

Übungen Theoretische Elektrotechnik III: Blatt 1

Aufgabe 1: Transformation von Einheitsvektoren

Geben Sie die kartesischen Einheitsvektoren \vec{e}_x , \vec{e}_y und \vec{e}_z in den Einheitsvektoren des Zylinderkoordinatensystemes \vec{e}_ρ , \vec{e}_ϕ und \vec{e}_z an!

Hinweis: Zeichnen Sie ein kartesisches Koordinatensystem, indem Sie auch die Einheitsvektoren des Zylinderkoordinatensystems eintragen und die geometrischen Verhältnisse ausnutzen.

Aufgabe 2: Feld einer Punktladung (Teil 1)

Gegeben sei eine Punktladung q_0 im Raumpunkt \vec{r}_0 . Geben Sie die Coulombsche Formel für die elektrische Feldstärke \vec{E} der Punktladung in einem beliebigen Raumpunkt \vec{r} in kartesischen Koordinaten und in Zylinderkoordinaten an!

Aufgabe 3: Volumenelement dV

Zeigen Sie anschaulich, daß für ein Volumenelement dV in Kugelkoordinaten gilt:

$$dV = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$

Aufgabe 4: Satz von Stokes bzw. von Gauß

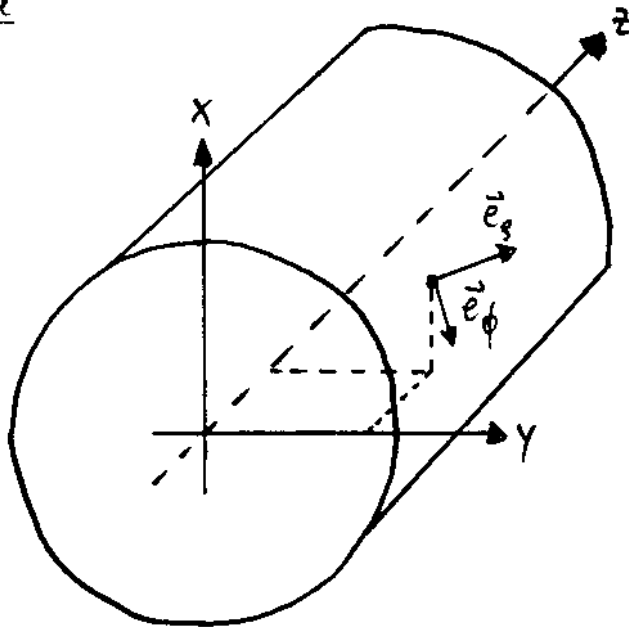
Verifizieren Sie anschaulich den Satz von Stokes und den Satz von Gauß!

Aufgabe 5: grad, div, rot, Δ in Zylinderkoordinaten

Geben Sie einen Ausdruck für $\text{grad}\phi$, $\text{div}\vec{a}$, $\text{rot}\vec{a}$ und $\Delta\phi$ in Zylinderkoordinaten an.

Hinweis: Siehe z. B.: Lehner, G.: „Elektromagnetische Feldtheorie für Ingenieure und Physiker“, 3. Auflage, Springer Verlag, Berlin 1996, S. 118ff; elt 310_077

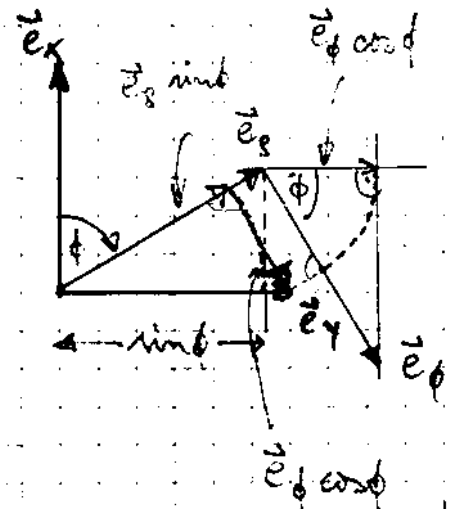
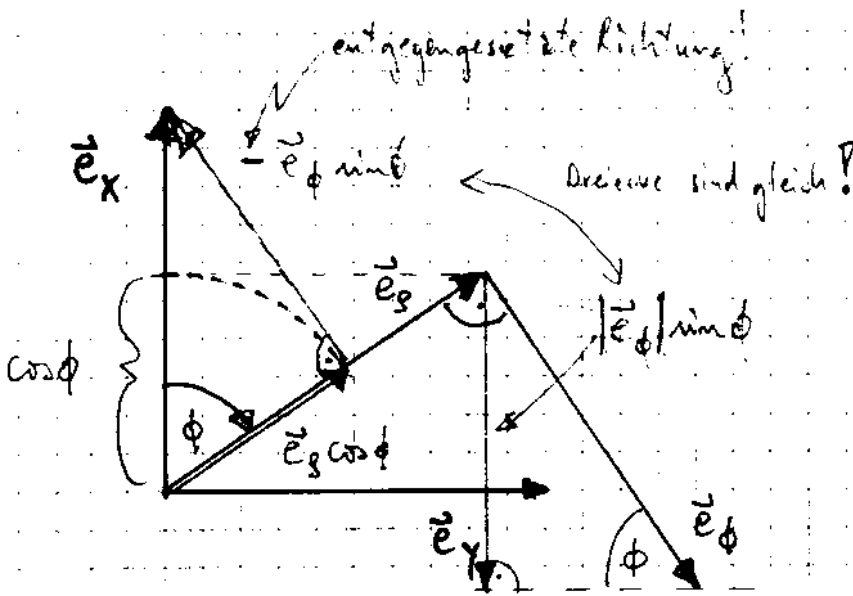
1. Aufgabe



$$\vec{e}_z = \vec{e}_z$$

Erkenntnis: Im Gegensatz zum kartesischen Koordinatensystem haben die beiden Basisvektoren \vec{e}_s und \vec{e}_ϕ des Zylinderkoordinatensystemes je nach Lage im Raum eine andere Richtung, d.h.

$$\vec{e}_s = \vec{e}_s(\phi) \quad \text{und} \quad \vec{e}_\phi = \vec{e}_\phi(\phi)$$



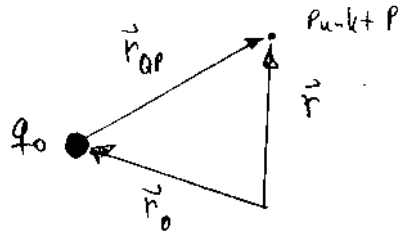
Beachte: $|\vec{e}| = 1!$

$$\Rightarrow \vec{e}_x = \vec{e}_s \cos \phi - \vec{e}_\phi \sin \phi$$

$$\Rightarrow \vec{e}_y = \vec{e}_s \sin \phi + \vec{e}_\phi \cos \phi$$

2. Aufgabe

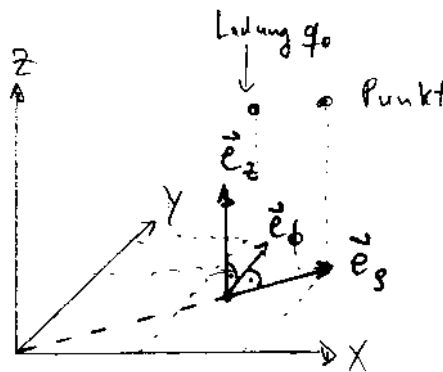
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_{QP}}{|\vec{r}_{QP}|^2} \quad \text{wo} \quad \vec{r}_{QP} = \vec{r} - \vec{r}_0$$



kart. Koord.: $\vec{r}_{QP} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$; $|\vec{r}_{QP}| = \sqrt{\vec{r}_{QP} \cdot \vec{r}_{QP}} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

Zylinderkoordinaten:



$$\vec{e}_s \cdot \vec{e}_z = 0$$

anschaulich klar: $\vec{r} = s \cdot \vec{e}_s(\phi) + z \vec{e}_z$

$$\vec{r}_0 = s_0 \vec{e}_s(\phi_0) + z_0 \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{QP} = \vec{r} - \vec{r}_0 = s \vec{e}_s(\phi) - s_0 \vec{e}_s(\phi_0) + (z - z_0) \vec{e}_z$$

$$|\vec{r}_{QP}| = \sqrt{\vec{r}_{QP} \cdot \vec{r}_{QP}} = \sqrt{s^2 \underbrace{\vec{e}_s(\phi) \cdot \vec{e}_s(\phi)}_{=1} + s_0^2 \underbrace{\vec{e}_s(\phi_0) \cdot \vec{e}_s(\phi_0)}_{=1} + \dots}$$

$$\dots + (z - z_0)^2 \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z}_{=1} - 2 s s_0 \underbrace{\vec{e}_s(\phi) \cdot \vec{e}_s(\phi_0)}_{=|\vec{e}_s(\phi)| \cdot |\vec{e}_s(\phi_0)| \cdot \cos(\phi - \phi_0)}$$

$$\dots + 2 s (z - z_0) \underbrace{\vec{e}_s(\phi) \cdot \vec{e}_z}_{=0} - 2 s_0 (z - z_0) \underbrace{\vec{e}_s(\phi_0) \cdot \vec{e}_z}_{=0}$$

2.

$$\text{NB: } \vec{e}_s(\phi) \cdot \vec{e}_s(\phi_0) = (\cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y) \cdot (\cos \phi_0 \vec{e}_x + \sin \phi_0 \vec{e}_y)$$

$$\text{weil } \vec{e}_s(\phi) = \cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y$$

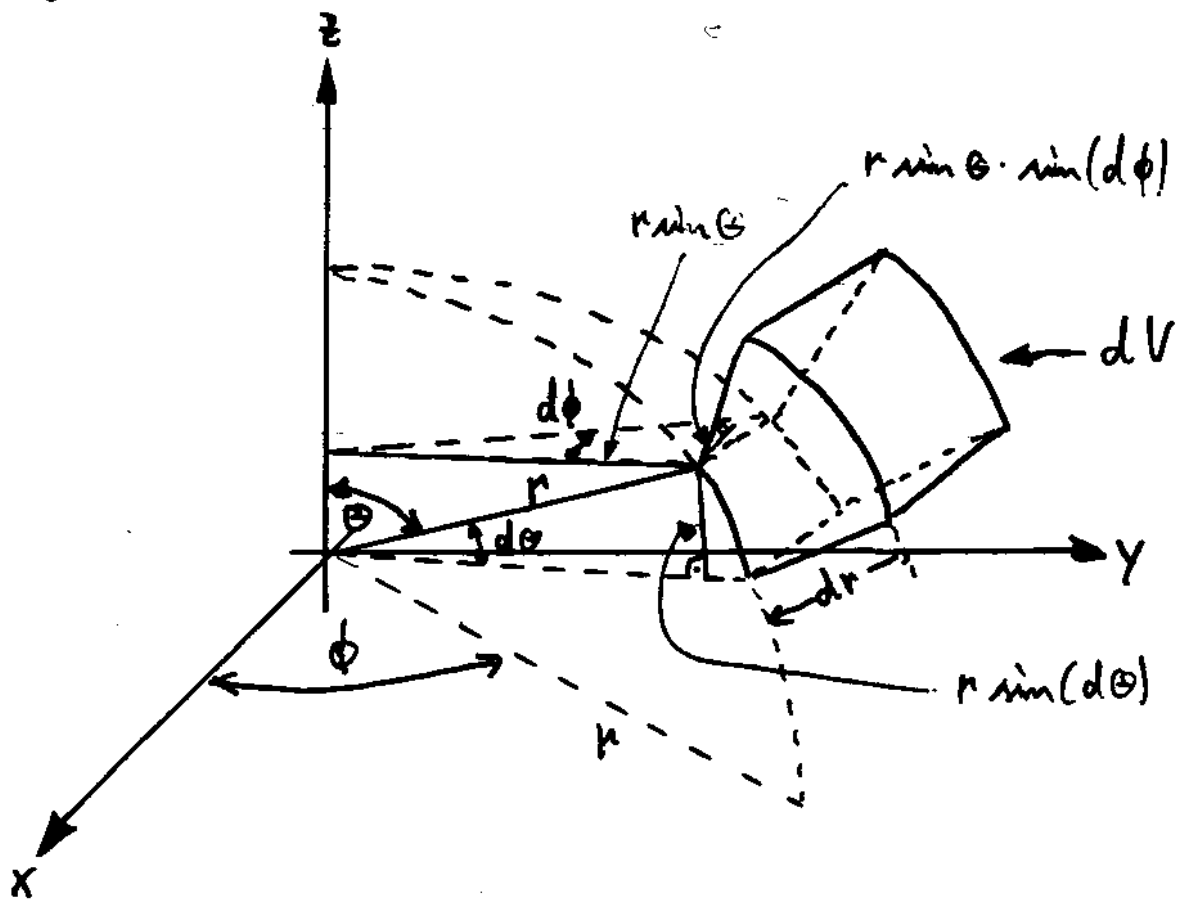
$$\vec{e}_s(\phi) \cdot \vec{e}_s(\phi_0) = \cos \phi \cos \phi_0 \underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x}_{=1} + \sin \phi \sin \phi_0 \underbrace{\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y}_{=1} + 0 + 0$$

$$= \cos \phi \cos \phi_0 + \sin \phi \sin \phi_0 = \cos(\phi - \phi_0)$$

$$=0 \quad \left| \vec{r}_{QP} \right| = \sqrt{s^2 + s_0^2 + (z-z_0)^2 - 2 s s_0 \cos(\phi - \phi_0)}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(s, z) = \frac{q_0}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{[s^2 + s_0^2 + (z-z_0)^2 - 2 s s_0 \cos(\phi - \phi_0)]^{3/2}} \cdot \left\{ s \vec{e}_s(\phi) - s_0 \vec{e}_s(\phi_0) + (z-z_0) \vec{e}_z \right\}$$

3. Aufgabe



Für den Quader dV gilt:

$$dV \approx \underbrace{r \sin(d\theta) \cdot r \sin \theta \sin(d\phi)}_{\text{Grundfläche}} \cdot \underbrace{dr}_{\text{Höhe}}$$

Es gilt für kleine Winkel: $\sin \alpha \approx \alpha$

hier: $d\theta, d\phi \rightarrow 0$ aber $\neq 0$

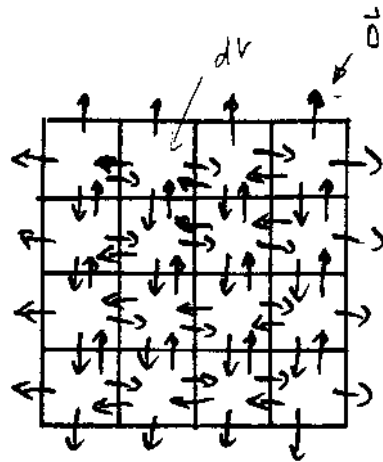
$$\Rightarrow \sin(d\theta) = d\theta \quad ; \quad \sin(d\phi) = d\phi$$

$$\Rightarrow dV = r d\theta r \sin \theta d\phi dr$$

$$\boxed{dV = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr}$$

4. Aufgabe

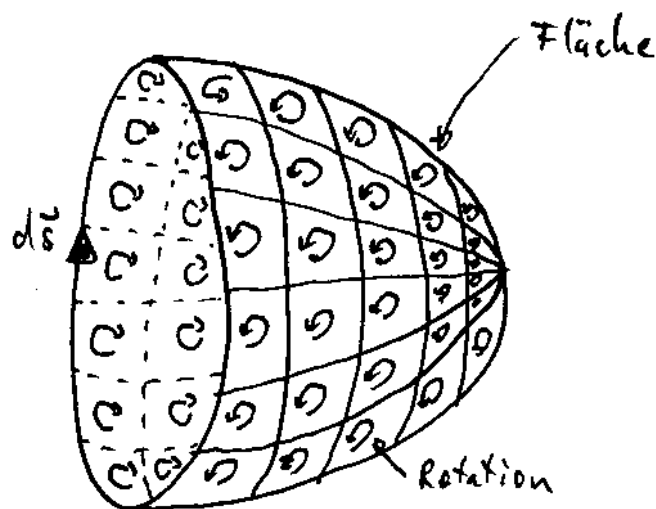
Satz von Gauß: $\oiint_{\text{Oberfläche}} \vec{D} \, d\vec{A} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{D} \, dV$



In jedem kleinen Volumen dV entsteht oder verschwindet ein Fluß.

Jedoch der gesamte Fluß ergibt sich durch den Fluß durch die gesamte Hülle, und nur durch diese!

Satz von Stokes: $\oint \vec{F} \, d\vec{s} = \iint_{\text{Fläche}} \operatorname{rot} \vec{F} \, d\vec{A}$



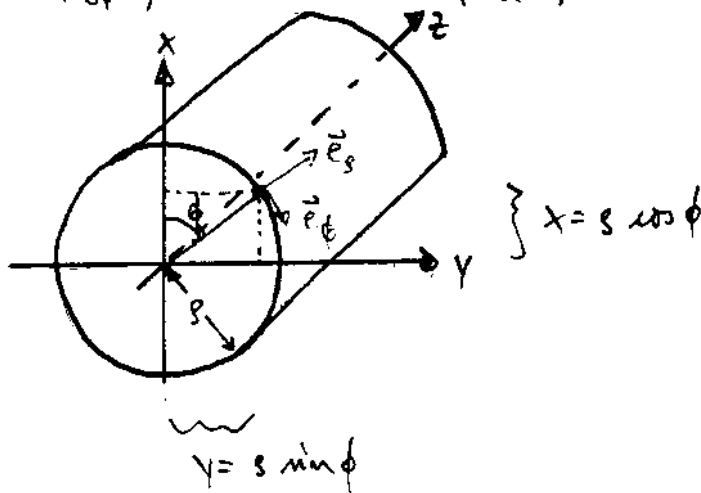
Man erkennt, daß sich die Wirbel an den Grenzflächen der "Unterflächen" gegenseitig aufheben. Nur entlang der Linie, die nicht mehr begrenzt wird bleibt ein Anteil der Wirbel (Rotation) übrig!

5. Aufgabe

Vorbemerkungen:

$$\vec{t}_1 = \text{Tangentenvektor} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial s} \end{pmatrix}$$

$$\vec{t}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix}, \quad \vec{t}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow \vec{t}_1 = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{t}_2 = \begin{pmatrix} -s \sin \phi \\ s \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{t}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{t_1 = |\vec{t}_1| = 1}, \quad \boxed{t_2 = |\vec{t}_2| = \sqrt{s^2 \sin^2 \phi + s^2 \cos^2 \phi} = s \cdot \sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi}}$$

$$\boxed{t_2 = s}$$

$$\boxed{t_3 = 1}$$

$$\boxed{\text{grad } \varphi = \begin{pmatrix} \frac{1}{t_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s} \\ \frac{1}{t_2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \\ \frac{1}{t_3} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \\ \frac{1}{s} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix}}$$

5.

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{t_1 t_2 t_3} \left[\frac{\partial}{\partial s} \{ a_s t_2 t_3 \} + \frac{\partial}{\partial \phi} \{ a_\phi t_1 t_3 \} + \frac{\partial}{\partial z} \{ a_z t_1 t_2 \} \right]$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{s} \left[\frac{\partial}{\partial s} \{ s \cdot a_s \} + \frac{\partial}{\partial \phi} \{ a_\phi \} + \frac{\partial}{\partial z} \{ a_z s \} \right]$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_s & \vec{e}_\phi & \vec{e}_z \\ t_1 t_2 & t_1 t_3 & t_1 t_2 \\ \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_s t_1 & a_\phi t_2 & a_z t_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{e}_s}{s} & \vec{e}_\phi & \frac{\vec{e}_z}{s} \\ \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_s & a_\phi s & a_z \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_s \cdot \frac{1}{s} \left[\frac{\partial a_s}{\partial \phi} - s a_\phi \frac{\partial}{\partial z} \right] - \vec{e}_\phi \left[\frac{\partial}{\partial s} a_z - a_s \frac{\partial}{\partial z} \right] + \vec{e}_z \frac{1}{s} \left[\frac{\partial}{\partial s} (a_\phi s) - a_s \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{e}_s \left[\frac{1}{s} \frac{\partial a_s}{\partial \phi} - \frac{\partial a_\phi}{\partial z} \right] + \vec{e}_\phi \left[\frac{\partial a_s}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial s} \right] + \vec{e}_z \frac{1}{s} \left[\frac{\partial (a_\phi s)}{\partial s} - \frac{\partial a_s}{\partial \phi} \right]$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{t_1 t_2 t_3} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{t_2 t_3}{t_1} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right\} + \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \frac{t_1 t_3}{t_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{t_1 t_2}{t_3} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{s} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left\{ s \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right\} + \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \frac{1}{s} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ s \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\} \right]$$

$s \neq s(\phi)$! (Länge ist unabhängig vom Winkel)

bzw. $s \neq s(z)$!

$$\Rightarrow \Delta \varphi = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ s \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right\} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

Übungen Theoretische Elektrotechnik III: Blatt 2

Aufgabe 6: Feld einer Punktladung (Teil 2)

Gegeben sei eine Punktladung q_0 im Raumpunkt \vec{r}_0 . Geben Sie die Coulombsche Formel für die elektrische Feldstärke \vec{E} der Punktladung in einem beliebigen Raumpunkt \vec{r} in Kugelkoordinaten an!

