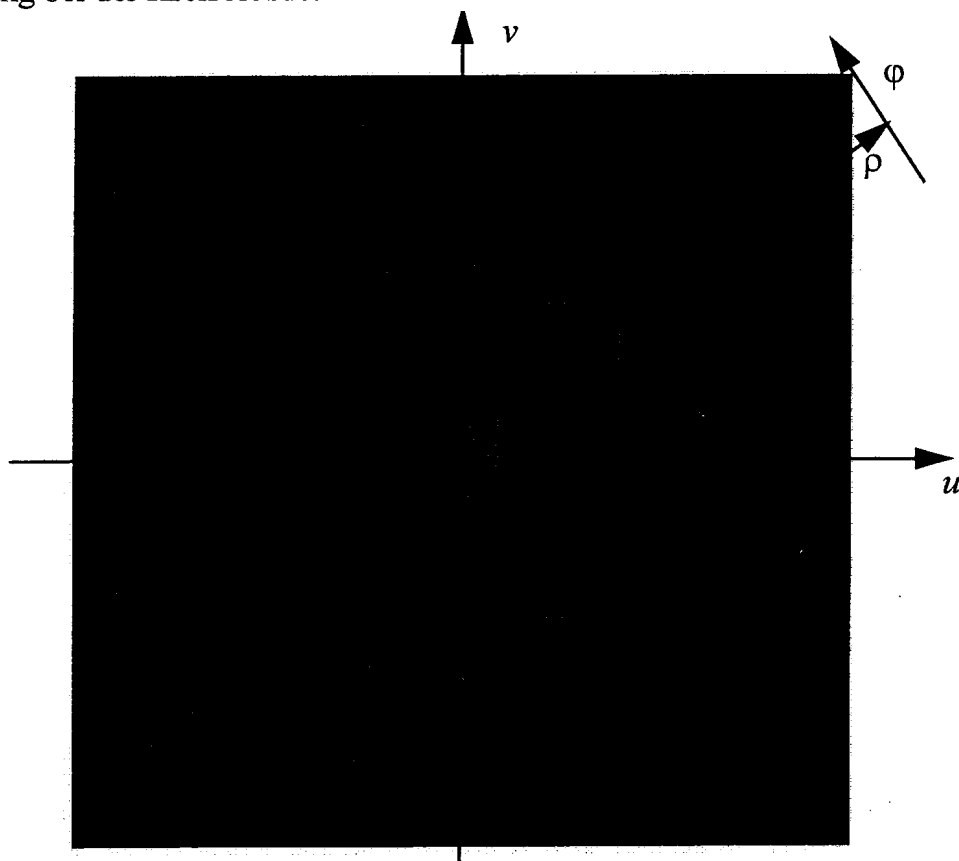
„Nullstellen“ von $\text{sinc}^2(kna/(2R))$

$$\frac{I^s(u, v)}{I_0} = \text{sinc}^2\left(ku \frac{a}{2R}\right) \cdot \text{sinc}^2\left(kv \frac{b}{2R}\right) \text{ mit } v=0$$

$$\frac{I^s(u)}{I_0} = \text{sinc}^2\left(ku \frac{a}{2R}\right) = \text{sinc}^2\left(\pi u \frac{a}{\lambda_0 R}\right)$$



Intensitätsverteilung bei der Kreisblende:



Intensitätsverteilung bei der elliptischen Blende (qualitativ):



d)

$$A^k(x, y) = A_0 \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } x^2 + y^2 \leq a^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

i) Benutze circ-Funktion aus der Vorlesung!

$$\text{circ}(r) = A_0 \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } r \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{circ}\left(\frac{r}{a}\right) = A_0 \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } r \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow A^k(x, y) = A_0 \cdot \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right)$$

ii) Die Kreisblendenöffnungsfunktion ist rotationssymmetrisch zum Ursprung ($x = 0, y = 0$) aufgebaut. Deshalb weist auch das Amplitudenspektrum $\underline{U}_p^k(\rho, \theta)$ diese Rotationssymmetrie auf. (siehe Skript!)

iii) Deshalb ist es geschickt zu Zylinderkoordinaten bzw Polarkoordinaten im 2D-Raum überzugehen.

$$A^k(x, y) = A^k(r, \phi) = A^k(r) = A_0 \cdot \text{circ}\left(\frac{r}{a}\right)$$

e)

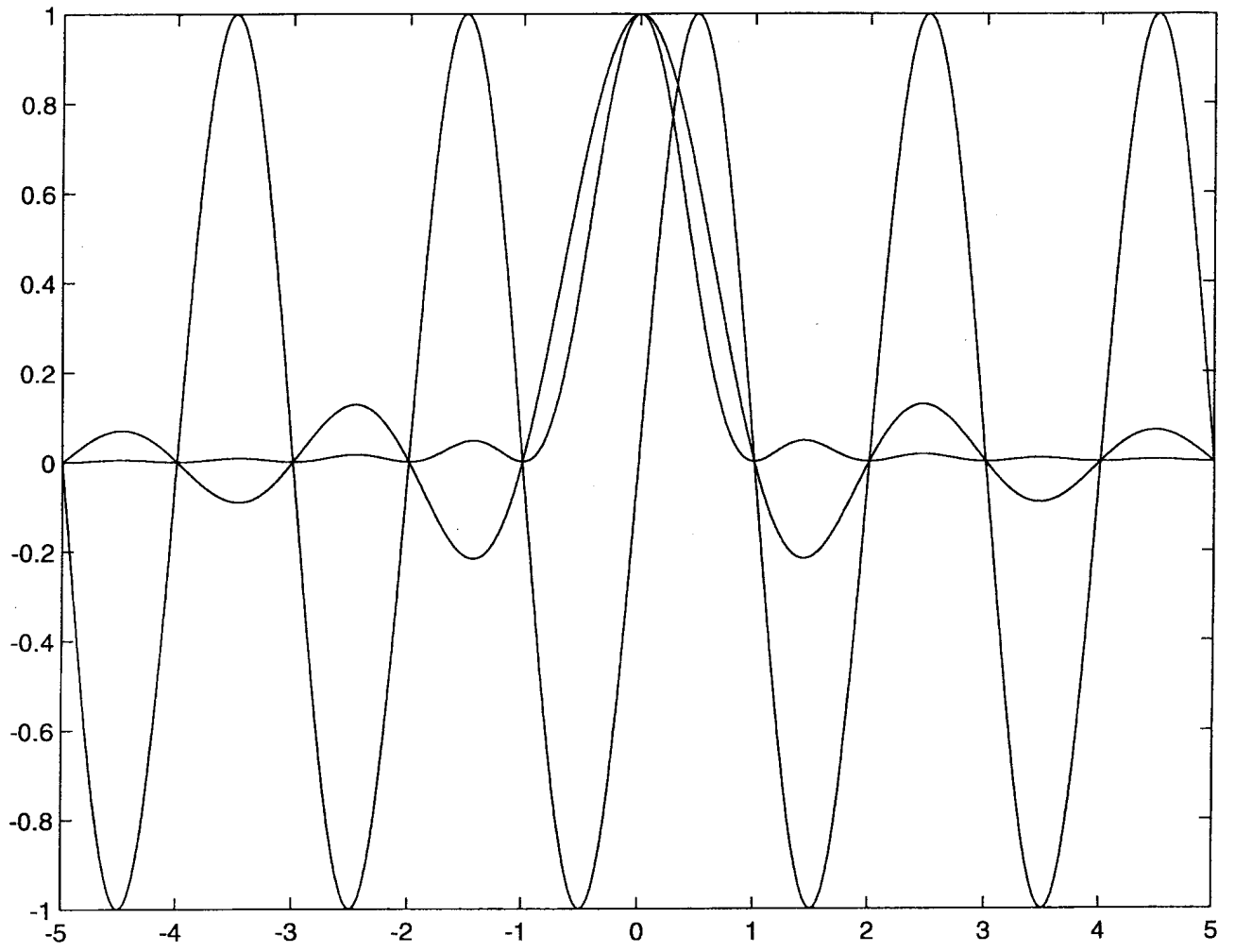
$$\underline{U}_p^k(\rho, \theta) = F\{A^k(r, \phi)\}$$

mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $x = r \cdot \cos\phi$; $y = r \cdot \sin\phi$
 und $\rho = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$; $u = \rho \cdot \cos\theta$; $v = \rho \cdot \sin\theta$
 bzw. mit den gemachten Substitutionen aus a)

$$\rho = \sqrt{\frac{u^2}{\lambda_0^2 R^2} + \frac{v^2}{\lambda_0^2 R^2}} = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{\lambda \cdot R} \quad \left(f_x = \frac{\rho \cdot \cos\theta}{\lambda \cdot R}, f_y = \frac{\rho \cdot \sin\theta}{\lambda \cdot R} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{U}_p(\rho, \theta) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} A^k(r, \phi) \cdot e^{-j \frac{2\pi \cdot r \cdot \rho}{\lambda_0 \cdot R} (\cos\theta \cdot \cos\phi + \sin\theta \cdot \sin\phi)} d\phi r dr \\ &= \int_0^a \int_0^{2\pi} A_0 \cdot e^{-jk \cdot r \cdot \rho \cdot \cos(\phi - \theta) / R} d\phi r dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} // da \quad \cos\alpha \cdot \cos\beta &= \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \\ + \sin\alpha \cdot \sin\beta &= \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ &= \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$



Siehe Skript: Verwendung von Bessel-Funktion!

Es gibt:

$$J_0(\xi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} e^{-j\xi \cdot \cos(\phi-\theta)} d\phi \quad // \text{Besselfkt. 1. Art, Ordnung 0}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{U}_p^k(\rho) &= A_0 \cdot \int_0^a r \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-jk \cdot r \cdot \rho \cdot \cos(\phi-\theta)/R} d\phi}_{\leq 2\pi J_0(k \cdot \rho \cdot r/R)} dr \\ &= A_0 \cdot 2\pi \cdot \int_0^a J_0(k \cdot \rho \cdot r/R) \cdot r dr \end{aligned}$$

Substitution: $\tilde{r} = k \cdot \rho \cdot r/R \rightarrow \tilde{r} = k \cdot \rho \cdot dr/R; \quad r = \tilde{r} \cdot \frac{R}{\rho \cdot k}$
 $\tilde{r}(r=0) = 0; \quad \tilde{r}(r=a) = k \cdot \rho \cdot a/R$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{U}_p^k(\rho) &= 2\pi A_0 \cdot \int_0^{k \cdot \rho \cdot a/R} J_0(\tilde{r}) \cdot \tilde{r} \cdot \frac{R}{\rho \cdot k} \cdot \frac{R}{\rho \cdot k} d\tilde{r} \\ &= \frac{2\pi A_0 \cdot R^2}{(\rho \cdot k)^2} \cdot \int_0^{k \cdot \rho \cdot a/R} J_0(\tilde{r}) \cdot \tilde{r} d\tilde{r} \end{aligned}$$

Es gibt (siehe Skript): $\int_0^x \xi \cdot J_0(\xi) d\xi = x \cdot J_1(x)$
 hiermit gilt:

$$\begin{aligned} \underline{U}_p^k(\rho) &= \frac{2\pi A_0 \cdot R^2}{(\rho \cdot k)^2} \cdot k \cdot \rho \cdot a/R \cdot J_1\left(\frac{k \cdot \rho \cdot a}{R}\right) \\ \Rightarrow \underline{U}_p^k(\rho) &= A_0 \cdot 2\pi a R \cdot \frac{J_1(k \cdot a \cdot \rho/R)}{k \cdot \rho} \end{aligned}$$

f) Deformation der Kreisblende zur elliptischen Blende \Rightarrow Beugungsfigur zeigt elliptischen Charakter! zur Orientierung: ÄHNLICHKEITSTHEOREM!