Aufgabe 7: Transformation von Vektorfeldern

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{A}(r, \theta, \phi) = r \sin \theta \cos \phi \vec{e}_r + r \cos \theta \cos \phi \vec{e}_\theta - r \sin \phi \vec{e}_\phi$ in Kugelkoordinaten. Rechnen Sie es in kartesische Koordinaten um!

Aufgabe 8: Graßmannscher Entwicklungssatz

Beweisen Sie, daß gilt:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \quad \text{mit } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$$

Aufgabe 9: Rechnen mit dem Nabla-Operator

Zeigen Sie die Richtigkeit der beiden folgenden Formeln, indem Sie formal mit dem Nabla-Operator rechnen:

a. $\text{div rot } \vec{A} = 0, \quad \vec{A} \in \mathbb{R}^3$

b. $\text{rot grad } \varphi = \vec{0}$

Aufgabe 10: Gradient und Ortsvektor

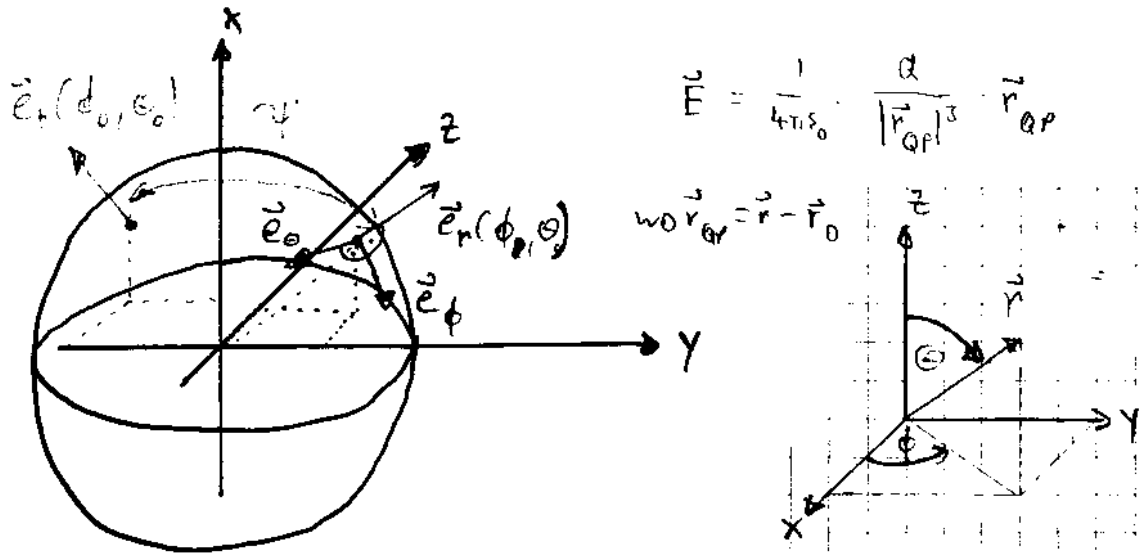
Zeigen Sie durch Einführung des kartesischen Koordinatensystems, daß gilt:

$$\text{grad}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}_0|} = \vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}_0|} = -\frac{\vec{r} - \vec{R}_0}{|\vec{r} - \vec{R}_0|^3},$$

wobei \vec{r} der Ortsvektor, \vec{R}_0 ein fester Punkt und $\vec{\nabla}_r$ die Differentiation bezüglich des Ortsvektors bedeutet.

6 Aufgabe

Kugelkoordinaten



Der Anschauung entnehmen man: $\vec{r} = \vec{e}_r(\phi, \theta) \cdot r$
 $\vec{r}_0 = \vec{e}_r(\phi_0, \theta_0) \cdot r_0$

$$\Rightarrow \vec{r}_{0r} = r \cdot \vec{e}_r(\phi, \theta) - r_0 \cdot \vec{e}_r(\phi_0, \theta_0)$$

$$|\vec{r}_{0r}| = \sqrt{\vec{r}_{0r} \cdot \vec{r}_{0r}} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \underbrace{\vec{e}_r(\phi, \theta) \cdot \vec{e}_r(\phi_0, \theta_0)}_{= \text{Skalarprodukt} =: \cos \psi}}$$

$$|\vec{r}_{0r}| = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\psi)} \quad ; \quad \psi = \psi(\phi, \theta) \quad \nabla$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r, \phi, \theta) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{[r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \psi]^{\frac{3}{2}}} \cdot [r \vec{e}_r(\phi, \theta) - r_0 \vec{e}_r(\phi_0, \theta_0)]$$

Nebenrechnung: $\vec{e}_r = \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z$

$$\vec{e}_r(\phi, \theta) \cdot \vec{e}_r(\phi_0, \theta_0) = \sin \theta \cos \phi \cdot \sin \theta_0 \cos \phi_0 + \sin \theta \sin \phi \cdot \sin \theta_0 \sin \phi_0 + \cos \theta \cos \theta_0$$

= $\cos \psi(\phi, \theta)$ weil $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0$

$$= \sin \theta \sin \theta_0 [\cos \phi \cos \phi_0 + \sin \phi \sin \phi_0] + \cos \theta \cos \theta_0$$

$$\cos(\psi(\phi, \theta, \phi_0, \theta_0)) = \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\phi - \phi_0) + \cos \theta \cos \theta_0$$

7. Aufgabe

$$\text{NB: } \begin{aligned} \vec{e}_r &= \vec{e}_x \sin\theta \cos\phi + \vec{e}_y \sin\theta \sin\phi + \vec{e}_z \cos\theta \\ \vec{e}_\theta &= \vec{e}_x \cos\theta \cos\phi + \vec{e}_y \cos\theta \sin\phi - \vec{e}_z \sin\theta \\ \vec{e}_\phi &= -\vec{e}_x \sin\phi + \vec{e}_y \cos\phi \end{aligned}$$

$$\vec{A}(r, \theta, \phi) = r \sin\theta \cos\phi \vec{e}_r + r \cos\theta \cos\phi \vec{e}_\theta - r \sin\phi \vec{e}_\phi$$

$$\vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\phi \cdot \sin\theta \cos\phi + r \cos\theta \cos\phi \cos\theta \cos\phi - (-r \sin\phi) \sin\phi \\ r \sin\theta \cos\phi \sin\theta \sin\phi + r \cos\theta \cos\phi \cos\theta \sin\phi + (-r \sin\phi) \cdot \cos\phi \\ r \sin\theta \cos\phi \cos\theta - r \cos\theta \cos\phi \cdot \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r \sin^2\theta \cos^2\phi + r \cos^2\theta \cos^2\phi + r \sin^2\phi \\ r \sin^2\theta \sin\phi \cos\phi + r \cos^2\theta \sin\phi \cos\phi - r \sin\phi \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r \cos^2\phi [\sin^2\theta + \cos^2\theta] + r \sin^2\phi \\ r \sin\phi \cos\phi [\sin^2\theta + \cos^2\theta] - r \sin\phi \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{NB: } \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$= \begin{pmatrix} r \cos^2\phi + r \sin^2\phi \\ r \sin\phi \cos\phi - r \sin\phi \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\Rightarrow \vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

etwas einfacher, als die ursprüngliche Darstellung!

8. Aufgabe

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad \text{Graßmannscher Entwicklungssatz}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \left\{ \vec{e}_x [b_2 c_3 - b_3 c_2] - \vec{e}_y [b_1 c_3 - b_3 c_1] + \vec{e}_z [b_1 c_2 - b_2 c_1] \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 c_3 - b_3 c_2 & b_3 c_1 - b_1 c_3 & b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_x [a_1 b_1 c_2 - a_2 b_2 c_1 - a_3 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_3] - \dots$$

$$\dots + \vec{e}_y [-a_1 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_1 + a_3 b_2 c_3 + a_3 b_3 c_2] + \dots$$

$$\dots + \vec{e}_z [a_1 b_3 c_1 - a_1 b_1 c_3 - a_2 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_2]$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 [a_2 c_2 + a_3 c_3 + a_1 b_1] \\ b_2 [a_1 c_1 + a_3 c_3 + a_2 c_2] \\ b_3 [a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 [a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_1 b_1] \\ c_2 [a_1 b_1 + a_3 b_3 + a_2 b_2] \\ c_3 [a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3] \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{= \vec{a} \cdot \vec{c}} \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{15em}}_{= \vec{a} \cdot \vec{b}}$

$$\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}} \quad \text{q. e. d.}$$

9. Aufgabe

$$a \quad \text{div } \underbrace{\text{rot } \vec{A}}_{\text{Vektor}} = 0$$

$$\vec{\nabla}(\text{Vektor}) = \text{Skalar} = \text{div}$$

$$\vec{\nabla}(\text{Skalar}) = \text{Vektor} = \text{grad}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$$

Spatprodukt \Rightarrow zyklisch vertauschbar

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla})}_{=\vec{0}} \cdot \vec{A} = \vec{0} \cdot \vec{A} = 0 \quad \text{Skalar!}$$

$$b. \quad \text{rot grad } \varphi = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi = \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla})}_{=\vec{0}} \varphi = \vec{0} \cdot \varphi = \vec{0}$$

10. Aufgabe

$$\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = - \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$

Einführung von kartesischen Koordinaten:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} : \text{konstanter (= fester) Punkt}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

$$\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \right\} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \cdot 2(x-x_0) \cdot 1 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \right\} = - \frac{x-x_0}{\left[\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \right]^3}$$

$$\text{analog: } \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \dots \right\} = - \frac{y-y_0}{\left[\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \right]^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \dots \right\} = - \frac{z-z_0}{\left[\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \right]^3}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = - \frac{1}{\left[\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \right]^3} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}$$

$$= - \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \quad \text{q. e. d.}$$

Übungen Theoretische Elektrotechnik III: Blatt 3

Aufgabe 11: Feld einer homogen geladenen Fläche

Zuerst sei eine homogen geladene Rechteckscheibe, die unendlich dünn ist und sich im Vakuum befindet, gegeben. Die Ladung der Rechteckscheibe sei Q , siehe Abb. 1.

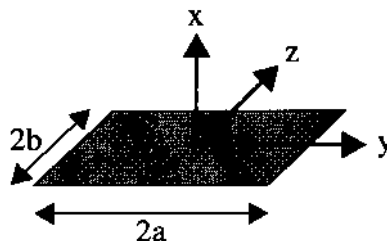


Abb. 1 Homogen geladene Rechteckscheibe

- a. Berechnen Sie für einen beliebigen Beobachtungspunkt \vec{r} die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ dieser Ladungsverteilung.

Nun sei eine unendlich dünne, homogen geladene Kreisscheibe im Vakuum gegeben. Der Radius der Scheibe sei R und die positive Ladung Q sei homogen über die Kreisscheibe verteilt, vgl. Abb. 2.

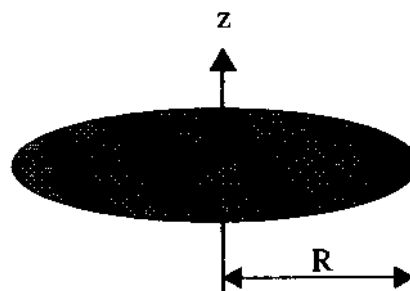
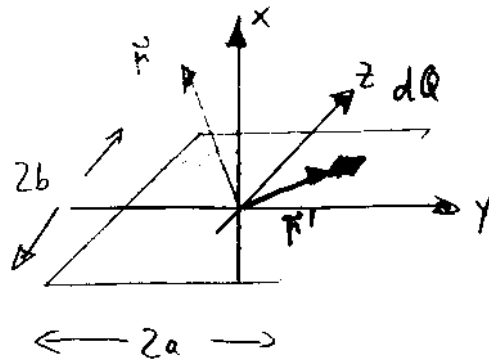


Abb. 2 Homogen geladene Kreisscheibe

- b. Berechnen Sie die von dieser Ladungsverteilung erzeugte elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ in einem beliebigen Beobachtungspunkt \vec{r} im Raum.
- c. Berechnen Sie die elektrische Feldstärke $\vec{E}(z)$, wenn der Beobachtungspunkt nun auf der Symmetrieachse durch den Mittelpunkt der Scheibe senkrecht zu dieser verläuft.

11. Aufgabe

a.



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} 0 \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = y'\vec{e}_y + z'\vec{e}_z$$

Ladung ist homogen verteilt $\Rightarrow D$ $\sigma = \frac{dQ}{dA} = \frac{Q}{2a \cdot 2b} = \frac{Q}{4ab} = \text{konst}$

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_Q \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dQ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\text{Fläche } (y', z')} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sigma dA$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{y'=-a}^{+a} \int_{z'=-b}^{+b} \frac{x\vec{e}_x + (y-y')\vec{e}_y + (z-z')\vec{e}_z}{[x^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \cdot \frac{Q}{4ab} dy' dz'$$

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{Q}{16ab\pi\epsilon_0} \int_{y'=-a}^{+a} \int_{z'=-b}^{+b} \frac{x\vec{e}_x + (y-y')\vec{e}_y + (z-z')\vec{e}_z}{[x^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dy' dz'$$

Sub: 1. $y - y' = u \Rightarrow dy' = -du$

$$y' = -a \Rightarrow u = y + a$$

$$y' = +a \Rightarrow u = y - a$$

2. $z - z' = v \Rightarrow dz' = -dv$

$$z' = -b \Rightarrow v = z + b$$

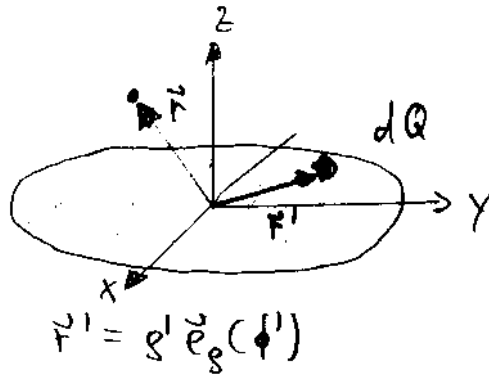
$$z' = +b \Rightarrow v = z - b$$

$$\Rightarrow \vec{E}(x, y, z) = \frac{Q}{16ab\pi\epsilon_0} \int_{u=y+a}^{y-a} \int_{v=z+b}^{z-b} \frac{x\vec{e}_x + u\vec{e}_y + v\vec{e}_z}{[x^2 + u^2 + v^2]^{3/2}} dudv$$

= 3 Integrale ...

11 Aufgabe

b.



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Ladung}} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dQ$$

$$dQ = \sigma dA = \sigma \cdot s' ds' d\phi'$$

$$\text{mit } s' \in [0, R]; \phi' \in [0, 2\pi]$$

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2} = \text{konst}$$

$$dQ = \frac{Q}{\pi R^2} s' ds' d\phi'$$

$$\vec{r} = s \vec{e}_s(\phi) + z \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{r} - \vec{r}' = s \vec{e}_s(\phi) - s' \vec{e}_s(\phi') + z \vec{e}_z$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{s^2 + s'^2 + z^2 - 2ss' \cos(\phi - \phi')}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(s, \phi, z) = \frac{Q}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \int_{s'=0}^R \frac{s \vec{e}_s(\phi) - s' \vec{e}_s(\phi') + z \vec{e}_z}{[s^2 + s'^2 + z^2 - 2ss' \cos(\phi - \phi')]^{3/2}} s' ds' d\phi'$$

PROBLEM: $\vec{e}_s(\phi')$ ist abhängig von der Integrationsvariablen ϕ' !

\Rightarrow wechsele zu einem Koordinatensystem mit konstanten Einheitsvektoren \Rightarrow führe für ~~$\vec{e}_s(\phi')$~~ $\vec{e}_s(\phi)$ kartesische Koordinaten ein

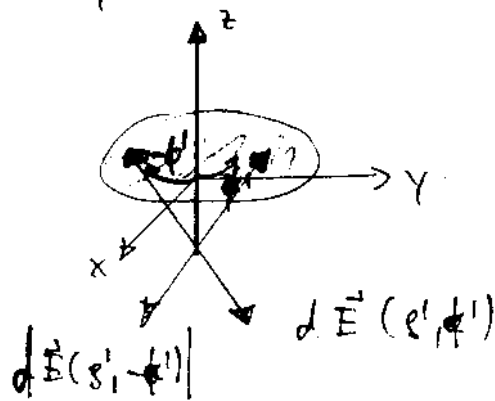
11b DOCH: 1. Symmetrie ausnutzen

da Q rotationssymmetrisch, homogen verteilt ist,
 ist $\vec{E}(s, \phi, z)$ unabhängig von ϕ , d.h. $\vec{E}(s, z)$
 \Rightarrow setze o.B.d.A. $\phi=0$ im Nenner
 $\rightarrow \vec{e}_s(\phi=0) = \vec{e}_x!$

2. $\vec{e}_s(\phi) = \cos(\phi)\vec{e}_x + \sin(\phi)\vec{e}_y$ (NB: $\cos(-\alpha) = \cos \alpha!$)

$$\Rightarrow \vec{E}(s, z) = \frac{Q}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \int_{s'=0}^R \frac{s' \vec{e}_x + z \vec{e}_z - s' [\cos \phi' \vec{e}_x + \sin \phi' \vec{e}_y]}{[s^2 + s'^2 + z^2 - 2ss' \cos \phi']^{3/2}} s' ds' d\phi'$$

2a.: Mehrmals Symmetrie:



y-Komponenten heben sich auf:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi'}{[s^2 + s'^2 + z^2 - 2ss' \cos(\phi')]^{3/2}} d\phi' = 0$$

setze nun wieder $\phi \neq 0 \Rightarrow$ die \vec{e}_x -Komponente wird die \vec{e}_s -Komponente

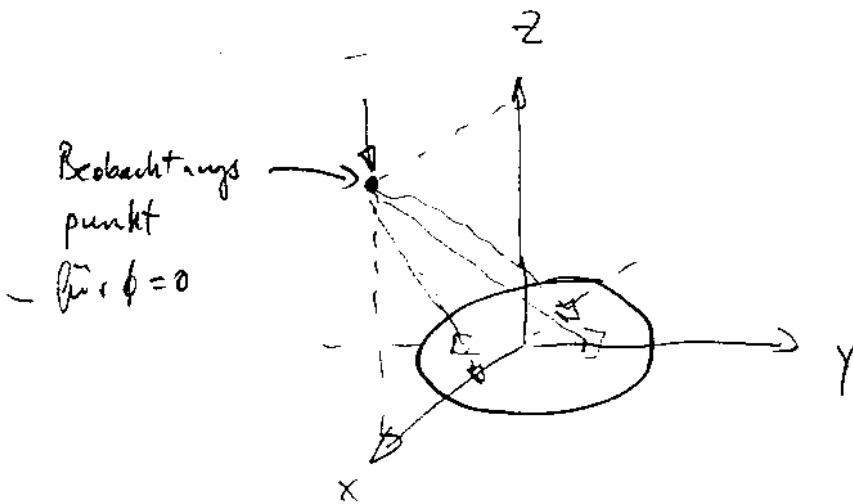
also:

$$\vec{E}(s, \phi, z) = \frac{Q}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \int_{s'=0}^R \frac{\vec{e}_s [ss' - s'^2 \cos \phi'] + z s' \vec{e}_z}{[s^2 + s'^2 + z^2 - 2ss' \cos(\phi')]^{3/2}} ds' d\phi'$$

(Elliptische Integrale \sim nicht weiter lösbar)

Anmerkung: $\vec{e}_x \hat{=} \text{den } \vec{e}_s(\phi) \text{-Vektor}$ deshalb, weil wir $\phi=0$ gesetzt haben

... $\vec{e}_x = \vec{e}_s(\phi=0)$ i.f.



x-Komponente: \square, \square haben unterschiedlichen Abstand
 zum Beobachtungspkt \rightarrow heben sich nicht auf

y-Komponente: \square, \square haben gleichen Abstand zum Beobachtungspkt
 \rightarrow heben sich auf!

11. Aufgabe

c. $\vec{E}(z)$: Feld auf der z-Achse $\Rightarrow \rho = 0$

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{Q}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \int_{s'=0}^R \frac{-\vec{e}_s \cdot s'^2 \cos \phi' + z s' \vec{e}_z}{[s'^2 + z^2]^{3/2}} ds' d\phi'$$

1. Integral: $\frac{Q}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} \int_{s'=0}^R \left[\frac{-\vec{e}_s s'^2}{[s'^2 + z^2]^{3/2}} \cdot \int_{\phi'=0}^{2\pi} \cos \phi' d\phi' \right] ds' = 0$

2. Integral: $\frac{Q}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} \cdot z \int_{\phi'=0}^{2\pi} \int_{s'=0}^R \frac{s' \vec{e}_z}{[s'^2 + z^2]^{3/2}} d\phi' ds'$

$$= \frac{Q \cdot z \cdot 2\pi}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} \int_{s'=0}^R \frac{s'}{[s'^2 + z^2]^{3/2}} ds' \cdot \vec{e}_z$$

$$= \frac{Q \cdot z}{2\pi \epsilon_0 R^2} \left[\frac{1}{\sqrt{z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{e}_z$$

$$= \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 R^2} \cdot \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{e}_z$$

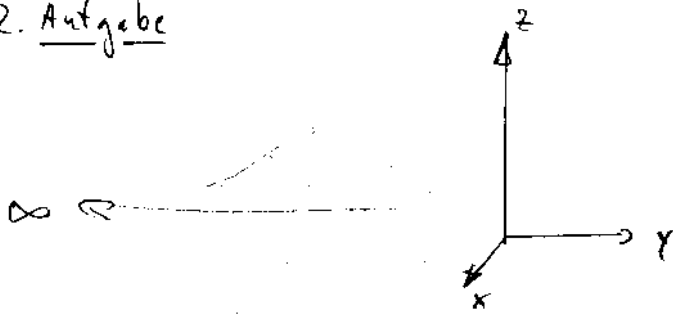
NB: $\frac{z}{|z|} = \text{sign}(z) = \begin{cases} +1, & z > 0 \\ -1, & z < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(z) = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 R^2} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{e}_z}$$

$$\frac{Q}{\pi R^2} = \sigma = \text{Ladungsdichte}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{e}_z}$$

12. Aufgabe

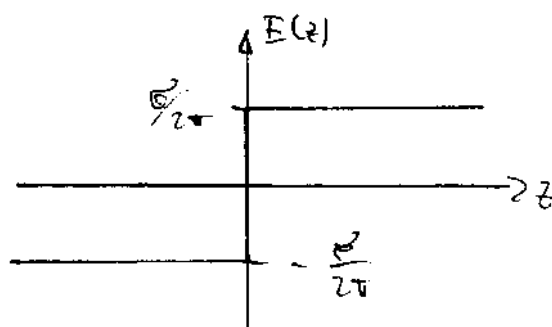


Symmetrie: Die ∞ -ausgedehnte Kreisscheibe (Ebene) bewirkt, daß $\vec{E}(s, \phi, z)$ nur eine z -Komponente hat: $\vec{E}(z)$

aus 11b.:
$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \right]$$

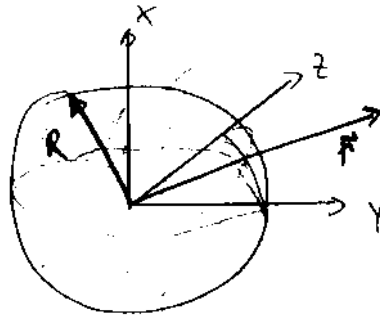
$$\vec{E}_{\text{Ebene}}(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} \vec{E}(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \right] \vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \vec{e}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sign}(z) \vec{e}_z}$$



Anmerkung: Berechnung beruht auf der Annahme, daß σ konstant bleibt! ▽

13. Aufgabe: Satz von Gauß anwenden!



$$\oint_{\text{Oberfläche}} \vec{E} d\vec{A} = \iiint_{\text{Volumen}} \text{div } \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dV$$

- Symmetrie: nur radiale Komponente: $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$
- Ladungsdichte: $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \text{konst!}$

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dV(r') \quad \leftarrow \text{Integral über eingeschlossene Ladung!}$$

$\rho = \text{konst}$

1. Fall: $r < R$:

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \int_{r=0}^r \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r'^2 \sin\theta d\theta d\phi dr'$$

$$E(r) \cdot \underbrace{4\pi r^2}_{\text{Kugeloberfläche}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot \underbrace{\frac{4}{3}\pi r^3}_{\text{Kugelvolumen}}$$

$$E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot r = \frac{Q}{4\pi R^3 \epsilon_0} \cdot r$$

linear!

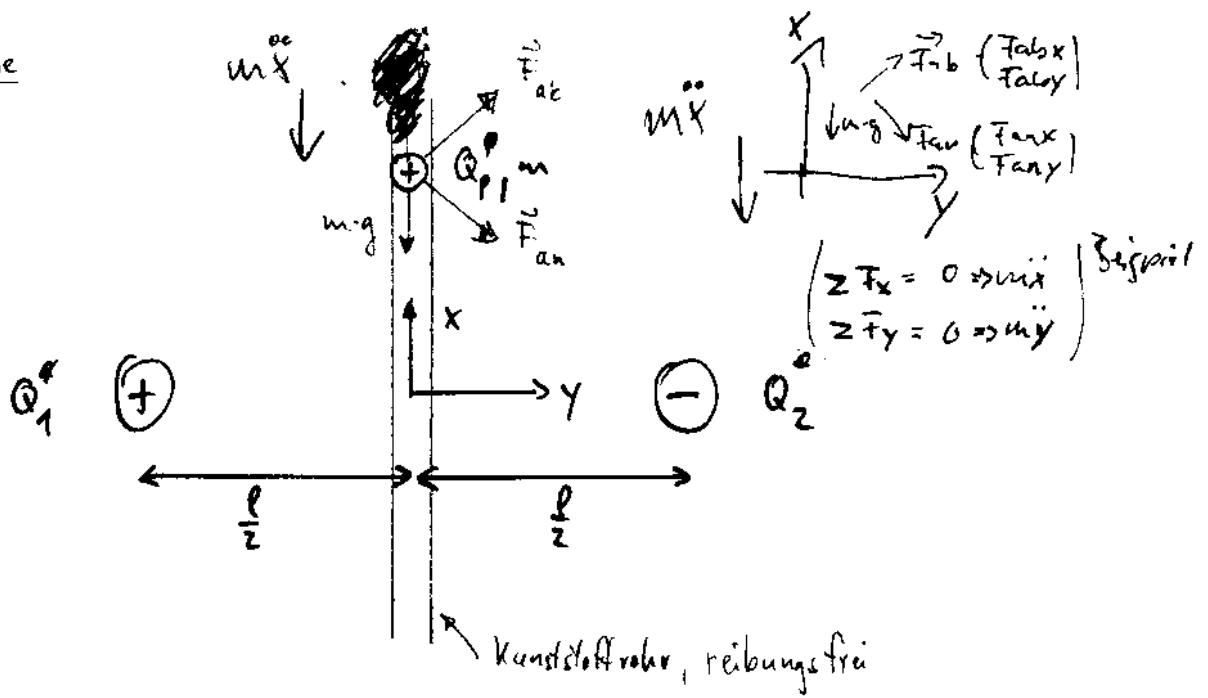
2. Fall: $r > R$:

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

← nur das ist die im Volumen V eingeschlossene Ladung

$$E(r) = \frac{Q/\frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \sim \frac{1}{r^2}!$$

14. Aufgabe



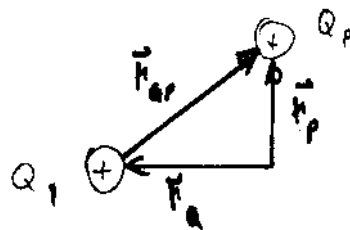
O.B.d.A. kann das Problem als ebenes Problem, d.h. 2 dimensional behandelt werden (Grund: alle Ladungen liegen in einer Ebene)

Kräftegleichgewicht: Aufgrund des Kunststoffrohres kann nur eine Bewegung in x-Richtung

$\Sigma F = m \ddot{x}$ ~~.....~~ ^{stetig finden:}

$\Rightarrow \left(+m \ddot{x} = -m \cdot g + F_{ab} - F_{an} \right)$ _{x-komponente | x-komponente}

$$\vec{F}_{ab} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|Q_1| |Q_2|}{|\vec{r}_{QP}|^3} \cdot \vec{r}_{QP}$$
 Coulombsches Gesetz



$$\vec{r}_{QP} = -\vec{r}_Q + \vec{r}_P = \vec{r}_P - \vec{r}_Q = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{l}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{QP} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{l}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{r}_{QP}| = \sqrt{x^2 + \frac{l^2}{4}}$$

$$\Rightarrow F_{ab} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|Q_1| |Q_2|}{[x^2 + \frac{l^2}{4}]^{3/2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \frac{l}{2} \end{pmatrix}$$

14.

$$\underline{\vec{F}}_{ab} \Big|_{x\text{-komp}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|Q_a||Q_b|}{\left[x^2 + \frac{\ell^2}{4}\right]^{3/2}} \cdot x$$

analog: $\underline{\vec{F}}_{an} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|Q_a||Q_d|}{|\vec{r}_{QP}|^3} \cdot \vec{r}_{QP}$

$$\vec{r}_{QP} = \vec{r}_P - \vec{r}_Q = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \ell/2 \\ \ell/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\ell/2 \\ -\ell/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{F}}_{an} \Big|_{x\text{-komp}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|Q_a||Q_d|}{\left[x^2 + \frac{\ell^2}{4}\right]^{3/2}} \cdot x$$

$$\Rightarrow m \cdot \ddot{x} = -m \cdot g + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|Q_a||Q_d|}{\left[x^2 + \frac{\ell^2}{4}\right]^{3/2}} \cdot x - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|Q_a||Q_d|}{\left[x^2 + \frac{\ell^2}{4}\right]^{3/2}} \cdot x \quad /: m$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} - \frac{|Q_a||Q_d|}{4\pi\epsilon_0 \cdot m} \cdot \frac{x}{\left[\sqrt{x^2 + \frac{\ell^2}{4}}\right]^3} + \frac{|Q_a||Q_d|}{4\pi\epsilon_0 \cdot m} \cdot \frac{x}{\left[\sqrt{x^2 + \frac{\ell^2}{4}}\right]^3} + g = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{x}{\left[\sqrt{x^2 + \frac{\ell^2}{4}}\right]^3} \left[\frac{+|Q_a||Q_d| - |Q_a||Q_d|}{4\pi\epsilon_0 \cdot m} \right] + g = 0$$

$=: k_1$

$$\ddot{x} + \frac{x}{\left[\sqrt{x^2 + \frac{\ell^2}{4}}\right]^3} \cdot k_1 + g = 0$$

$$\ddot{x} + k_1 \cdot \frac{x}{\left[x^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right]^{3/2}} = -g$$

nicht linear, inhomogene Dgl. 2. Ordnung!

kleine Ausschläge von $x \Rightarrow x^2 \ll \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow \left[x^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right]^{3/2} \approx \left(\frac{\ell}{2}\right)^3$

\Rightarrow NÄHERUNG: $\ddot{x} + k_1 \cdot \frac{8}{\ell^3} x = -g$ für kleine x

linear, gewöhnliche, inhomogene Dgl. 2. Ordnung

Zu 14.

Lösung der Dgl.:

allgemein: $x = x_{\text{homog}} + x_{\text{inhomog}}$

Lösung d. homogenen Dgl.: $\ddot{x} + k_1 \frac{x}{l^3} = 0$

Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$ in Dgl.: $\lambda^2 + k_1 \frac{x}{l^3} = 0$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm j \sqrt{k_1 \frac{x}{l^3}}$$

$$\Rightarrow x_{\text{homog}}(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}$$

Da die Inhomogenität ist eine Konstante \Rightarrow eine spezielle Lösung der inhomogenen Dgl ist mit Sicherheit eine Konstante $C = x_{\text{inhomog}} = C$

$$\Rightarrow \text{Gesamt Lösung: } x(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t} + C$$

Anfangswerte: $x(t=0) = 0$: Start im Ursprung

$\dot{x}(t=0) = 0$: keine Anfangsgeschwindigkeit

3. Bedingung: x_{inhomog} in Dgl.: $0 + k_1 \frac{x}{l^3} \cdot C = -k_2$

$$\Rightarrow C = -\frac{k_2 \cdot l^3}{8k_1}$$

$$x(t=0) = 0 = A + B + C$$

$$\dot{x}(t=0) = A \cdot \lambda_1 + B \cdot \lambda_2 = 0 \Rightarrow \left[A = -B \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -B \cdot \frac{-j \sqrt{k_1 \frac{x}{l^3}}}{+j \sqrt{k_1 \frac{x}{l^3}}} = B \right]$$

$$\Rightarrow A + B + C = 0 = 2B + C = 0 \Rightarrow \left[B = -\frac{C}{2} = -\frac{k_2 l^3}{16k_1} \right]$$

$$x(t) = B(e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}) + C = B \left[\cos(\lambda_1 t) + j \sin(\lambda_1 t) + \cos(\lambda_2 t) - j \sin(\lambda_2 t) \right] + C$$
$$= 2B \cos(\lambda_1 t) + C = -\frac{k_2 l^3}{8k_1} \cos\left(\sqrt{k_1 \frac{x}{l^3}} t\right) - \frac{k_2 l^3}{8k_1}$$

$$x(t) = + \frac{mg l^3}{8 \cdot \frac{Q_1 Q_2 + Q_1 Q_3}{4 \pi \epsilon_0 m l^3}} \left[\cos\left(\sqrt{\frac{8 Q_1 Q_2 - 8 Q_1 Q_3}{4 \pi \epsilon_0 m l^3}} t\right) - 1 \right]$$

Übungen Theoretische Elektrotechnik III: Blatt 4

Aufgabe 15: Potential einer homogen geladenen Fläche

Gegeben sei eine unendlich dünne, homogen mit der Gesamtladung Q geladene Rechteckfläche im Vakuum, siehe Abb. 1.

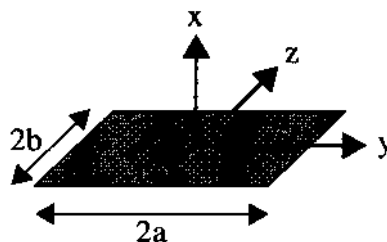


Abb. 1 Homogen geladene Rechteckfläche

- Berechnen Sie das von dieser Ladungsverteilung in einem beliebigen Punkt \vec{r} erzeugte elektrische Potential $\varphi(x, y, z)$!
- Berechnen Sie aus Teilaufgabe 15a. durch Gradientenbildung die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$.

Hinweis: Sie können die Differentiation mit der Integration vertauschen, da nicht bezüglich der Integrationsvariablen differenziert wird.

Nun sei eine homogen mit der Ladung Q geladene Kreisscheibe, welche unendlich dünn ist und sich im Vakuum befindet, gegeben, vgl. Abb. 2.

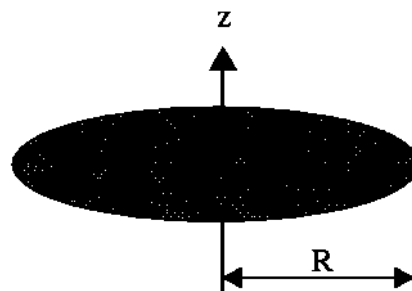
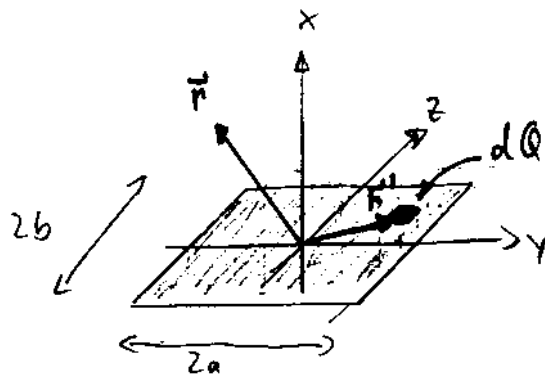


Abb. 2 Homogen geladene Kreisscheibe

- Berechnen Sie das von dieser Ladungsverteilung in einem beliebigen Punkt \vec{r} erzeugte

15. Aufgabe

a.



$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Ladung}} \frac{dQ}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\sigma = \frac{dQ}{dA} \Rightarrow dQ = \sigma dA$$

homogen verteilte Ladung $\rightarrow \sigma = \frac{Q}{4ab}$

$$\Rightarrow dQ = \frac{Q}{4ab} \cdot dy' dz', \quad y' \in [-a, +a], \quad z' \in [-b, +b]$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} 0 \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

$$\Rightarrow \varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{y'=-a}^{+a} \int_{z'=-b}^{+b} \frac{\frac{Q}{4ab}}{\sqrt{x^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} dy' dz'$$

Subst: $u = y - y' \rightarrow dy' = -du$

$v = z - z' \rightarrow dz' = -dv$

$$\Rightarrow \varphi(x, y, z) = \frac{Q}{16\pi ab\epsilon_0} \int_{y+a}^{y-a} \int_{z+b=v}^{z-b} \frac{1}{\sqrt{x^2 + u^2 + v^2}} du dv$$

Bronstein
Nr. 142

$$= \frac{Q}{16\pi ab\epsilon_0} \int_{y+a}^{y-a} \operatorname{arinh} \left(\frac{v}{\sqrt{x^2 + u^2}} \right) \Big|_{z+b}^{z-b} du$$

$$= \frac{Q}{16\pi ab\epsilon_0} \left[\int_{y+a}^{y-a} \operatorname{arinh} \left(\frac{z-b}{\sqrt{x^2 + u^2}} \right) du - \int_{y+a}^{y-a} \operatorname{arinh} \left(\frac{z+b}{\sqrt{x^2 + u^2}} \right) du \right]$$

15b.

1. $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$

2. $\text{grad}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$ vgl. Übungsaufgabe

$$\varphi(x, y, z) = \frac{Q}{16\pi a b \epsilon_0} \int_{y'=-a}^{+a} \int_{z'=-b}^{+b} \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dy' dz'$$

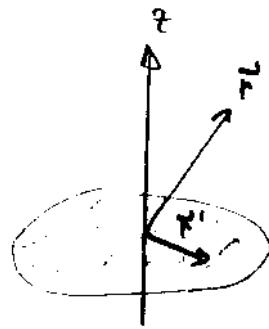
$$\vec{E} = -\nabla_{\vec{r}} \varphi = -\frac{Q}{16\pi a b \epsilon_0} \int_{y'=-a}^{+a} \int_{z'=-b}^{+b} \left(\nabla_{\vec{r}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right) dy' dz'$$

$$\vec{E}(x, y, z) = +\frac{Q}{16\pi a b \epsilon_0} \int_{y'=-a}^{+a} \int_{z'=-b}^{+b} \frac{x\vec{e}_x + (y-y')\vec{e}_y + (z-z')\vec{e}_z}{[x^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dy' dz'$$

vgl. Aufgabe 11a.!

15. Aufgabe

c. Symmetrie \Rightarrow Zylinderkoordinaten



$$\vec{r} = s \vec{e}_s(\phi) + z \vec{e}_z$$

$$\vec{r}' = s' \vec{e}_s(\phi')$$

$$\varphi(s, \phi, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\text{Ladung}} \frac{dQ}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$; dQ = \rho dA$$

$$dQ = \frac{Q}{\pi R^2} \cdot s' ds' d\phi'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{s'=0}^R \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{\frac{Q}{\pi R^2}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} s' ds' d\phi'$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{s^2 + s'^2 + z^2 - 2ss' \cos(\phi - \phi')}$$

$$\varphi(s, \phi, z) = \frac{Q}{4\pi^2 R^2 \epsilon_0} \int_{s'=0}^R \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{s'}{\sqrt{s^2 + s'^2 + z^2 - 2ss' \cos(\phi - \phi')}} ds' d\phi'$$

Rotationssymmetrie um z-Achse \Rightarrow Setze $\phi = 0$

$$\varphi(s, z) = \frac{Q}{4\pi^2 R^2 \epsilon_0} \int_{s'=0}^R \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{s'}{\sqrt{s^2 + s'^2 + z^2 - 2ss' \cos\phi'}} ds' d\phi'$$

16. Aufgabe

- Vorgehensweise:
1. Berechne \vec{D} mittels Gaußschem Satz
 2. Berechne $\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \cdot \vec{D}$
 3. Berechne $\varphi = -\int \vec{E} d\vec{s} + \varphi_{\text{Bezug}}$

Symmetrie: Kugelkoordinaten: $\varphi(\vec{r}) = \varphi(r)$ nur radiale Komponente

$$\Rightarrow \vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} \cdot \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \varphi(r) = -\int E dr + \varphi_{\text{Bezug}}$$

Satz vom Hüllanfluß (Gaußscher Satz): $\oint \vec{D} d\vec{A} = Q_{\text{eingeschlossen}}$

1. Fall: $r < R$:

$$4\pi r^2 \cdot D(r) = \int_0^r g(r') 4\pi r'^2 dr' \quad ; \quad g(r') = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \text{konst}$$

$$4\pi r^2 D(r) = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot 4\pi \frac{r^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{D(r) = \frac{Q}{4\pi} \frac{r}{R^3} \quad \text{bzw.} \quad \vec{D}(r) = \frac{Qr}{4\pi R^3} \vec{e}_r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q \cdot r}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r R^3} \vec{e}_r}$$

2. Fall: $r > R$:

$$4\pi r^2 D(r) = Q$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad ; \quad \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}}$$

Folgerung: \vec{E} springt an der Grenzfläche, weil $D_{\text{normal}1} = D_{\text{normal}2}$,
i.h. die Normalkomponente [hier $D(r)$] von D ist stetig.

$$16. \quad \Delta E = \lim_{r \rightarrow R^+} E(r) - \lim_{r \rightarrow R^-} E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R}{R^3}$$

$$\Delta E = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

$\Rightarrow \varphi = \int \vec{E} d\vec{s}$ ist bei $r=R$ nicht diffbar (hat Knick),
ist aber stetig

Berechnung von $\varphi(r)$:

$$\varphi(r) = - \int E(r) dr + \varphi_{\text{Bezug}}$$

Allgemeine Setzung: $\varphi(r \rightarrow \infty) \stackrel{!}{=} 0$

$r > R$: $\varphi(r) = - \int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} dr + \varphi_{\text{Bezug}} = + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \varphi_{\text{Bezug}}$

$$\varphi(r \rightarrow \infty) \stackrel{!}{=} 0 = 0 + \varphi_{\text{Bezug}} \Rightarrow \varphi_{\text{Bezug}} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$r \in [0, R]$: $\varphi(r) = - \int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r R^3} \cdot r dr + \varphi_{\text{Bezug}}$

$$\varphi(r) = - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 \epsilon_r R^3} \cdot r^2 + \varphi_{\text{Bezug}}$$

Stetigkeit des Potentials: $\varphi(r=R^-) = \varphi(r=R^+)$

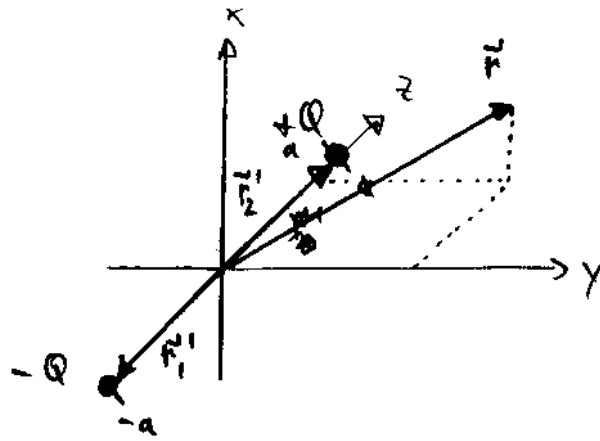
$$\Rightarrow - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 \epsilon_r R^3} \cdot R^2 + \varphi_{\text{Bezug}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$\varphi_{\text{Bezug}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left[1 + \frac{1}{2\epsilon_r} \right]$$

$$\Rightarrow \varphi(r) = - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 \epsilon_r R^3} r^2 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left[1 + \frac{1}{2\epsilon_r} \right]$$

17. Aufgabe

a.