$$F\{f(ax, by)\} = \frac{1}{|ab|} \cdot F\left[\frac{f_x}{a}, \frac{f_y}{b}\right]$$

mit $F[f_x, f_y] = F\{f(x, y)\}$

hier:

- x-Richtung: Streckung um 2 \Rightarrow Komprimierung um 2 in u-Richtung
- y-Richtung: Komprimierung um 2 \Rightarrow Streckung um 2 in v-Richtung
- keine Änderung bzgl. Vorfaktoren, da $\left|\frac{1}{ab}\right|$ hier: $\frac{1}{2 \cdot 1/2} = 1$ ist!

Intensitätsverteilung der elliptischen Blende (qualitative):

5. Aufgabe: 2D-Fouriertransformation

(16 Punkte + 6 Zusatzpunkte)

Gegeben sei die 2D-Gaußfunktion zu $g(x, y) = \exp[-\pi \cdot (x^2 + y^2)/\sigma^2]$. Zur Diskretisierung dieser 2D-Gaußfunktion wird $g(x, y)$ mit der periodischen 2D-Kammfunktion

$$a(x, y) = \text{comb}\left(\frac{x}{X}\right) \text{comb}\left(\frac{y}{Y}\right),$$

die in Bild 5.1 präsentiert ist, multipliziert, wobei $\text{comb}\left(\frac{x}{X}\right) = X \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nX)$.

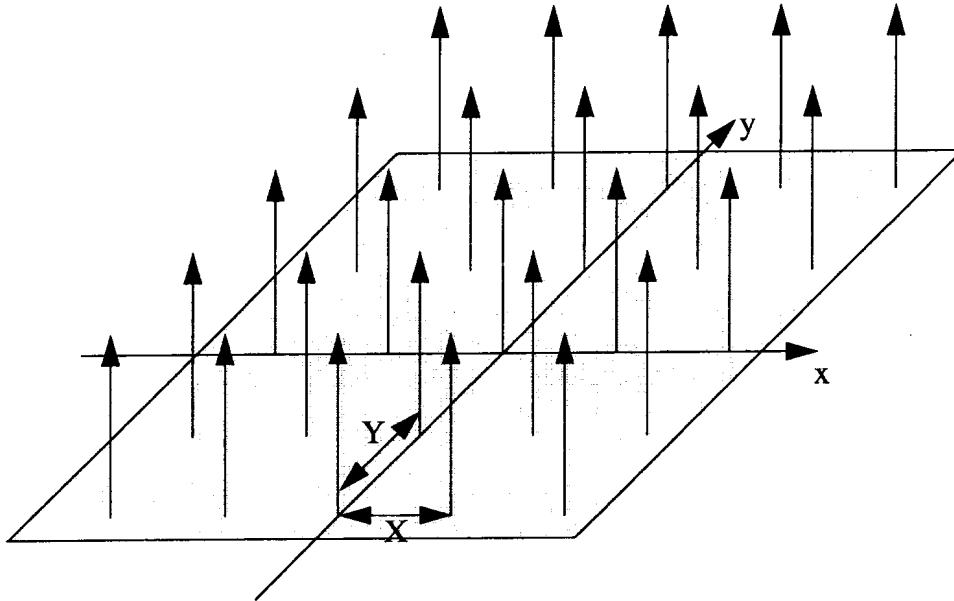


Bild 5.1: Periodische 2D-Kammfunktion.