$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_2|} \quad \text{Superpositionsprinzip}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}; \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +a \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}} \right]$$

b. Fernfeldnäherung, d.h. $|\vec{r}| \gg d$ wo $d = 2a$ Strecke von $-Q$ bis $+Q$

Def: $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} =: r \quad (\rightarrow \text{Kugelkoordin.})$

Betrachte Wurzelausdrücke:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{r^2} + 2az + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2az + a^2}}$$

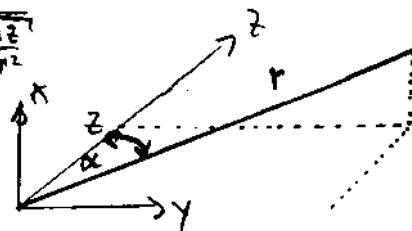
$$= \frac{1}{r \sqrt{1 + \frac{2az}{r^2} + \left(\frac{a}{r}\right)^2}}$$

Vernachlässigung des quadr. Terms, da $\left(\frac{a}{r}\right)^2 \approx 0$

$$\approx \frac{1}{r \sqrt{1 + \frac{2az}{r^2}}}$$

NB: $2a = d$

$$\approx \frac{1}{r \sqrt{1 + \frac{dz}{r^2}}}$$



$$\cos \alpha = \frac{z}{r}$$

$$\cos \alpha = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_r$$

17.

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}} \approx \frac{1}{r \sqrt{1 + \frac{d \cdot z}{r^2}}} \quad ; \quad \cos \alpha = \frac{z}{r}$$

$$\approx \frac{1}{r \sqrt{1 + \cos \alpha \cdot \frac{d}{r}}}$$

Näherung: $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ Taylor

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}} \approx \frac{1}{r \left[1 + \frac{d}{2r} \cos \alpha \right]}$$

analog: $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} \approx \frac{1}{r \sqrt{1 - \frac{d \cdot z}{r^2}}} \approx \frac{1}{r \sqrt{1 - \frac{d}{r} \cos \alpha}}$

$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ Taylorreihe

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} \approx \frac{1}{r \left[1 - \frac{d}{2r} \cos \alpha \right]}$$

$$\Rightarrow \varphi(r) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{r \left[1 - \frac{d}{2r} \cos \alpha \right]} - \frac{1}{r \left[1 + \frac{d}{2r} \cos \alpha \right]} \right]$$

$$\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{1}{1 - \frac{d}{2r} \cos \alpha} - \frac{1}{1 + \frac{d}{2r} \cos \alpha} \right]$$

$$\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1 + \frac{d}{2r} \cos \alpha - \left[1 - \frac{d}{2r} \cos \alpha \right]}{1 - \left(\frac{d}{2r} \cos \alpha \right)^2}$$

≈ 0

$$\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{r} \cos \alpha$$

$$\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} d \cos \alpha$$

Beachte: $d \cos \alpha = d \vec{e}_z \cdot \vec{e}_r = \vec{d} \cdot \vec{e}_r$

$Q \cdot \vec{d} = \vec{p}$ Dipolmoment

$$\boxed{\varphi(r) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{|\vec{r}|^2}} = \text{Potential eines Punktdipols!}$$

Übungen Theoretische Elektrotechnik III: Blatt 5

Aufgabe 18: Poissongleichung und Halbleiterdiode

Gegeben sei eine Halbleiterdiode nach Abb. 1. Aufgrund der Wärme (Temperatur) diffundieren Elektronen des n-Gebietes in das p-Gebiet und Löcher des p-Gebietes in das n-Gebiet. Es entsteht eine Raumladungszone mit den Raumladungsdichten $-q \cdot N_A$ und $q \cdot N_D$, wobei q die Elementarladung und N_A die Akzeptorkonzentration bzw. N_D die Donatorkonzentration in Ladungsträger/cm³ ist. Die Raumladungsdichten können nach der sogenannten Depletion-Näherung als rechteckförmig angenommen werden.

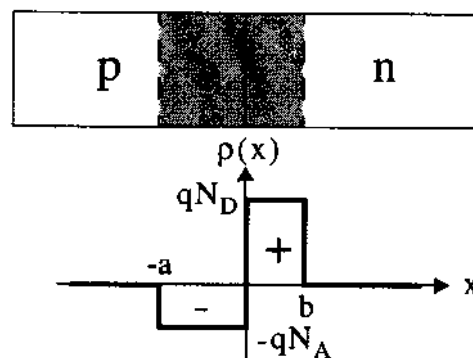


Abb. 1 Halbleiterdiode mit Raumladungszonen

- Berechnen und skizzieren Sie mit Hilfe der Poissongleichung den Verlauf der elektrischen Feldstärke in der Raumladungszone! Die Diode sei aus Silizium mit der Dielektrizitätszahl ϵ_{Si} .
- Berechnen und skizzieren Sie nun den Verlauf des elektrischen Potentials in der Raumladungszone wenn gilt: $\varphi(x = -a) = 0$.

Hinweis: Da außerhalb der Raumladungszone keine freien Ladungen vorhanden sein sollen, kann die elektrische Feldstärke dort zu Null angenommen werden!

Aufgabe 19: Punktladung vor einer leitenden Ebene

Eine Punktladung q_0 befinde sich im Abstand d vor einer leitenden Ebene im Vakuum, siehe Abb. 2. Die Ebene sei geerdet, unendlich ausgedehnt und unendlich dünn.

- Berechnen Sie das elektrische Feld der Anordnung mittels der Spiegelungsmethode!
- Berechnen Sie die auf der Ebene induzierte Ladung!

18. Aufgabe

a. Poisson Gleichung: $\Delta \varphi = - \frac{\rho(x,y,z)}{\epsilon}$
 hier eindimensional: $\Delta \varphi \rightsquigarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = - \frac{\rho(x)}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{si}} \quad \text{mit } \epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_{si}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi \Rightarrow E(x) = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{nur x-Komp.}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} = - \frac{\rho(x)}{\epsilon_0 \epsilon_{si}}$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}_{= -E(x)}$

$$- \frac{\partial E(x)}{\partial x} = - \frac{\rho(x)}{\epsilon_0 \epsilon_{si}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E(x) = \int \frac{\rho(x)}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} dx + C}}$$

1. Bereich: $x \in [-a, 0]$: $\rho(x) = -q \cdot N_A$

$$\Rightarrow E(x) = - \frac{q \cdot N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} \int 1 dx + C_1 = - \frac{q \cdot N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} x + C_1 \quad \text{linear}$$

Nebenbedingung: $E(x=-a) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow - \frac{q \cdot N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} \cdot (-a) + C_1 = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{C_1 = - \frac{q \cdot N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} \cdot a}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(x) = - \frac{q \cdot N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} x - \frac{q \cdot N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} \cdot a}$$

2. Bereich: $x \in [0, b]$: $\rho(x) = q \cdot N_D$

$$\Rightarrow E(x) = \frac{q \cdot N_D}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} \cdot x + C_2$$

Stetigkeit: $E(x=0^+) = E(x=0^-)$

$$\frac{q \cdot N_D}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} \cdot 0^+ + C_2 = - \frac{q \cdot N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} \cdot 0^- - \frac{q \cdot N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} \cdot a \Rightarrow \underline{\underline{C_2 = - \frac{q \cdot N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} \cdot a}}$$

$$\begin{aligned} D_{n1} &= D_{n2} \\ \epsilon_0 \cdot \epsilon_{si} \cdot E(0^+) &= \epsilon_0 \cdot \epsilon_{si} \cdot E(0^-) \\ \Rightarrow E(0^+) &= E(0^-) \end{aligned}$$

18b.

$$\frac{q N_A}{2 \epsilon_0 \epsilon_i} a^2 - \frac{q N_A}{\epsilon_0 \epsilon_i} a^2 + \varphi_{\text{Bezug}} = 0$$

$$\varphi_{\text{Bezug}} = \frac{q N_A}{2 \epsilon_0 \epsilon_i} a^2$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \frac{q N_A}{2 \epsilon_0 \epsilon_i} [x^2 + 2ax + a^2]$$

2. Bereich: $x \in [0, b]$:

$$\varphi(x) = - \int \left(\frac{q N_D}{\epsilon_0 \epsilon_i} x - \frac{q N_A}{\epsilon_0 \epsilon_i} a \right) dx + \varphi_{\text{Bezug}}$$

$$\varphi(x) = - \frac{q N_D}{2 \epsilon_0 \epsilon_i} x^2 + \frac{q N_A}{\epsilon_0 \epsilon_i} ax + \varphi_{\text{Bezug}}$$

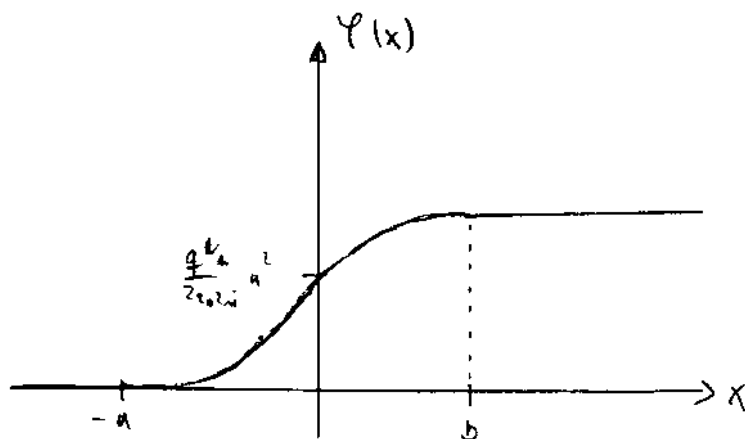
Stetigkeit: $\varphi(x=0) = \varphi(x=0^+)$

$$\frac{q N_A}{2 \epsilon_0 \epsilon_i} [0 + 0 + a^2] = \varphi_{\text{Bezug}}$$

$$\varphi_{\text{Bezug}} = \frac{q N_A}{2 \epsilon_0 \epsilon_i} a^2$$

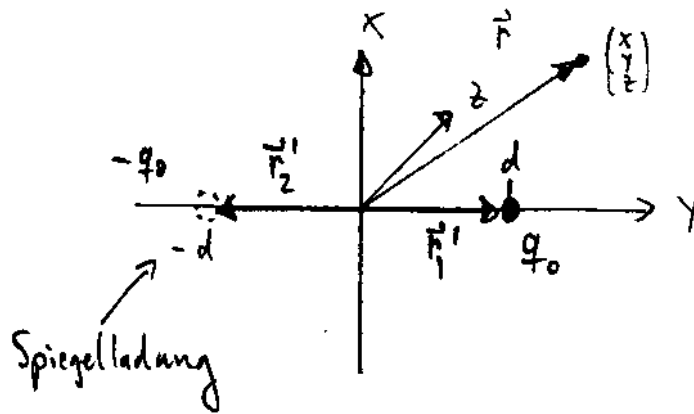
NB: φ ist immer stetig, weil
 $\varphi \sim$ Energie und Energie
ist stetig

$$\Rightarrow \varphi(x) = \frac{q}{2 \epsilon_0 \epsilon_i} [N_A \cdot ax + N_A a^2 - N_D x^2]$$



19. Aufgabe

a.



Prinzip: Ersetze leitende Fläche und spiegle, an dieser leitenden Fläche die Ladung q_0 !

$$\underline{y \geq 0}: \varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q_0}{|\vec{r} - \vec{r}_2|}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi(x, y, z) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-d)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+d)^2 + z^2}} \right\}$$

Kontrolle: $\varphi(x, y=0, z) \stackrel{!}{=} 0$ weil geerdete Ebene

$$\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right\} = 0 \quad \checkmark$$

Beachte: Im Halbraum $y < 0$ sind keine Raumladungen vorhanden $\Rightarrow \varphi = 0$ für $y < 0$!

$$\Rightarrow \varphi(x, y, z) = \begin{cases} \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-d)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+d)^2 + z^2}} \right\}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

18.

$$\Rightarrow E(x) = \frac{q \cdot N_D}{\epsilon_0 \epsilon_{in}} \cdot x - \frac{q \cdot N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{in}} \cdot a$$

2. Nebenbedingung: $E(x=b) \stackrel{!}{=} 0$

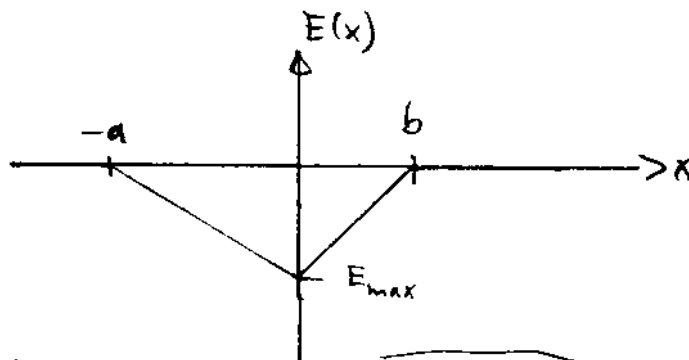
$$\Rightarrow \frac{q N_D}{\epsilon_0 \epsilon_{in}} \cdot b - \frac{q N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{in}} \cdot a = 0$$

$$b \cdot N_D - a \cdot N_A = 0$$

$$b \cdot N_D = a \cdot N_A$$

\Rightarrow Ladung auf der linken Seite = Ladung rechte Seite
(Satz von der Ladungserhaltung)

\rightarrow war nicht gefragt



$$\Rightarrow E_{\max} = E(x=0) = -\frac{q \cdot N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{in}} \cdot a$$

0.

$$E(x) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = -\int E(x) dx + \varphi_{\text{Bezug}}$$

1. Bereich: $x \in [-a, 0]$:

$$\varphi(x) = -\int \left(-\frac{q N_D}{\epsilon_0 \epsilon_{in}} x - \frac{q N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{in}} a \right) dx + \varphi_{\text{Bezug}}$$

$$\varphi(x) = +\frac{q N_D}{2 \epsilon_0 \epsilon_{in}} x^2 + \frac{q N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{in}} a x + \varphi_{\text{Bezug}}$$

Nebenbed: $\varphi(x=-a) = 0$

$$\Rightarrow \frac{q N_D}{2 \epsilon_0 \epsilon_{in}} a^2 - \frac{q N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{in}} a^2 + \varphi_{\text{Bezug}} = 0$$

19a.

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Beachte: $\text{grad } \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} = - \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}$

$$\Rightarrow \vec{E}(x, y, z) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x}{[x^2+(y-d)^2+z^2]^{3/2}} - \frac{x}{[x^2+(y+d)^2+z^2]^{3/2}} \\ \frac{y-d}{[x^2+(y-d)^2+z^2]^{3/2}} - \frac{y+d}{[x^2+(y+d)^2+z^2]^{3/2}} \\ \frac{z}{[x^2+(y-d)^2+z^2]^{3/2}} - \frac{z}{[x^2+(y+d)^2+z^2]^{3/2}} \end{pmatrix} ; y \geq 0$$

$$\vec{E}(x, y, z) = 0 \quad \text{für } y < 0$$

b. Es gilt: $D_{n1} - D_{n2} = \sigma$ Sprung der Normal Komponente um die Flächenladungsdichte

Normalkomponente von D : y -Komponente: $D_n = E_y \cdot \epsilon_0$

$$\Rightarrow \epsilon_0 E_y(y=0^+) - \epsilon_0 E_y(y=0^-) = \sigma$$

$$E_y(y=0^-) = 0 \quad (\text{nicht oben})$$

$$\Rightarrow \sigma = \epsilon_0 \cdot E_y(y=0^+)$$

$$= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{-d}{[x^2+d^2+z^2]^{3/2}} - \frac{d}{[x^2+d^2+z^2]^{3/2}} \right]$$

$$\sigma(x, z) = - \frac{q_0}{2\pi} \frac{d}{[x^2+d^2+z^2]^{3/2}}$$

$$Q_{\text{infl}} = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{z=-\infty}^{+\infty} \sigma(x, z) dx dz ; \text{Def: } x^2 + z^2 = \rho^2$$

$$dx dz \rightarrow \rho d\rho d\phi$$

$$= \int_{\rho=0}^{\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} - \frac{q_0}{2\pi} \frac{d}{[\rho^2+d^2]^{3/2}} \rho d\rho d\phi = \int_{\rho=0}^{\infty} -q_0 \cdot \frac{d\rho}{[\rho^2+d^2]^{3/2}} \cdot 2\pi$$

19b.

$$Q_{\text{infl.}} = -q_0 \int_{s=0}^{\infty} \frac{ds}{[\epsilon s^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} ds$$

↓ Brenntin Nr. 207

$$= -q_0 \cdot d \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{\epsilon s^2 + d^2}} \right]_0^{\infty}$$

$$= +q_0 \cdot d \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{\epsilon s^2 + d^2}} \right]_0^{\infty}$$

$$= q_0 \cdot d \left(0 - \frac{1}{\sqrt{d^2}} \right)$$

$$Q_{\text{infl.}} = -q_0$$

was zu erwarten war

Ergänzung: Allgemein gilt: $D_{n1} - D_{n2} = \sigma$

In Aufg. 18. a. wurde $D_{n1} = D_{n2}$, also $\sigma \equiv 0$ angenommen, WARUM?

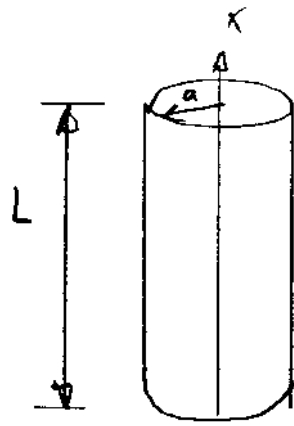
- Eine Grenzfläche ist dann vorhanden, wenn 2 unterschiedliche Materialien aufeinander treffen
=> In 18a.: immer gleiches Material, weil ϵ identisch ist.
=> keine Grenzflächenladung

- 2 Materialien mit unterschiedlichen ϵ_i , aber NICHT leitfähig: Grenzflächenladung existiert NICHT, denn wie soll die in einem nicht leitenden Medium an die Grenzfläche wandern?

- 2 Materialien, unterschiedliches ϵ_i , leitfähig $\kappa \neq 0$
=> Grenzflächenladung existiert ∇

vgl. 1. Aufgabe der Klausur SS 97 ∇

20. Aufgabe



$$s_v \cdot L \cdot \pi a^2 = L \cdot s_L$$

$$s_v = \frac{s_L}{\pi a^2} = \text{konst!}$$

Satz von Gauß: $\oint \vec{D} d\vec{A} = \int s_v dV$
 eingeschlossene Ladung!