- 5.1 Leiten Sie die 2D-Fouriertransformierte der stetigen Gaussfunktion, also $\underline{G}(f_x, f_y) = \mathfrak{S}\{g(x, y)\}$ her. Was fällt Ihnen an dem Fourierpaar auf? (4 Punkte)
- 5.2 Bestimmen Sie die 2D-Fouriertransformierte $\underline{A}(f_x, f_y)$ der „idealen 2D-Abtastfunktion“ $a(x, y)$. Hinweis: $\delta(x) \cdot \delta(y) = \delta(x, y)$ (2 Punkte)
- 5.3 Berechnen Sie das 2D-Fourier-Spektrum $\underline{G}_s(f_x, f_y) = \mathfrak{S}\{g_s(x, y)\}$ (2 Punkte)

Um das Signal $g(x, y)$ unverfälscht zurück zu gewinnen, wird das Signal $g_s(x, y)$ nun mit einem linearen, räumlich invarianten System gefiltert (Siehe Bild 5.2). Dieses Filter besitzt folgende Systemübertragungsfunktion

$$\underline{H}(f_x, f_y) = \text{rect}\left(\frac{f_x}{2B_x}\right) \text{rect}\left(\frac{f_y}{2B_y}\right)$$

Bitte wenden!

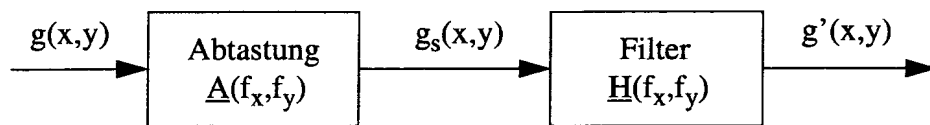


Bild 5.2: Übertragungssystem.

- 5.4 Bestimmen Sie die zweidimensionale Fourier-Rücktransformierte $h(x, y) = \mathcal{S}^{-1}\{\underline{H}(f_x, f_y)\}$. (3 Punkte)
- 5.5 Wie groß müssen die Abtastfrequenzen $1/X$ und $1/Y$ mindestens gewählt werden, damit das Signal $g(x, y)$ unverfälscht zurückgewonnen werden kann? Begründen Sie Ihre Entscheidung durch einer Skizze. (2 Punkte)
- 5.6 Wie sieht dann das nach dem Filter zurückgewonnene Signal $g'(x, y)$ aus? (3 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 5.Z.1 Berechnen Sie die ideale abgetastete Gaussfunktion, also das Abtastprodukt $g_s(x, y) = a(x, y) \cdot g(x, y)$. (2 Punkte)
- 5.Z.2 Beweisen Sie das Ähnlichkeitstheorem $\mathcal{S}\{f(ax, by)\} = \frac{1}{|ab|} \cdot \underline{F}\left(\frac{f_x}{a}, \frac{f_y}{b}\right)$ und das Verschiebungstheorem $\mathcal{S}\{f(x-a, y-b)\} = \underline{F}(f_x, f_y) \cdot e^{-j2\pi \cdot (f_x a + f_y b)}$. (4 Punkte)

Aufgabe 5

5.1 $g_s(x, y) = a(x, y) \cdot g(x, y)$

$$= \text{comb}\left(\frac{x}{X}\right) \cdot \text{comb}\left(\frac{y}{Y}\right) \cdot g(x, y)$$

$$= \left[X \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nX) \cdot Y \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(y - mY) \right] g(x, y)$$

$$= XY \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nX) \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(y - mY) \right] g(x, y)$$

$$= XY \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nX) \delta(y - mY) \right] g(x, y)$$

$$= XY \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g(nX, mY) \delta(x - nX, y - mY)$$

$$= XY \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi[(nX)^2 + (mY)^2]}{\sigma^2}} \delta(x - nX, y - mY)$$