$C := \frac{\oint \vec{D} d\vec{A}}{\int \vec{E} d\vec{s}}$; Berechne Q , weil nichtleitendes Medium,
 $\rightarrow Q$ wird sich nicht ändern (vgl. verlustbehafteter Kondensator)

Berechnung von D : $\oint \vec{D} d\vec{A} = \int s_v dV$
 Mantelfläche!

nur radiale Komp: $D_s \cdot 2\pi s \cdot L = \frac{s_L}{\pi a^2} \cdot \pi a^2 \cdot L$

$$D_s = \frac{s_L}{2\pi} \cdot \frac{1}{s} \quad (s > a)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{e}_s \cdot \frac{s_L}{2\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow C = \frac{\oint \vec{D} d\vec{A}}{\int_a^R \vec{E} d\vec{s}} = \frac{\int s_v dV}{\int_a^R \frac{s_L}{2\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{s} ds} = \frac{\frac{s_L}{\pi a^2} \cdot \pi a^2 \cdot L}{\frac{s_L}{2\pi \epsilon_0} \cdot \int_a^R \frac{1}{s} ds}$$

$$C = \frac{s_L \cdot L}{\frac{s_L}{2\pi \epsilon_0} \cdot \ln \frac{R}{a}}$$

$$C' = \frac{C}{L} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln \frac{R}{a}} \quad R > a!$$

21. Aufgabe

• anschaulich klar: \vec{E}, \vec{D} haben nur radiale Komponenten

• Grenzflächenbedingung: $E_{t1} = E_{t2}$, d.h.

$$E_{\text{Luft}} = E_{\text{Dielek}} = E \text{ wegen}$$

• Gauß:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\text{Halbkugel, Luft}} \vec{D} d\vec{A} &= Q_{\text{Luft}} \\ \int_{\text{Halbkugel, Dielek}} \vec{D} d\vec{A} &= Q_{\text{Dielek}} \end{aligned} \right\} Q_{\text{Luft}} + Q_{\text{Dielek}} = Q$$

$$\Rightarrow \int_{\text{Halbkugel, Luft}} \vec{D} d\vec{A} + \int_{\text{Halbkugel, Dielek}} \vec{D} d\vec{A} = Q$$

$$\epsilon_0 \cdot \int_{\text{Halbkugel}} \vec{E} d\vec{A} + \epsilon_0 \epsilon_r \int_{\text{Halbkugel}} \vec{E} d\vec{A} = Q$$

$$\epsilon_0 \cdot E \cdot 2\pi r^2 + \epsilon_0 \epsilon_r E \cdot 2\pi r^2 = Q$$

$$E \cdot 2\pi r^2 \epsilon_0 (\epsilon_r + 1) = Q$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 [1 + \epsilon_r]} \cdot \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{D}_{\text{Luft}} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} = \frac{Q}{2\pi [1 + \epsilon_r]} \cdot \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{D}_{\text{Dielek}} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E} = \frac{Q \epsilon_r}{2\pi [1 + \epsilon_r]} \cdot \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

Übungen Theoretische Elektrotechnik III: Blatt 6

Aufgabe 22: Kapazität eines Kugelkondensators

Gegeben sei ein Kugelkondensator nach Abb. 1. Die innere Elektrode sei mit der Ladung $+Q$, die äußere Elektrode mit der Ladung $-Q$ geladen. Zwischen beiden Elektroden befindet sich ein homogenes Dielektrikum.

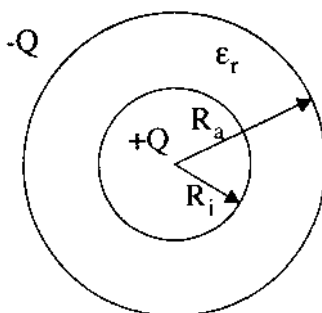


Abb. 1 Geometrie des Kugelkondensators

Berechnen Sie die Kapazität des Kugelkondensators!

Aufgabe 23: Kapazitätsbelag des geschichteten Zylinderkondensators

Gegeben sei ein geschichteter und ungeschichteter Zylinderkondensator der Länge L . Die innere Elektrode sei mit der Ladung $+Q$ die äußere mit $-Q$ geladen. Die Dielektrika seien homogen. Die Kondensatoren sind in Abb. 2 als Vorderansicht zu sehen. Die Randfelder können in den nachfolgenden Betrachtungen vernachlässigt werden.

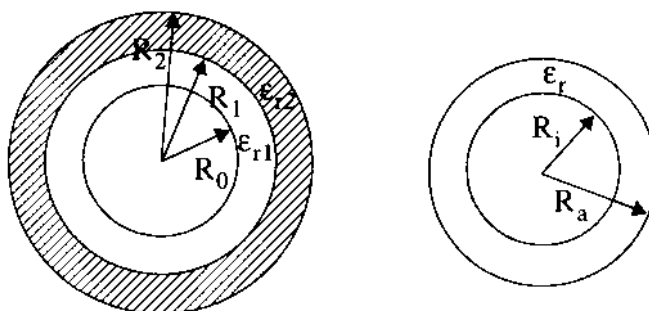
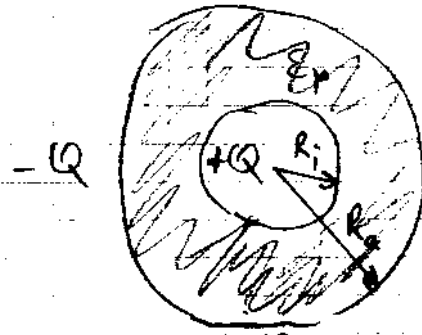


Abb. 2 Geschichteter und ungeschichteter Zylinderkondensator

- Berechnen Sie den Kapazitätsbelag $C' = \frac{C}{L}$ des ungeschichteten Zylinderkondensators!
- Berechnen Sie jetzt den Kapazitätsbelag des geschichteten Zylinderkondensators!
- Verallgemeinern Sie nun das Ergebnis von b., indem Sie nun noch eine dritte Zylinder-

22. Aufgabe



$$C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{\oiint \vec{D} \cdot d\vec{A}}{\int \vec{E} \cdot d\vec{s}} = \frac{Q}{\int_{R_i}^{R_a} \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

Berechnung von \vec{D} bzw \vec{E} innerhalb des Kond., d.h. $r \in [R_i; R_a]$

Satz von Gauß (Hüllenfluß):

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$

$$D(r) \cdot 4\pi r^2 = Q \quad \Rightarrow \quad D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot \vec{e}_r$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \cdot \vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2 \cdot \epsilon_0 \epsilon_r} \cdot \vec{e}_r \quad ; \quad d\vec{s} = \vec{e}_r \cdot dr$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{\int_{R_i}^{R_a} \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0 \epsilon_r} \cdot dr} = \frac{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\int_{R_i}^{R_a} \frac{1}{r^2} dr} = \frac{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{-\frac{1}{r} \Big|_{R_i}^{R_a}}$$

$$C = \frac{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}}$$

23 Aufgabe

$$a. \quad C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{Q}{\int_1^2 \vec{E} d\vec{s}} \quad ; \quad d\vec{s} = \vec{e}_s ds$$

• Berechnung von \vec{E} :

$$\text{Symmetrie: } \vec{E} = E(s) \cdot \vec{e}_s \quad (\text{Zylinderkoordin.})$$

$$\text{Satz vom Hüllanfluss: } \oint \vec{D} d\vec{A} = Q$$

$$D(s) \cdot 2\pi s \cdot L = Q$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \frac{Q}{2\pi L} \cdot \frac{1}{s} \cdot \vec{e}_s \quad ; \quad \vec{E} = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r L} \cdot \frac{1}{s} \vec{e}_s$$

$$\Rightarrow \left[C = \frac{Q}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r L s} ds} = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r L}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \right]$$

$$\text{Kapazitätsbelag: } C' = \frac{C}{L}$$

$$C' = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

b. Beachte: wegen $D_{n1} = D_{n2}$ ist \vec{D} -Feld stetig!

$$\vec{D} = \frac{Q}{2\pi L} \cdot \frac{1}{s} \vec{e}_s$$

$$\vec{E}_1 = \frac{Q}{2\pi L \epsilon_0 \epsilon_{r1}} \cdot \frac{1}{s} \vec{e}_s \quad ; \quad \vec{E}_2 = \frac{Q}{2\pi L \epsilon_0 \epsilon_{r2}} \cdot \frac{1}{s} \vec{e}_s$$

$$C = \frac{Q}{\int_{R_0}^{\infty} \vec{E} d\vec{s}} = \frac{Q}{\int_{R_0}^{R_2} \vec{E}_1 d\vec{s} + \int_{R_2}^{R_1} \vec{E}_2 d\vec{s}}$$

23b.

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{\int_{R_0}^{R_1} \frac{Q}{2\pi L \epsilon_0 \epsilon_{r1}} \frac{1}{s} ds + \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi L \epsilon_0 \epsilon_{r2}} \frac{1}{s} ds}$$

$$C = \frac{2\pi L \epsilon_0}{\frac{1}{\epsilon_{r1}} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

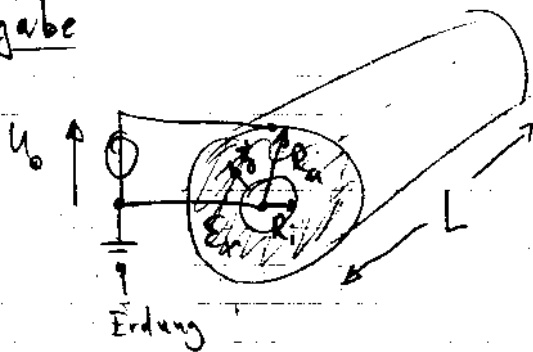
$$C' = \frac{C}{L} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\frac{1}{\epsilon_{r1}} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

c. 3 Dielektrikas: $C' = \frac{Q}{\frac{1}{\epsilon_{r1}} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\epsilon_{r3}} \ln \frac{R_3}{R_2}}$

\Rightarrow für N -Dielektrikas

$$C' = \frac{Q}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{\epsilon_{rk}} \ln \frac{R_k}{R_{k-1}}}$$

24. Aufgabe



a. Vergleiche: $R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{A}$ hier: $dR = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{ds}{A}$ ↙ Mantelfläche

$$dR = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{ds}{2\pi s L}$$

$$dR = \frac{1}{\sigma \cdot 2\pi L} \cdot \frac{1}{s} ds$$

$$R = \frac{1}{\sigma \cdot 2\pi L} \cdot \int_{R_i}^{R_o} \frac{1}{s} ds = \frac{1}{\sigma \cdot 2\pi L} \ln \frac{R_o}{R_i} \Rightarrow \boxed{G_{\text{quer}} = \frac{\sigma \cdot 2\pi L}{\ln \frac{R_o}{R_i}}}$$

b. $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\sigma} \cdot \vec{j}$

$$\vec{j} = \frac{I}{A} \cdot \vec{e}_s \quad (\text{nur Leitungsstrom!})$$

$$I = \frac{U_0}{R}$$

$$\Rightarrow \vec{j} = \frac{U_0}{R \cdot A} \vec{e}_s$$

$$\boxed{\vec{E}} = \frac{U_0 \vec{e}_s}{\frac{1}{\sigma \cdot 2\pi L} \cdot \ln \frac{R_o}{R_i} \cdot 2\pi L \cdot s} = \frac{U_0 \cdot \sigma}{s \cdot \ln \frac{R_o}{R_i}} \vec{e}_s$$

unabhängig von ϵ_0 !

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}} = \frac{U_0}{\ln \frac{R_o}{R_i}} \cdot \frac{1}{s} \vec{e}_s \quad \text{radialer Richtung!}$$

c. $\varphi(s) = - \int \vec{E}(s) \cdot d\vec{s} + \varphi_{\text{Bezug}} \quad \vec{e}_i \cdot d\vec{s} = \vec{e}_s ds$

24c.

$$\varphi(s) = -\int E ds + \varphi_{\text{Bezug}}$$

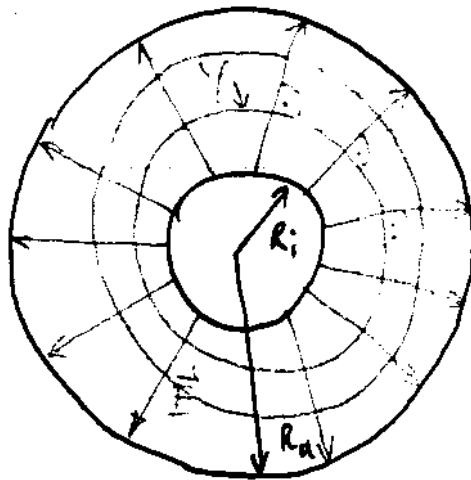
$$= -\frac{U_0}{\ln R_o/R_i} \int \frac{1}{s} ds + \varphi_{\text{Bezug}}$$

$$\varphi(s) = -\frac{U_0}{\ln \frac{R_o}{R_i}} \cdot \ln s + \varphi_{\text{Bezug}}$$

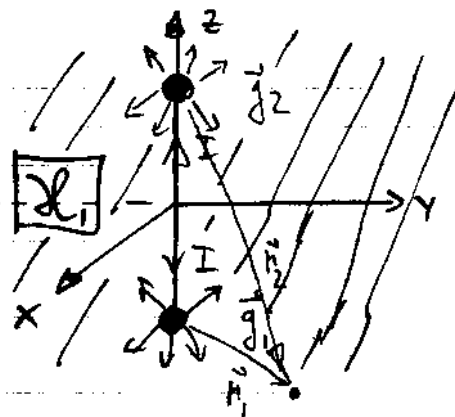
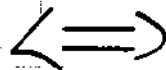
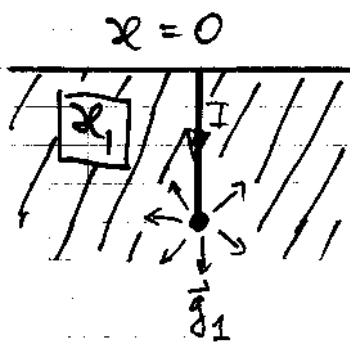
$$\varphi(s=R_i) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{wegen Erdung}$$

$$-\frac{U_0}{\ln R_o - \ln R_i} \cdot \ln R_i + \varphi_{\text{Bezug}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_{\text{Bezug}} = \frac{U_0 \ln R_i}{\ln \frac{R_o}{R_i}}$$

$$\Rightarrow \varphi(s) = \frac{U_0 [\ln R_i - \ln s]}{\ln \frac{R_o}{R_i}} = \frac{U_0}{\ln \frac{R_o}{R_i}} \cdot \ln \left(\frac{R_i}{s} \right)$$



2S. Aufgabe



An Erdoberfläche ist wegen $x=0$, \vec{g} (Leitungsstromdichte) = 0
bzw. $g_{1z} = g_{2z} = 0$ (Normalkomponenten)

Dies kann durch einen Spiegelkugelerder erzwungen werden (rechtes Bild), der sich auch im Medium $x=x_1$ befindet

Ein Kugelerder im Ursprung hat aus Symmetrie nur radiale Komponente:

$$\vec{g} = \frac{I}{4\pi r^2} \cdot \vec{e}_r = \frac{I}{4\pi |\vec{r}|^3} \cdot \vec{r} = \frac{I}{4\pi |\vec{r}|^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\vec{g}_{\text{ges}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$ für $z \leq 0$

$\vec{g}_{\text{ges}} = 0$, $z > 0$ (weil $x=0$)

$z \leq 0$:

$$\vec{g}_1 = \frac{I}{4\pi |\vec{r}_1|^3} \vec{r}_1, \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z+t \end{pmatrix}$$

$$\vec{g}_1 = \frac{I}{4\pi [x^2 + y^2 + (z+t)^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z+t \end{pmatrix}$$

$$\vec{g}_2 = \frac{I}{4\pi |\vec{r}_2|^3} \vec{r}_2, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-t \end{pmatrix}$$

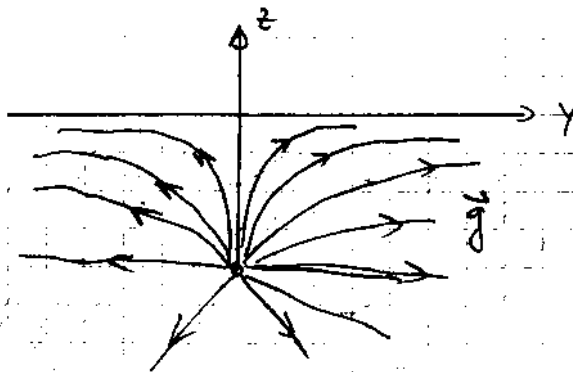
25.

analog:

$$\vec{g}_z = \frac{I}{4\pi [x^2 + y^2 + (z+t)^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z+t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{g} = \frac{I}{4\pi} \left[\frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-t \end{pmatrix}}{[x^2 + y^2 + (z-t)^2]^{3/2}} + \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z+t \end{pmatrix}}{[x^2 + y^2 + (z+t)^2]^{3/2}} \right], z \leq 0$$

qualitativ:



$$\vec{g} = 0, z > 0$$

Zusatz:

$$\vec{H}_{\text{obfl.}} = \frac{1}{x} \vec{g}_{\text{obfl.}} = \frac{1}{x} \cdot \vec{g} \Big|_{z=0}$$

$$= \frac{I}{4\pi x} \left[\frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}}{[x^2 + y^2 + t^2]^{3/2}} + \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}}{[x^2 + y^2 + t^2]^{3/2}} \right]$$

$$\vec{H}_{\text{obfl.}} = \frac{I}{2\pi x} \cdot \frac{1}{[x^2 + y^2 + t^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verlauf der Feldlinien an der Oberfläche berechnen

Feldlinien := Kurven mit gleicher Steigung wie Feldvektoren

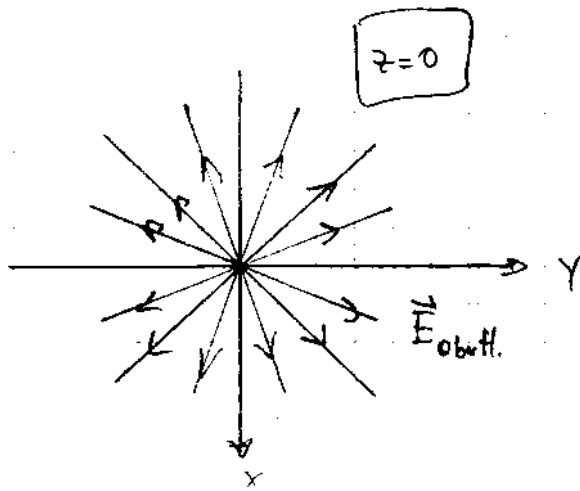
$$\text{Steigung} = \frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = \frac{\frac{I}{2\pi x} \cdot \frac{1}{[x^2 + y^2 + t^2]^{3/2}} \cdot y}{\frac{I}{2\pi x} \cdot \frac{1}{[x^2 + y^2 + t^2]^{3/2}} \cdot x} = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln y = c_1 + \ln x$$

$$y = c \cdot x$$

Ursprungsgeraden



Übungen Theoretische Elektrotechnik III: Blatt 7

Aufgabe 26: Magnetfeld eines stromdurchflossenen Zylinders

Gegeben sei ein gerader, unendlich langer Leiter mit einem kreisförmigen Querschnitt vom Durchmesser d (siehe Abb. 1), indem ein zeitlich konstanter, homogener über den Querschnitt verteilter Strom I fließt.

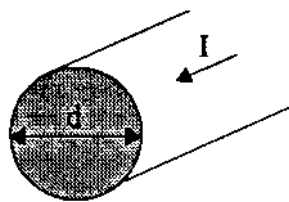


Abb. 1 stromdurchflossener Zylinder

Berechnen Sie das vom Strom erzeugte Magnetfeld $\vec{H}(\vec{r})$ im gesamten Raum! Kontrollieren Sie das Ergebnis an der Grenzfläche und skizzieren Sie auch den Betrag des Magnetfeldes.

Aufgabe 27: Magnetfeld eines Stromfadens

In einem unendlich langen und unendlich dünnen Draht fließe der zeitlich konstante Strom I . Berechnen Sie das von diesem Strom erzeugte Magnetfeld $\vec{H}(\vec{r})$, indem Sie das Gesetz von **Biot-Savart** anwenden!

Aufgabe 28: Magnetfeld eines stromführenden Streifens

Gegeben sei ein in $\pm z$ -Richtung unendlich lang ausgedehnter, unendlich dünner aus homogenem Blech bestehender stromführender Streifen der Breite $2a$, vgl. Abb. 2. In positive z -Richtung fließe der Gleichstrombelag $\vec{K} = K_0 \cdot \hat{e}_z$. Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{H}(\vec{r})$!

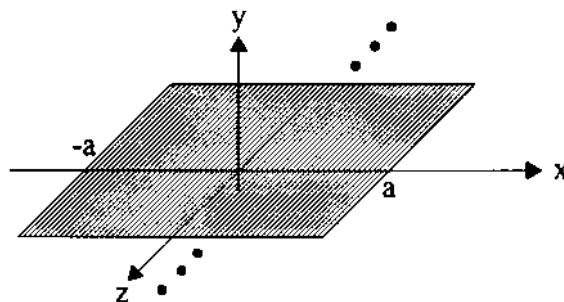
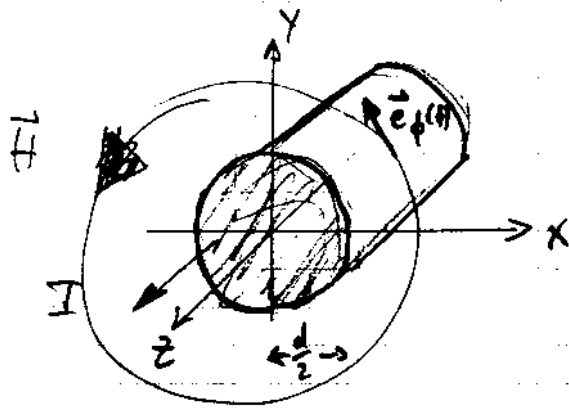


Abb. 2 stromführender Streifen

26. Aufgabe

Idee: Durchflutungsgesetz von Ampère anwenden:

$$\oint_C \vec{H} d\vec{s} = \iint_A \vec{j} d\vec{A} = \Sigma \text{ aller Ströme}$$



⇒ aus Symmetrie
Zylinderkoordinaten

• nach der "rechten Hand-Regel": $\vec{H} = H \cdot \vec{e}_\phi(\phi)$

1. Fall: $s \in [0, \frac{d}{2}]$:

$$\vec{j} = \frac{I}{(\frac{d}{2})^2 \pi} \cdot \vec{e}_z = \frac{4I}{d^2 \pi} \cdot \vec{e}_z = \text{konst!}$$

$$\Rightarrow \oint \vec{H} d\vec{s} = \iint_A \vec{j} d\vec{A} \quad ; \quad d\vec{A} = \vec{e}_z dA \quad ; \quad d\vec{s} = \vec{e}_\phi ds$$

$$\Rightarrow \underbrace{H \cdot 2\pi s}_{\text{Umfang}} = \frac{4I}{d^2 \pi} \cdot \underbrace{\pi s^2}_{\text{Fläche}}$$

$$\Leftrightarrow H = \frac{2I}{\pi d^2} \cdot s \quad \text{linear!}$$

$$\text{oder: } \vec{H} = \frac{2I}{\pi d^2} s \cdot \vec{e}_\phi(\phi)$$

2. Fall: $s > \frac{d}{2}$: $H \cdot 2\pi s = \Sigma I = I$

$$H = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\text{oder: } \vec{H} = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{s} \vec{e}_\phi(\phi)$$

26.

Kontrolle mit Grenzflächenbedingung:

$$H_{t1} \stackrel{!}{=} H_{t2} \quad \text{Stetigkeit d. Tangential komp.}$$

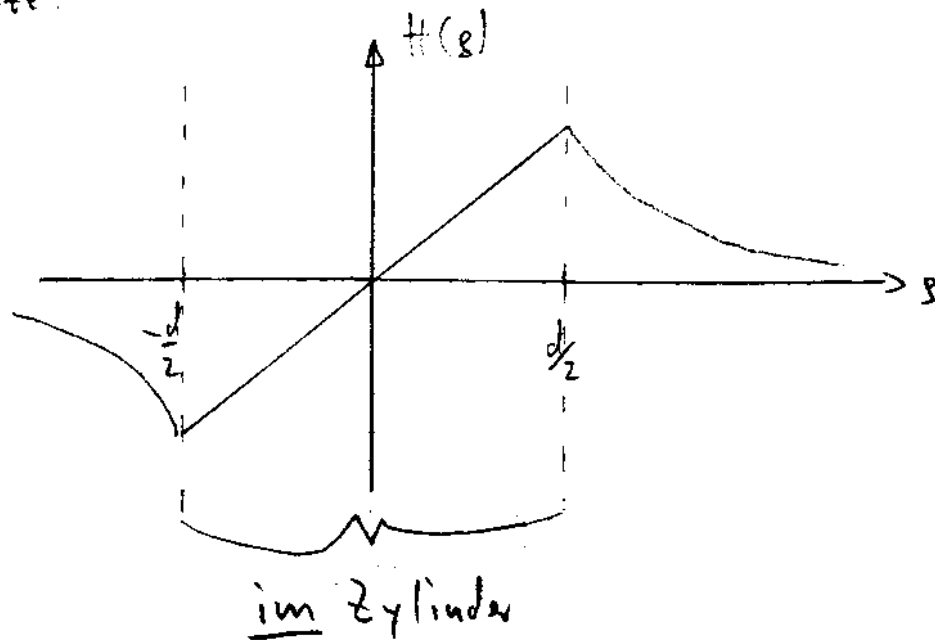
hier: Tangentialkomponente = \vec{e}_ϕ -Komponente

$$\Rightarrow H \Big|_{s=\frac{d}{2}^-} \stackrel{!}{=} H \Big|_{s=\frac{d}{2}^+}$$

$$\frac{2I}{\pi d^2} \cdot \frac{d}{2} \stackrel{!}{=} \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{\frac{d}{2}}$$

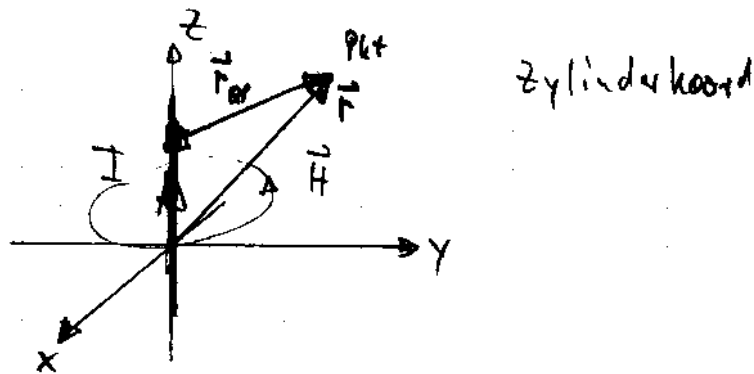
$$\frac{I}{\pi d} = \frac{I}{\pi d} \quad \checkmark \quad \text{OK}$$

Skizze:



27. Aufgabe

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \int_{\text{Strom}} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}_{\text{OP}}}{|\vec{r}_{\text{OP}}|^3} \quad \text{Biot-Savart}$$



$$d\vec{s} = \vec{e}_z dz', \quad z' \in]-\infty, +\infty[$$

$$\vec{r}_{\text{OP}} = \vec{r} - \vec{r}' = z\vec{e}_z + s\vec{e}_s(\phi) - z'\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{H}(s, z) = \frac{I}{4\pi} \int_{z'=-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{e}_z dz' \times [z\vec{e}_z + s\vec{e}_s(\phi) - z'\vec{e}_z]}{[s^2 + (z-z')^2]^{3/2}}$$

Beachte: $\left\| \begin{array}{l} \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0} \\ \vec{e}_z \times \vec{e}_s(\phi) = \vec{e}_\phi(\phi) \end{array} \right\|$

$$\Rightarrow \vec{H}(s, z) = \frac{I}{4\pi} \int_{z'=-\infty}^{+\infty} \frac{s \cdot \vec{e}_\phi(\phi)}{[s^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dz'$$

Sub: $u = z - z' \Rightarrow dz' = -du$

$$= \frac{I \cdot s \vec{e}_\phi(\phi)}{4\pi} \int_{u=+\infty}^{-\infty} \frac{1}{[s^2 + u^2]^{3/2}} du$$

Bronstein Nr 206

$$= \frac{I \cdot s \vec{e}_\phi(\phi)}{4\pi} \cdot \frac{u}{s^2 \sqrt{s^2 + u^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

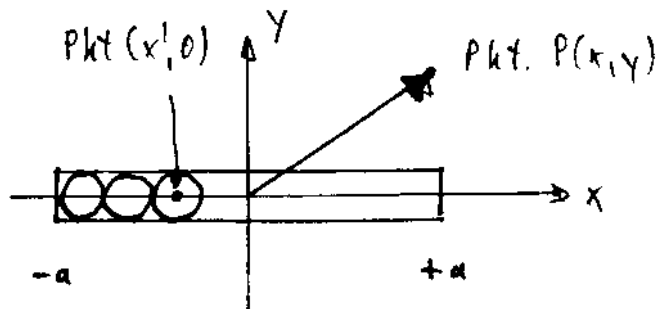
$$\boxed{\vec{H}(s) = \frac{I \cdot \vec{e}_\phi}{4\pi s} \cdot 2 \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{\sqrt{1 + (\frac{u}{s})^2}} = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{s} \cdot \vec{e}_\phi(\phi)}$$

28. Aufgabe

IDEE: Streifen bestehe aus Stromfäden parallel zur z-Achse

=> Gesamtfeld erhält man durch Summation über alle Stromfäden:

$$\vec{H}_{\text{ges}} = \int_{-a}^{+a} d\vec{H}_{\text{Stromfaden}}$$



Feld eines Stromfadens: $\vec{H} = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{s} \vec{e}_\phi(\phi)$ im Ursprung!

in kart. Koord.: $\vec{e}_\phi(\phi) = -\sin\phi \vec{e}_x + \cos\phi \vec{e}_y = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{e}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{e}_y$
 $s = \sqrt{x^2+y^2}$

=> $\vec{H} = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{x^2+y^2} [-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y]$ im Ursprung!

=> Stromfaden im Punkt $(x', 0)$: $x \rightarrow x - x'$

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{(x-x')^2+y^2} [-y\vec{e}_x + (x-x')\vec{e}_y]$$

Infinitesimaler Feldbeitrag $d\vec{H}_{\text{Stromfaden}}$:

$$d\vec{H}_{\text{Stromfaden}} = \frac{dI}{2\pi} \cdot \frac{1}{(x-x')^2+y^2} [-y\vec{e}_x + (x-x')\vec{e}_y]$$

=> $dI = ?$

Strom homogen verteilt über Intervall $[-a, +a]$:

$$k_0 := \frac{dI}{dx'} = \frac{I}{2a} = \text{konst} \Rightarrow dI = k_0 dx'$$

28.

$$d\vec{H}_{\text{Stromfaden}} = \frac{dI}{2\pi} \cdot \frac{1}{(x-x')^2+y^2} [-y\vec{e}_x + (x-x')\vec{e}_y]$$

$$dI = k_0 dx'$$

$$d\vec{H}_{\text{Stromfaden}} = \frac{k_0 dx'}{2\pi} \frac{1}{(x-x')^2+y^2} [-y\vec{e}_x + (x-x')\vec{e}_y]$$

$$\Rightarrow \vec{H}_{\text{ges}} = \int_{-a}^{+a} d\vec{H}_{\text{Stromfaden}}$$

$$= \int_{x'=-a}^{+a} \frac{k_0}{2\pi} \frac{1}{(x-x')^2+y^2} [-y\vec{e}_x + (x-x')\vec{e}_y] dx'$$

$$\Rightarrow \vec{H}_{\text{ges}} = \frac{k_0}{2\pi} \int_{x'=-a}^{+a} \left[\frac{x-x'}{(x-x')^2+y^2} \vec{e}_y - \frac{y}{(x-x')^2+y^2} \vec{e}_x \right] dx'$$

Sub: $u = x - x' \Rightarrow dx' = -du$

Grenzen: $x' = -a \rightarrow u = x + a$

$x' = +a \rightarrow u = x - a$

$$\vec{H}_{\text{ges}} = \frac{k_0}{2\pi} \int_{u=x+a}^{x-a} \left[\frac{y}{u^2+y^2} \vec{e}_x - \frac{u}{u^2+y^2} \vec{e}_y \right] du$$

Brustlin Nr. 61: $\int \frac{x}{a^2+x^2} = \frac{1}{2} \ln(a^2+x^2)$

Nr. 57: $\int \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$

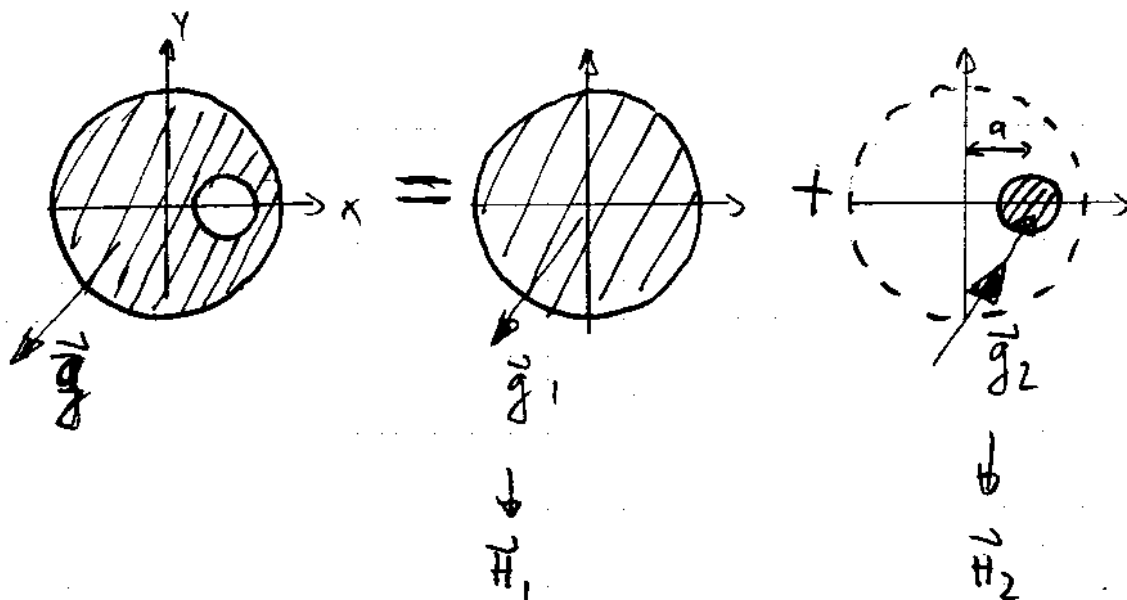
$$= \frac{k_0}{2\pi} \left\{ \vec{e}_x \frac{y}{y} \arctan\left(\frac{u}{y}\right) \Big|_{u=x+a}^{x-a} - \vec{e}_y \frac{1}{2} \ln(u^2+y^2) \Big|_{u=x+a}^{x-a} \right\}$$

mit $k_0 = \frac{I}{2a}$:

$$\vec{H}_{\text{ges}} = \frac{I}{4\pi a} \left\{ \vec{e}_x \left[\arctan\left(\frac{x-a}{y}\right) - \arctan\left(\frac{x+a}{y}\right) \right] - \vec{e}_y \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2} \right] \right\}$$

29. Aufgabe

Idee:



Es muß gelten: $|\vec{g}_1| = |\vec{g}_2|$ dann ist Strom im kleinen Zylinder = 0!

$$\vec{H}_{\text{ges}} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$$

Durchflutungsgesetz: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}$

$$|\vec{j}| = \frac{I \vec{e}_z}{\pi \frac{b^2}{4} - \pi \frac{c^2}{4}} = \frac{4I \vec{e}_z}{\pi(b^2 - c^2)} = \text{const!}$$

$$H_1 \cdot 2\pi s = \frac{4I}{\pi(b^2 - c^2)} \cdot \pi \frac{b^2}{4}$$

$$\Rightarrow \vec{H}_1 = \frac{b^2 I}{2\pi(b^2 - c^2)} \cdot \frac{1}{s} \vec{e}_\phi$$

in kart. Koord.: $\vec{H}_1 = \frac{b^2 I}{2\pi(b^2 - c^2)} \cdot \frac{x \vec{e}_y - y \vec{e}_x}{x^2 + y^2}$

Strom fließt entgegengesetzt!

Magn. Feld von \vec{j}_2 im Ursprung: $\vec{H}_2 \cdot 2\pi s = -\frac{4I}{\pi(b^2 - c^2)} \cdot \pi \frac{c^2}{4}$

\vec{H}_2 im Pkt $(a, 0)$:

$$\vec{H}_2 = -\frac{I c^2}{2\pi(b^2 - c^2)} \cdot \frac{(x-a) \vec{e}_y - y \vec{e}_x}{(x-a)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \vec{H}_{\text{ges}} = \frac{I}{2\pi(b^2 - c^2)} \left\{ \frac{x \vec{e}_y - y \vec{e}_x}{x^2 + y^2} \cdot b^2 - \frac{(x-a) \vec{e}_y - y \vec{e}_x}{(x-a)^2 + y^2} \cdot c^2 \right\}$$

Zusatzübung Theoretische Elektrotechnik III: Klausur SS'98

1. Aufgabe: Kapazität verschiedener Kugelkondensatoren mit unterschiedlichen Dielektrika (13 Punkte + 8 Zusatzpunkte)

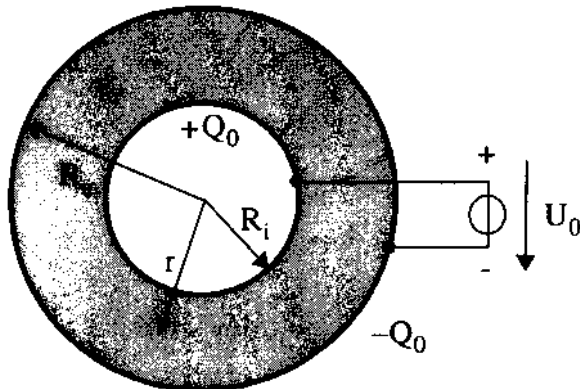


Bild 1.1: Kugelkondensator mit einem Dielektrikum

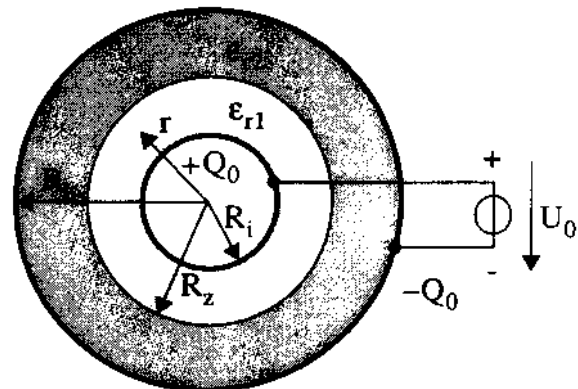


Bild 1.2: Kugelkondensator mit 2 Dielektrika

Bild 1.1 zeigt einen Kugelkondensator, dessen innere ($r = R_i$) und äußere ($r = R_a$) Elektrode durch eine ideale Spannungsquelle der Spannung U_0 auf die Ladung $+Q_0$ (bzw. $-Q_0$) aufgeladen werden. Zwischen beiden unendlich gut leitenden Elektroden befindet sich ein Dielektrikum mit der relativen Dielektrizitätszahl $\epsilon_r = \text{konst.}$

- 1.1 Berechnen Sie die Kapazität des Kugelkondensators nach Bild 1.1! (4 Punkte)
- 1.2 Das Dielektrikum sei jetzt **inhomogen** und es gelte: $\epsilon_r = k \cdot \frac{1}{r}$; $k = \text{konst.}$ für $r \in [R_i, R_a]$. Berechnen Sie die neue Kapazität des Kugelkondensators nach Bild 1.1! (2 Punkte)
- 1.3 Nun gelte wieder $\epsilon_r = \text{konst.}$, aber das Dielektrikum sei **verlustbehaftet**, d. h. es besitzt die Leitfähigkeit $\kappa > 0$. Berechnen Sie abermals die Kapazität des Kugelkondensators nach Bild 1.1! (4 Punkte)
- 1.4 Ein zweiter Kugelkondensator besitzt entsprechend Bild 1.2 ein zweischichtiges, konzentrisches Dielektrikum mit **unterschiedlichen** relativen **Dielektrizitätszahlen** $\epsilon_{r1} = \text{konst.}$ und $\epsilon_{r2} = \text{konst.}$ sowie $\epsilon_{r1} \neq \epsilon_{r2}$. Berechnen Sie die Kapazität dieses Kugelkondensators! (3 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 1.Z.1 Die Dielektrika mit ϵ_{r1} und ϵ_{r2} nach Bild 1.2 weisen nun beide **dieselbe Leitfähigkeit** $\kappa > 0$ auf. Berechnen Sie die Kapazität dieses verlustbehafteten, 2-schichtigen Kugelkondensators! (3 Punkte)

Übungen Theoretische Elektrotechnik III: Blatt 8

Aufgabe 30: Magnetfeld zweier konzentrischer Kreisströme

In den Ebenen $z = 0$ und $z = d$ befinde sich je eine kreisförmige Leiterschleife. Die Mittelpunkte der Kreislinien liegen beide auf der z -Achse, die Radien der Leiterschleifen seien R_1 und R_2 , und in den Schleifen fließe der zeitlich konstante Strom I_1 bzw. I_2 , siehe Abb. 1.