5.2 $G(b_x, b_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\pi}{\sigma^2}(x^2 + y^2)\right) \exp(-j2\pi(b_x x + b_y y)) dx dy$ (0,5)

$$G(b_x, b_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\pi}{\sigma^2} x^2 - j2\pi b_x x\right) dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\pi}{\sigma^2} y^2 - j2\pi b_y y\right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\pi}{\sigma^2} (x^2 + j2\sigma^2 b_x x)\right) dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\pi}{\sigma^2} (y^2 + j2\sigma^2 b_y y)\right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\pi}{\sigma^2} (x^2 - j2\sigma^2 b_x x + (j\sigma^2 b_x)^2 - (j\sigma^2 b_x)^2)\right) dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\pi}{\sigma^2} (y^2 - 2j\sigma^2 b_y y + (j\sigma^2 b_y)^2 - (j\sigma^2 b_y)^2)\right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\pi\sigma^2 b_x^2\right) \cdot \exp\left(\left(x + (j\sigma^2 b_x)\right)^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{\sigma^2}\right)\right) dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\pi\sigma^2 b_y^2\right) \exp\left(\left(y + (j\sigma^2 b_y)\right)^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{\sigma^2}\right)\right) dy$$
 (0,5)

$$G(b_x, b_y) = \exp(-\pi \sigma^2 f^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp((x + j\sigma^2 f_x)^2 \cdot (-\frac{\pi}{\sigma^2})) dx \quad \text{1. Integral}$$

$$\exp(-\pi \sigma^2 f^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp((y + j\sigma^2 f_y)^2 \cdot (-\frac{\pi}{\sigma^2})) dy \quad \text{2. Integral}$$

mit $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2\sigma'^2} (x-\mu)^2) dx = \sqrt{2\pi} \sigma'$ folgt:

1. Integral $\mu = j\sigma^2 f_x \Rightarrow \mu = -j\sigma^2 f_x$

$$\frac{\pi}{\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma'^2} \Rightarrow \sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}$$

2. Integral: $-\mu = j\sigma^2 f_y \Rightarrow \mu = -j\sigma^2 f_y$

$$\frac{\pi}{\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma'^2} \Rightarrow \sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}$$

$$G(b_x, b_y) = \exp(-\pi \sigma^2 f^2) \sqrt{2\pi} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp(-\pi \sigma^2 f^2) \sqrt{2\pi} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \sigma^2 e^{-(\pi \sigma^2 f_x^2 + \pi \sigma^2 f_y^2)} = \sigma^2 e^{-\pi \sigma^2 (b_x^2 + b_y^2)}$$

Die Fouriertransformierte eines 2D Gaußimpulses weist ebenfalls Gaußcharakter auf. Gauß bleibt Gauß.

5.2 $A(b_x, b_y) = \hat{F}\left\{ \text{comb}\left(\frac{x}{X}\right) \cdot \text{comb}\left(\frac{y}{Y}\right) \right\}$

$$= \hat{F}\left\{ \text{comb}\left(\frac{x}{X}\right) \right\} \cdot \hat{F}\left\{ \text{comb}\left(\frac{y}{Y}\right) \right\}$$

$$= \hat{F}\left\{ X \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nX) \right\} \cdot \hat{F}\left\{ Y \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(y - mY) \right\}$$

$$= X \hat{F}\left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nX) \right\} \cdot Y \hat{F}\left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(y - mY) \right\}$$

$$= X Y \frac{1}{X} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f_x - \frac{n}{X}\right) \cdot \frac{1}{Y} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f_y - \frac{m}{Y}\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f_x - \frac{n}{X}\right) \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f_y - \frac{m}{Y}\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f_x - \frac{n}{X}\right) \cdot \delta\left(f_y - \frac{m}{Y}\right)$$

$$A(b_x, b_y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(b_x - \frac{n}{X}, b_y - \frac{m}{Y}\right) \quad (0.5)$$

5.3

$$G_s(b_x, b_y) = \frac{A(b_x, b_y)}{b_x b_y} * G(b_x, b_y)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(b_x - \frac{n}{X}, b_y - \frac{m}{Y}\right) * G(b_x, b_y)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G\left(b_x - \frac{n}{X}, b_y - \frac{m}{Y}\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sigma^2 \exp\left(-\pi \sigma^2 \left[\left(b_x - \frac{n}{X}\right)^2 + \left(b_y - \frac{m}{Y}\right)^2\right]\right)$$

$$= \sigma^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \sigma^2 \left[\left(b_x - \frac{n}{X}\right)^2 + \left(b_y - \frac{m}{Y}\right)^2\right]}$$

5.4

$$h(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} H(b_x, b_y) \exp[j2\pi(b_x x + b_y y)] db_x db_y$$

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{b_x}{2B_x}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{b_y}{2B_y}\right) \cdot \exp(j2\pi b_x x) \cdot \exp(j2\pi b_y y) db_x db_y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{b_x}{2B_x}\right) \exp(j2\pi b_x x) db_x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{b_y}{2B_y}\right) \exp(j2\pi b_y y) db_y$$

$$= \int_{-B_x}^{B_x} \exp(j2\pi b_x x) db_x \cdot \int_{-B_y}^{B_y} \exp(j2\pi b_y y) db_y$$

$$= \frac{1}{j2\pi x} \left(e^{+j2\pi B_x x} - e^{-j2\pi B_x x} \right) \cdot \frac{1}{j2\pi y} \left(e^{+j2\pi B_y y} - e^{-j2\pi B_y y} \right)$$

$$= \frac{1}{j2\pi x} \cdot 2j \sin(2\pi B_x x) \cdot \frac{1}{j2\pi y} \cdot 2j \sin(2\pi B_y y)$$

$$= 2B_x \frac{\sin(2\pi B_x x)}{2\pi B_x x} \cdot 2B_y \frac{\sin(2\pi B_y y)}{2\pi B_y y}$$

$$= 4B_x B_y \cdot \text{sinc}(2B_x x) \cdot \text{sinc}(2B_y y)$$

5.6 $\frac{1}{x} \geq 2B_x$ und $\frac{1}{y} \geq 2B_y$.

siehe Bild I

5.6

$$\begin{aligned}
 g'_x(x, y) &= g_s(x, y) * h(x, y) \\
 &= xy \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g(nx, my) \delta(x-nx, y-my) * \\
 &\quad 2B_x B_y \operatorname{sinc}(2B_x x) \operatorname{sinc}(2B_y y) \\
 &= 4xy B_x B_y \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g(nx, my) \operatorname{sinc}(2B_x(x-nx)) \cdot \\
 &\quad \operatorname{sinc}(2B_y(y-my)).
 \end{aligned}$$

mit $x = \frac{1}{2B_x}$ $y = \frac{1}{2B_y}$

$$\begin{aligned}
 g'_x(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{n}{2B_x}, \frac{m}{2B_y}\right) \operatorname{sinc}\left[2B_x\left(x - \frac{n}{2B_x}\right)\right] \operatorname{sinc}\left[2B_y\left(y - \frac{m}{2B_y}\right)\right] \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{n}{2B_x}, \frac{m}{2B_y}\right) \operatorname{sinc}\left(2B_x x - n\right) \operatorname{sinc}\left(2B_y y - m\right)
 \end{aligned}$$

=> Whittaker-Shannon Abtasttheorem!

Zusatzaufgabe:

$$\begin{aligned}
 \underline{5.7.2} \quad \mathcal{F}\{f(ax, by)\} &= \iint_{-\infty}^{+\infty} f(ax, by) \exp(-j\pi(b_x x + b_y y)) dx dy \\
 &= \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp(-j\pi\left(\frac{b_x}{a} ax + \frac{b_y}{b} by\right)) \frac{dx}{|a|} \frac{dy}{|b|} \\
 &= \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{b_x}{a}, \frac{b_y}{b}\right).
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}\{f(x-a, y-b)\} = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x-a, y-b) \exp(-j\pi(b_x x + b_y y)) dx dy$$

$$\mathcal{F}\{f(x-a, y-b)\} = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x', y') \cdot \exp(-j2\pi(b_x(x'+a) + b_y(y'+b))) dx' dy'$$

$$= \underline{F}(b_x, b_y) \cdot \exp(-j2\pi(b_x a + b_y b))$$

Bild I