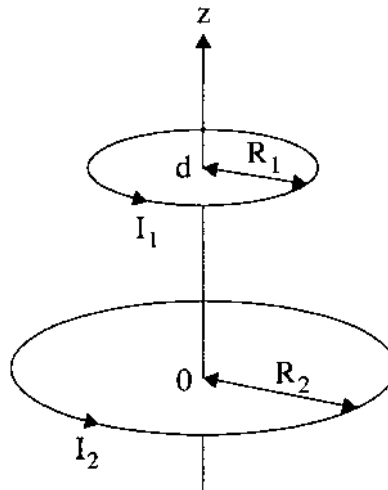


Abb. 1 zwei konzentrische Kreisströme

- Berechnen Sie das von den beiden Strömen erzeugte Magnetfeld $\vec{H}(\vec{r})$ zuerst allgemein und dann auf der z -Achse!
- Skizzieren Sie qualitativ den Verlauf der Feldlinien für den Fall, daß die beiden Schleifenradien ebenso wie die Ströme gleich groß sind!

Ein Paar dünner, kreisförmiger Spulen mit konzentrischer Spulenachse kann dazu verwendet werden, im Bereich des Mittelpunktes zwischen den beiden Spulen (d.h. bei $z = d/2$) auf der Spulenachse ein näherungsweise homogenes Magnetfeld zu erzeugen (**Helmholtz-Spulenpaar**). Ist die Dicke der Spulen klein gegen die Spulenradien, so kann man die Spulen in guter Näherung als Kreisströme auffassen.

- Wie sind die Spulenradien, die Beträge der Ströme und der Abstand der Spulen zu wählen, damit sich das Magnetfeld auf der Spulenachse (z -Achse) im Bereich des Mittelpunktes zwischen den Spulen möglichst wenig ändert?

Hinweis: Benutzen Sie die nachfolgende Taylorreihenapproximation um den Mittelpunkt zwischen den Spulen auf der Spulenachse, und wählen Sie die Parameter so, daß die Glieder erster und zweiter Ordnung der Reihe verschwinden:

1. Aufgabe

1.1

$$C = \frac{Q}{\Delta u} = \frac{Q}{\int_{R_i}^{R_o} \vec{E} d\vec{s}}$$

elektr. Feld d. Kugelkond. \rightarrow Satz von Gauss

$$\oint \vec{D} d\vec{A} = \iiint \rho dV = Q;$$

$$D \cdot 4\pi r^2 = Q \quad ; \quad r \in [R_i, R_o]$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Symmetrie: D hat nur radiale Komponente $\Rightarrow \vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r$

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{D} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \cdot \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{\int_{R_i}^{R_o} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \cdot \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dr} = \frac{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{-\frac{1}{r} \Big|_{R_i}^{R_o}} = \frac{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_o}}$$

1.2

analog: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \cdot k \cdot \frac{1}{r} \cdot r^2} \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \cdot k \cdot r} \vec{e}_r$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{\int_{R_i}^{R_o} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \cdot k} \cdot \frac{1}{r} dr} = \frac{4\pi \epsilon_0 \cdot k}{\ln(R_o/R_i)}$$

1.3.

$$C = \frac{Q}{\Delta u} = \frac{\oint \vec{D} d\vec{A}}{U_0}$$

\rightarrow Berechne \vec{D} über ohmsches Gesetz in Differentialform

$$\vec{g} = \chi \cdot \vec{E} = \frac{I}{A} \cdot \vec{e}_r = -\frac{U_0/r}{A} \vec{e}_r$$

$$\text{vgl. } R = \frac{1}{\chi} \cdot \frac{l}{A} \quad \text{hier: } dR = \frac{1}{\chi} \cdot \frac{dr}{4\pi r^2}$$

$$R = \int_{R_i}^{R_o} \frac{1}{\chi} \cdot \frac{1}{4\pi r^2} dr = \frac{1}{4\pi \chi} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_o} \right)$$

1.3

$$\vec{g} = \vec{\nabla} \vec{E} = \frac{U_0/R}{A} \vec{e}_r = \frac{U_0}{R \cdot A} \vec{e}_r = \frac{U_0}{\cancel{4\pi r^2} \cdot (\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) \cdot 4\pi r^2}$$

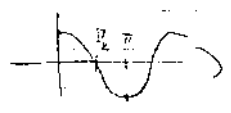
$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{U_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \cdot \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E}$$

$$\Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \oint \vec{E} d\vec{A}}{U_0} ; d\vec{A} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \vec{e}_r, \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi]$$

$$= \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{U_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \sin\theta d\phi d\theta}{U_0}$$

$$= \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot 2\pi \cdot [\cos\theta]_0^\pi}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$$



$$C = \frac{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$$

1.4. Beachte es gilt: $D_{n1} = D_{n2}$ Stetigkeit wül. an d. Grenzfläche keine freien Flächenladungsdichte!

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r \quad \text{nach Teilaufgabe 1.1} \quad \downarrow \text{z.B. Sumichräft S. 147}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1}} \vec{D} ; \vec{E}_2 = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2}} \vec{D}$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{4U} = \frac{Q}{\int_{R_1}^{R_2} E_1 dr + \int_{R_2}^{R_1} E_2 dr}$$

$$= \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr + \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2}} \int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{r^2} dr}$$

$$C = \frac{4\pi \epsilon_0}{\frac{1}{\epsilon_{r1}} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)}$$

1.5
~~WEM~~ aus 1.3. sieht man:

$$\vec{E} = \frac{U_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \cdot \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{unabhängig von } \alpha \text{ und } \epsilon$$

$\Rightarrow E_n$ ist stetig $\Rightarrow D_n$ springt um (freie) Flächenladungsdichte

\Rightarrow Man denke sich Kondensator zusammengesetzt aus der Reihenschaltung von 2 Kond. mit ϵ_{r1} und ϵ_{r2}

$$\Rightarrow C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}}{U_0} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} \cdot 4\pi}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \quad (\text{vgl. Teilaufg. c.)}$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot 4\pi}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}}$$

$$\text{oder: } C_1 = 4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1}$$

$$C_2 = 4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 - R_2}$$

$$\Rightarrow C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{(4\pi \epsilon_0)^2 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2} \frac{R_1 R_2 \cdot R_1 R_2}{(R_2 - R_1)(R_1 - R_2)}}{4\pi \epsilon_0 \left[\epsilon_{r1} \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1} + \epsilon_{r2} \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 - R_2} \right]}$$

$$C = 4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2} \cdot \frac{R_1 R_2 R_1 R_2}{\epsilon_{r1} R_1 [R_1 - R_2] + \epsilon_{r2} R_2 [R_2 - R_1]}$$

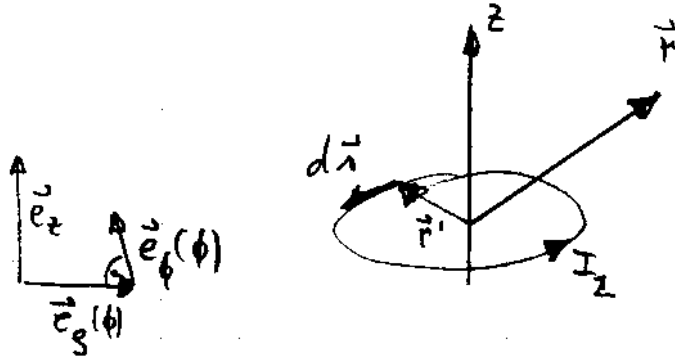
$$\frac{R_1 R_2 R_1 R_2}{(R_2 - R_1)(R_1 - R_2)} \cdot \frac{\epsilon_{r1} R_2 (R_2 - R_1) + \epsilon_{r2} (R_2 - R_1) R_1}{(R_2 - R_1)(R_1 - R_2)}$$

30. Aufgabe

a. Magnetfeld: $\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$

\uparrow von Strom 1
 \swarrow von Strom 2

Magnetfeld eines Kreisstromes:



$$\vec{r} = s \vec{e}_s(\phi) + z \vec{e}_z$$

$$\vec{r}' = R_2 \vec{e}_s(\phi')$$

$$d\vec{s} = R_2 d\phi' \vec{e}_\phi(\phi')$$

Biot-Savart: $\vec{H}_2(\vec{r}) = \frac{I_2}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$

$$\vec{r} - \vec{r}' = s \vec{e}_s(\phi) + z \vec{e}_z - R_2 \vec{e}_s(\phi')$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{s^2 + R_2^2 + z^2 - 2sR_2 \cos(\phi - \phi')}$$

$$d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}') = R_2 d\phi' \left[\underbrace{\vec{e}_\phi(\phi') \times s \vec{e}_s(\phi)}_{= z} + \underbrace{\vec{e}_\phi(\phi') \times \vec{e}_z}_{\vec{e}_s(\phi')} z - R_2 \underbrace{\vec{e}_\phi(\phi') \times \vec{e}_s(\phi')}_{-\vec{e}_z} \right]$$

Ausnutzung der Symmetrie:

• Führe Rechnung für $\phi=0$, d.h. $\vec{e}_s(\phi=0) = \vec{e}_x$ bzw. $\vec{e}_\phi(0) = \vec{e}_y$, aus und ersetze im Endergebnis dann

$$\vec{e}_x \rightarrow \vec{e}_s(\phi) \quad \text{und} \quad \vec{e}_y \rightarrow \vec{e}_\phi(\phi)$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_\phi(\phi') \times \vec{e}_s(\phi) \Big|_{\phi=0} &= \vec{e}_\phi(\phi') \times \vec{e}_x = [-\sin \phi' \vec{e}_x + \cos \phi' \vec{e}_y] \times \vec{e}_x \\ &= -\cos \phi' \vec{e}_z \end{aligned}$$

30. a. Damit:

$$\begin{aligned} d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}') &= R_2 d\phi' [-s \cos\phi' \vec{e}_z + R_2 \vec{e}_z + z \vec{e}_s(\phi')] \\ &= R_2 d\phi' [(R_2 - s \cos\phi') \vec{e}_z + z (\cos\phi' \vec{e}_x + \sin\phi' \vec{e}_y)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{H}_2(\vec{r}) \Big|_{\phi=0} = \frac{I_2 R_2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi' [z \vec{e}_x - s \vec{e}_z] + z \sin\phi' \vec{e}_y + R_2 \vec{e}_z}{[s^2 + z^2 + R_2^2 - 2sR_2 \cos\phi']^{3/2}} d\phi'$$

Beachte: $\int_0^{2\pi} \frac{\sin\phi'}{[s^2 + z^2 + R_2^2 - 2sR_2 \cos\phi']^{3/2}} d\phi' = 0$
d.h. keine y-Komponente

allgemeines Ergebnis: $\vec{e}_x \rightarrow \vec{e}_s(\phi)$, $\vec{e}_y \rightarrow \vec{e}_\phi(\phi)$

$$\vec{H}_2(\vec{r}) = \frac{I_2 R_2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi' [z \vec{e}_s(\phi) - s \vec{e}_z] + R_2 \vec{e}_z}{[s^2 + z^2 + R_2^2 - 2sR_2 \cos\phi']^{3/2}} d\phi'$$

Magnetfeld auf der z-Achse: $s=0!$

$$\Rightarrow \vec{H}_2(z) = \frac{I_2 R_2}{4\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi' \cdot z \vec{e}_s(\phi)}{[R_2^2 + z^2]^{3/2}} d\phi' + \int_0^{2\pi} \frac{R_2 \vec{e}_z}{[R_2^2 + z^2]^{3/2}} d\phi' \right\}$$

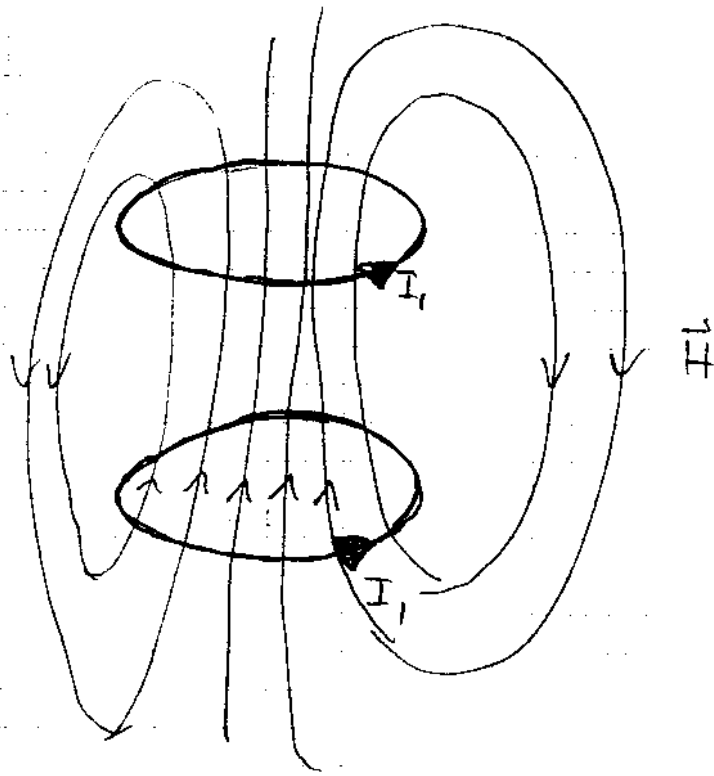
\downarrow
 $= 0$

$$\vec{H}_2(z) = \frac{I_2 R_2}{4\pi} \cdot 2\pi \cdot \frac{R_2}{[R_2^2 + z^2]^{3/2}} \vec{e}_z = \frac{I_2 R_2^2}{2} \cdot \frac{1}{[R_2^2 + z^2]^{3/2}} \vec{e}_z$$

analog $\vec{H}_1(z) = \frac{I_1 R_1^2}{2} \cdot \frac{1}{[R_1^2 + (z-d)^2]^{3/2}} \vec{e}_z$

$$\Rightarrow \vec{H}(z) = \left[\frac{1}{2} \frac{I_1 R_1^2}{[R_1^2 + (z-d)^2]^{3/2}} + \frac{1}{2} \frac{I_2 R_2^2}{[R_2^2 + z^2]^{3/2}} \right] \vec{e}_z$$

30b.



30c. nach Teilaufgabe a. gilt:

$$\vec{H}(z) = \left(\frac{1}{2} \frac{I_1 R_1^2}{[R_1^2 + (z-d)^2]^{3/2}} + \frac{1}{2} \frac{I_2 R_2^2}{[R_2^2 + z^2]^{3/2}} \right) \vec{e}_z := H(z) \vec{e}_z$$

approximiere nun zuerst durch die ersten 2 Glieder der Taylorreihe:

$$H(z) \approx \frac{1}{2} \left\{ \frac{I_1 R_1^2}{[R_1^2 + (\frac{d}{2})^2]^{3/2}} + \frac{I_2 R_2^2}{[R_2^2 + (\frac{d}{2})^2]^{3/2}} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\frac{3d}{2} I_1 R_1^2}{[R_1^2 + (\frac{d}{2})^2]^{5/2}} - \frac{\frac{3d}{2} I_2 R_2^2}{[R_2^2 + (\frac{d}{2})^2]^{5/2}} \right\} \cdot (z - \frac{d}{2})$$

$H(z)$ ist um $z = \frac{d}{2}$ annähernd homogen, d.h. konstant, wenn

$$\frac{\frac{3d}{2} I_1 R_1^2}{[R_1^2 + (\frac{d}{2})^2]^{5/2}} - \frac{\frac{3d}{2} I_2 R_2^2}{[R_2^2 + (\frac{d}{2})^2]^{5/2}} \stackrel{!}{=} 0 \text{ ist! } \nabla$$

Dies ist für den Spezialfall $I_1 = I_2 = I$ und $R_1 = R_2 = R$

erfüllt:

30c.

$$\boxed{I_1 = I_2 = I} \quad \text{und} \quad \boxed{R_1 = R_2 = R}$$

\Rightarrow linearer Term = 0

Betrachte nun auch noch den 3. Term der Taylorreihe:

$$H(z) \approx \frac{1}{2} \left\{ \frac{2IR^2}{[R^2 + (\frac{d}{2})^2]^{3/2}} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left(\frac{15d^2}{4} - 3[R^2 + (\frac{d}{2})^2] \right) I}{2[R^2 + (\frac{d}{2})^2]^{7/2}} \right\} I R^2 \cdot (z - \frac{d}{2})^2$$

$$\approx \frac{IR^2}{[R^2 + (\frac{d}{2})^2]^{3/2}} + \frac{IR^2}{2} (z - \frac{d}{2})^2 \cdot \left\{ \frac{15(\frac{d}{2})^2 - 3R^2 - 3(\frac{d}{2})^2}{[R^2 + (\frac{d}{2})^2]^{7/2}} \right\}$$

$$H(z) \approx \frac{IR^2}{[R^2 + (\frac{d}{2})^2]^{3/2}} + \frac{IR^2}{2} (z - \frac{d}{2})^2 \cdot \frac{3d^2 - 3R^2}{[R^2 + (\frac{d}{2})^2]^{7/2}}$$

Für $I_1 = I_2 = I$ und $R_1 = R_2 = R$ verschwindet auch der 3. Term der Taylorreihe um $z = \frac{d}{2}$ falls:

$$3d^2 - 3R^2 \stackrel{!}{=} 0$$

also $\boxed{R = d}$ ist!

Wird nun $I_1 = I_2 = I$ und $R_1 = R_2 = R = d$ gewählt, so ändert sich $H(z)$ um weniger als 1%, wenn z zwischen $\frac{d}{2} - 0.3d < z < \frac{d}{2} + 0.3d$ variiert wird!

[zu 30]

Einschub: Taylorreihe

$$f(x) = \frac{1}{[a^2+x^2]^{3/2}} \stackrel{\text{Taylor}}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \text{Restglied}(x)$$

Entwicklung von $f(x)$ in eine Taylorreihe um $x_0 = \frac{d}{2}$ bis zur 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{f^{(0)}(x_0 = \frac{d}{2})}{0!} (x - \frac{d}{2})^0 &= \frac{1}{[a^2 + (\frac{d}{2})^2]^{3/2}} (x - \frac{d}{2})^0 \\ &= \frac{1}{[a^2 + (\frac{d}{2})^2]^{3/2}} \cdot 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x_0 = \frac{d}{2}) &= f'(x) \Big|_{x=\frac{d}{2}} = \frac{d}{dx} \left\{ [a^2 + x^2]^{-3/2} \right\} \Big|_{x=\frac{d}{2}} \\ &= -\frac{3}{2} [a^2 + x^2]^{-5/2} \cdot 2x \Big|_{x=\frac{d}{2}} = -\frac{3d}{[a^2 + (\frac{d}{2})^2]^{5/2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(2)}(x_0 = \frac{d}{2}) &= f''(x) \Big|_{x=\frac{d}{2}} = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{-3x}{[a^2 + x^2]^{5/2}} \right\} \Big|_{x=\frac{d}{2}} \\ &= \frac{-3 \cdot [a^2 + x^2]^{5/2} + \frac{5}{2} [a^2 + x^2]^{3/2} \cdot 2x \cdot 3x}{[a^2 + x^2]^5} \Big|_{x=\frac{d}{2}} \\ &= \frac{-3[a^2 + x^2]^{1/2} + 15x^2}{[a^2 + x^2]^{3/2}} \Big|_{x=\frac{d}{2}} = \frac{\frac{15d^2}{4} - 3[a^2 + (\frac{d}{2})^2]}{[a^2 + (\frac{d}{2})^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{[a^2+x^2]^{3/2}} \approx \frac{1}{[a^2+(\frac{d}{2})^2]^{3/2}} - \frac{\frac{3d}{2}}{[a^2+(\frac{d}{2})^2]^{5/2}} (x-\frac{d}{2}) + \frac{\frac{15d^2}{4} - 3[a^2+(\frac{d}{2})^2]}{2 \cdot [a^2+(\frac{d}{2})^2]^{3/2}} \cdot (x-\frac{d}{2})^2$$

$= -1 \cdot 2 = 2$

31. Aufgabe

Formel gilt nur allgemein für kart. Koord. und für V_2 in Zylinderkoordin.

$$\begin{aligned}
 \vec{V}_m &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{r}'_1}{|\vec{r}-\vec{r}'_1|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{r}'_2}{|\vec{r}-\vec{r}'_2|} \\
 &\quad \text{linker Stromfaden} \qquad \qquad \text{rechter Stromfaden}
 \end{aligned}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \vec{r}'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ y'_1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{r}'_2 = \begin{pmatrix} d \\ y'_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d\vec{r}'_1 = \vec{e}_y dy'_1; \quad d\vec{r}'_2 = -\vec{e}_y dy'_2$$

$$\Rightarrow \vec{V}_m = \frac{I\mu_0}{4\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{e}_y dy'_1}{\sqrt{x^2 + (y-y'_1)^2 + z^2}} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{e}_y dy'_2}{\sqrt{(x-d)^2 + (y-y'_2)^2 + z^2}} \right\}$$

Bronstein Nr. 192: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \text{Subst. } u = y - y'_1 &\rightarrow dy'_1 = -du, \quad u_m = +\infty, \quad u_0 = -\infty \\
 v = y - y'_2 &\rightarrow dy'_2 = -dv, \quad v_u = +\infty, \quad v_0 = -\infty
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_m = \frac{I\mu_0}{4\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{x^2+z^2+u^2}} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{\sqrt{(x-d)^2+z^2+v^2}} \right\} \vec{e}_y$$

$$= \frac{I\mu_0}{4\pi} \left[2 \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^k \frac{du}{\sqrt{x^2+z^2+u^2}} \right\} - 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k \frac{dv}{\sqrt{(x-d)^2+z^2+v^2}} \right] \vec{e}_y$$

$$= \frac{I\mu_0}{2\pi} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \ln \frac{k + \sqrt{x^2+z^2+k^2}}{\sqrt{x^2+z^2}} - \ln \frac{k + \sqrt{(x-d)^2+z^2+k^2}}{\sqrt{(x-d)^2+z^2}} \right\} \right] \vec{e}_y$$

$$= \frac{I\mu_0}{2\pi} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \ln \frac{(k + \sqrt{x^2+z^2+k^2}) \cdot (\sqrt{(x-d)^2+z^2})}{\sqrt{x^2+z^2} \cdot (k + \sqrt{(x-d)^2+z^2+k^2})} \right] \vec{e}_y$$

$$\boxed{\vec{V}_m = \frac{I\mu_0}{4\pi} \ln \frac{(x-d)^2+z^2}{x^2+z^2} \vec{e}_y = V_m \cdot \vec{e}_y}$$

für große k !

3/b.

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{V}_m = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & V_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_x \left(-\frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_z \frac{\partial V_y}{\partial x}$$

$$= \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{I \mu_0}{4\pi} \ln \frac{(x-d)^2 + z^2}{x^2 + z^2} \right\} - \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{I \mu_0}{4\pi} \ln \frac{(x-d)^2 + z^2}{x^2 + z^2} \right\}$$

$$= \frac{I \mu_0}{4\pi} \left\{ \vec{e}_z \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\ln((x-d)^2 + z^2) - \ln(x^2 + z^2) \right] + \dots \right.$$

$$\left. \dots - \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial z} \left[-\ln((x-d)^2 + z^2) + \ln(x^2 + z^2) \right] \right\}$$

$$= \frac{I \mu_0}{4\pi} \left\{ \vec{e}_z \left[\frac{2(x-d)}{(x-d)^2 + z^2} - \frac{2x}{x^2 + z^2} \right] + \vec{e}_x \left[\frac{2z}{x^2 + z^2} - \frac{2z}{(x-d)^2 + z^2} \right] \right\}$$

oder:

$$\vec{B} = \frac{I \mu_0}{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{z}{x^2 + z^2} - \frac{z}{(x-d)^2 + z^2} \\ 0 \\ \frac{x-d}{(x-d)^2 + z^2} - \frac{x}{x^2 + z^2} \end{pmatrix}$$

Übungen Theoretische Elektrotechnik III: Blatt 9

Aufgabe 32: Magnetfeld einer stromdurchflossenen Ringspule

In dieser Aufgabe soll das magnetische Feld einer Ringspule, welche symmetrisch zur z-Achse ist und vom Strom I durchflossen wird, berechnet werden, siehe auch Abb. 1. Die Spule habe den Radius R, die Länge L und besitze n Windungen. Die Spule sei so dicht gewickelt, daß man sie sich aus sehr vielen stromführenden Kreisringen (vgl. Aufgabe 30) vorstellen kann.

Die Überlagerung der Felder aller Kreisströme (Windungen) mit dem Strombelag $K = \frac{n \cdot I}{L}$ ergibt das Gesamtfeld.

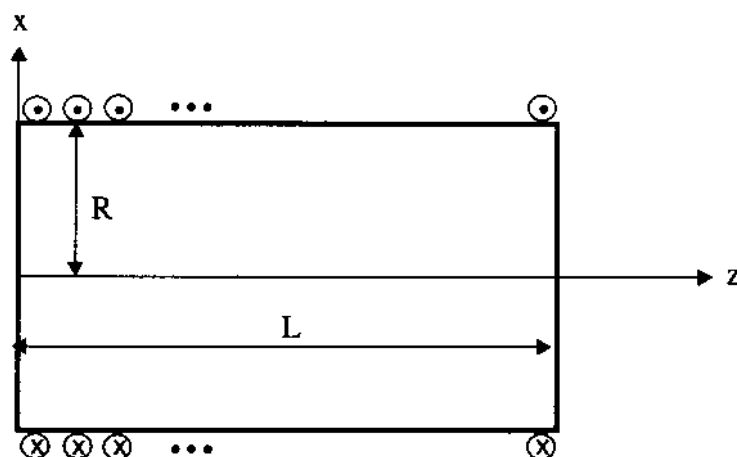


Abb. 1 Ringspule der Länge L

- Berechnen Sie das magnetische Feld $\vec{H}(z)$ auf der z-Achse.
- Vereinfachen Sie das Ergebnis von a., wenn sich der Beobachtungspunkt des Feldes nun in der Spulenmitte befindet, und es sich um eine sehr lange Spule handelt!

Aufgabe 33: Gegeninduktivität eines Helmholtzspulenpaares

Berechnen Sie die Gegeninduktivität des Helmholtzspulenpaares aus Aufgabe 30 a. Nehmen Sie hierfür an, daß sich die Anordnung im Vakuum befindet.

Die Gegeninduktivität kann man auch (einfacher) berechnen, wenn das Vektorpotential eines Kreisringes bekannt ist. Leiten Sie die hierfür gültige Beziehung her!

32. Aufgabe

a. Das Magnetfeld eines sich im Ursprung befindlichen Kreisringes ergibt sich nach Aufgabe 30a. zu:

$$\vec{H}(z) = \frac{I \cdot R^2}{z} \cdot \frac{1}{[R^2 + z^2]^{3/2}} \vec{e}_z$$

Fasse Spule als Summe von Kreisströmen auf und addiere über alle Ströme. Dazu ersetze $I \rightarrow k_0 dz'$ und verschiebe Kreisring aus Ursprung: $z \rightarrow z - z'$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{H}(z) &= \int_{z'=0}^L \frac{k_0 R^2}{z} \cdot \frac{1}{[R^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dz' \vec{e}_z \\ &= \frac{k_0 R^2}{z} \vec{e}_z \cdot \int_{z'=0}^L \frac{dz'}{[R^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

In jeder Windung fließt der Strom $I \Rightarrow k_0 = \frac{n \cdot I}{L}$

$$\Rightarrow \vec{H}(z) = \frac{n \cdot I \cdot R^2}{zL} \vec{e}_z \int_{z'=0}^L \frac{dz'}{[R^2 + (z-z')^2]^{3/2}}$$

Sub: $u = z - z' \rightarrow dz' = -du$

Grenzen: $z' = 0 \rightarrow u = z$

$z' = L \rightarrow u = z - L$

$$= \frac{n \cdot I \cdot R^2}{zL} \int_{z-L}^z \frac{du}{[R^2 + u^2]^{3/2}} \vec{e}_z$$

Brantlin Nr. 206: $\int \frac{dx}{\sqrt{[x^2+a^2]^3}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2+a^2}}$

$$= \frac{n \cdot I \cdot R^2}{zL} \left[\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{R^2+(z-L)^2}} \right] \vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{H}(z) = \frac{n \cdot I}{zL} \left[\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{R^2+(z-L)^2}} \right] \vec{e}_z}$$

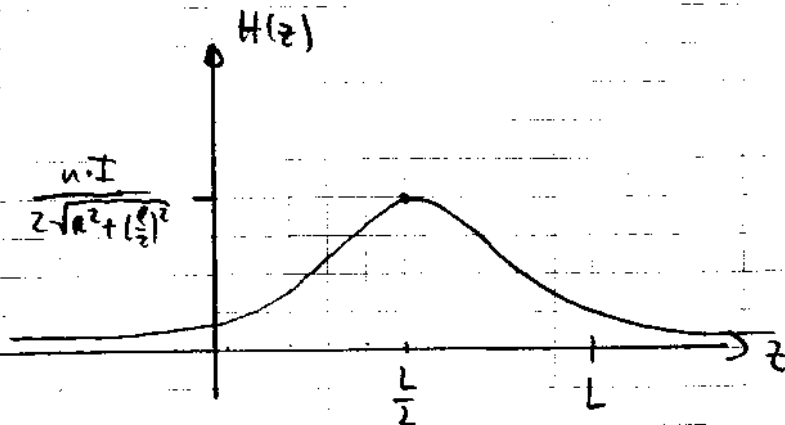
BZb. sehr lange Spule, d.h. $L \gg R$ und innerhalb
 der Spule, z.B. Spulenmitte $\Rightarrow z \gg R$

$$\Rightarrow \vec{H}(z) \approx \frac{n \cdot I}{2L} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z-L}{|z-L|} \right] \vec{e}_z$$

Beachte: $|z| < |L|$ d.h. $z-L < 0$

$$\Rightarrow \vec{H}(z) \approx \frac{n \cdot I}{2L} [1 - (-1)] \vec{e}_z = \frac{n \cdot I}{L} \vec{e}_z$$

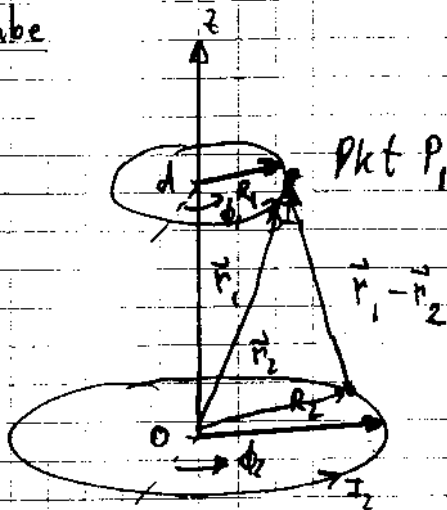
Bild: $\vec{H}(z) = \frac{n \cdot I}{2L} \vec{e}_z \left[\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{R^2 + (z-L)^2}} \right]$



\Rightarrow Feld existiert auch außerhalb der Spule!

33. Aufgabe

-1-



Pkt P_1 Gegeninduktivität: $L_{12} := \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$

$$\vec{r}_2 = R_2 \vec{e}_\phi(\phi_2)$$

$$\vec{r}_1 = R_1 \vec{e}_\phi(\phi_1) + d \cdot \vec{e}_z$$

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{R_2^2 + R_1^2 - 2R_1R_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + d^2}$$

$$d\vec{s}_1 = \vec{e}_\phi(\phi_1) ds_1 = \vec{e}_\phi(\phi_1) R_1 d\phi_1$$

$$d\vec{s}_2 = \vec{e}_\phi(\phi_2) R_2 d\phi_2$$

$$\Rightarrow L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\phi_1=0}^{2\pi} \left[\int_{\phi_2=0}^{2\pi} \frac{R_1 R_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) d\phi_2 d\phi_1}{\sqrt{R_2^2 + R_1^2 - 2R_1R_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) + d^2}} \right]$$

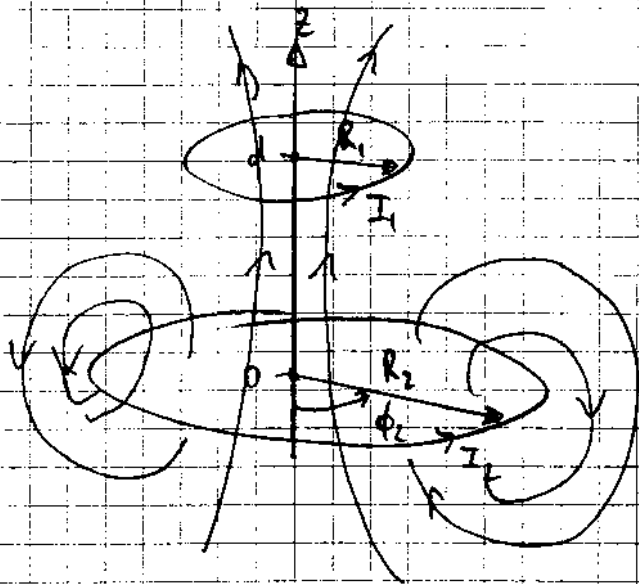
aus Symmetrie gründen kann das Ergebnis nicht von der Lage des Pktes P_1 abhängig sein, d.h. die Integration bezüglich ϕ_1 wird eine Multiplikation mit 2π ; setze $\phi_1 = 0$ in den \cos -Terme

$$\Rightarrow L_{12} = \frac{\mu_0 R_1 R_2}{2} \int_{\phi_2=0}^{2\pi} \frac{\cos \phi_2}{\sqrt{R_2^2 + R_1^2 + d^2 - 2R_1R_2 \cos \phi_2}} d\phi_2$$

Anmerkung: $L_{12} = L_{21}$

33. Aufgabe

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}$$



Φ_{21} = magn. Fluss von Strom 2 erzeugt, durch Spule (Schleife) 1 fließend

$$\Phi_{21} = \iint_{\vec{A}_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{A}_1 = \iint_{\text{rot } \vec{V}_{m2}} d\vec{A}_1 \quad \downarrow \text{Stokes}$$

$$\Phi_{21} = \oint_{\text{Kreis 1}} \vec{V}_{m2} \cdot d\vec{s}_1$$

$$\Rightarrow L_{21} = \frac{\oint \vec{V}_{m2} \cdot d\vec{s}_1}{I_2}$$

Vektorpotential eines Kreisrings:

$$\vec{V}_{m2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I_2 d\vec{s}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \int_{\phi_2=0}^{2\pi} \frac{R_2 \vec{e}_\phi(\phi_2) d\phi_2}{\sqrt{s^2 + z^2 + R_2^2 - 2sR_2 \cos(\phi - \phi_2)}}$$

Symmetrie: \vec{V}_{m2} unabhängig von $\phi \Rightarrow$ setze $\phi = 0$

$$\Rightarrow \vec{e}_\phi(\phi_2) = -\sin\phi_2 \vec{e}_x + \cos\phi_2 \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{m2} = \frac{I_2 \mu_0}{4\pi} \int_{\phi_2=0}^{2\pi} \frac{R_2 [-\sin\phi_2 \vec{e}_x + \cos\phi_2 \vec{e}_y]}{\sqrt{s^2 + z^2 + R_2^2 - 2sR_2 \cos\phi_2}} d\phi_2$$

\vec{V}_m hat immer Richtung des Stromes; Strom: \vec{e}_ϕ -komp. $\hat{=} \vec{e}_y$ Keine \vec{e}_x -Komponente, d.h. $\int_{\phi_2=0}^{2\pi} \frac{-R_2 \sin\phi_2 \vec{e}_x}{\sqrt{\dots}} d\phi_2 = 0$

Resubstitution $\phi \neq 0 \Rightarrow \vec{e}_y \rightarrow \vec{e}_\phi(\phi)$

$$\Rightarrow \vec{V}_{m2} = \frac{I_2 \mu_0 R_2}{4\pi} \int_{\phi_1=0}^{2\pi} \frac{\cos\phi_2 \vec{e}_\phi(\phi)}{\sqrt{s^2 + z^2 + R_2^2 - 2sR_2 \cos\phi_2}} d\phi_2$$

$\Rightarrow \Phi_{21} = \oint_{\text{Kreis 1}} \vec{V}_{m2} \cdot d\vec{s}_1$ auf Kreis 1 wird $s \rightarrow R_1$; $\phi \rightarrow \phi_1$; $z \rightarrow d$
 $d\vec{s}_1 = \vec{e}_\phi(\phi_1) R_1 d\phi_1$

$$\Rightarrow L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2} = \frac{\mu_0 R_1 R_2}{4\pi} \cdot 2\pi \int_{\phi_1=0}^{2\pi} \frac{\cos\phi_2}{\sqrt{R_1^2 + d^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos\phi_2}} d\phi_2$$

34. Aufgabe

Def: Induktivität := der durch den Strom I erzeugte magnetische Energieinhalt gemäß

$$W_{\text{mag.}} = \frac{1}{2} L I^2$$

inner } Induktivität = Energie { innerhalb des Leiters
äußere } { außerhalb des Leiters

a. Innere Induk.

$$W_{\text{mag.}} = \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dV = \frac{1}{2} \mu_0 \int |\vec{H}|^2 dV$$

Betrachte Leiter der Länge L !

nach Aufgabe 26: $H(s) = \frac{2I}{\pi d^2} s$, $s \in [0, \frac{d}{2}]$

$$\Rightarrow W_{\text{mag.}} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{4I^2}{\pi^2 d^4} \int_{s=0}^{\frac{d}{2}} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L s^2 \cdot s ds d\phi dz$$

$$W_{\text{mag.}} = \frac{I^2 \mu_0}{2\pi^2 d^4} 2\pi \left(\frac{d}{2}\right)^4 \cdot L = \frac{1}{2} I^2 \left(\frac{\mu_0}{8\pi} \cdot L \right) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} L_i I^2$$

$$\Rightarrow \boxed{L_i} = \frac{L_i}{L} = \boxed{\frac{\mu_0}{8\pi}}$$

34b, äußere Indukt.

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \mu_0 \int |\vec{H}_a|^2 d.V. ; \text{Beachte: } s > \frac{d}{2} !$$

aus Aufg. 26: $H(s) = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{s}, s > \frac{d}{2}$

$$\Rightarrow W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \mu_0 \int_{\frac{d}{2}}^s \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L \frac{I^2}{4\pi^2} \frac{1}{s'^2} s' d s' d \phi dz$$

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} I^2 \frac{\mu_0}{4\pi^2} \cdot 2\pi \cdot L \cdot \ln \frac{s}{\frac{d}{2}} = \frac{1}{2} L_a I^2$$

$$\Rightarrow \boxed{L_a = \frac{L_a}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2s}{d}}$$

35. Aufgabe

Ist die Geschwindigkeit nicht groß genug,
so wird das Elektron auf eine Kreisbahn

gezwungen: $|\vec{F}_Z| = |\vec{F}_{\text{Lorentz}}|$

$$m_e \frac{v^2}{r} = |q \cdot \vec{v} \times \vec{B}|, \quad \vec{v} \perp \vec{B}$$

$$m_e \frac{v^2}{r} = q \cdot v \cdot B$$

$$v = \frac{q \cdot B}{m_e} \cdot r$$

maximal möglicher Radius $r = 2b$

$$\Rightarrow v > \frac{q \cdot B}{m_e} \cdot 2b$$

Übungen Theoretische Elektrotechnik III: Blatt 10

Aufgabe 36: Elektron im quasistationären elektromagnetischen Feld: Magnetron

Gegeben sei ein Magnetron, d.h. eine Hochvakuum-Elektronenröhre, deren Strom durch ein von außen einstellbares magnetisches Feld, geregelt werden kann. Ein einfaches ebenes Magnetron ist in Abb. 1 zu sehen. Ein Elektron, welches sich im Ursprung des Koordinatensystemes befindet (somit $\vec{r}(t=0) = \vec{0}$), verlasse die negative Elektrode (Katode) mit vernachlässigbarer Geschwindigkeit, also $\vec{v}(t=0) = \vec{0}$. Berechnen Sie die Bahnkurve des Elektrons mit der Masse m_e und der Ladung $q = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$!

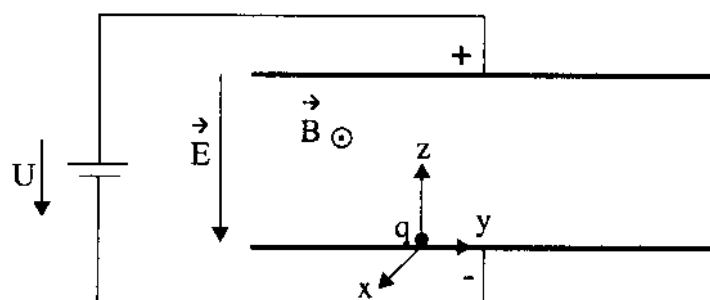


Abb. 1 Ebenes Magnetron

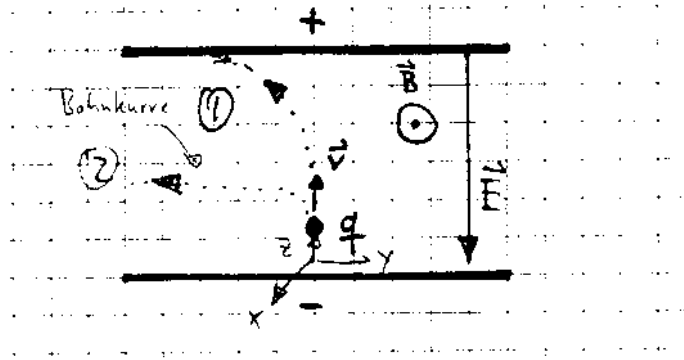
Hinweis: Sie können annehmen, daß sich das Elektron für alle Zeiten im quasistationären elektromagnetischen Feld befindet, da das Magnetron sehr große Abmessungen habe. Ferner gelte $\vec{E}(\vec{r}) = -E \cdot \vec{e}_z$ und $\vec{B}(\vec{r}) = B \cdot \vec{e}_x$ mit $E, B = \text{konst.}$ Außerdem sei die Gewichtskraft vernachlässigbar.

Aufgabe 37: Leiterschleife mit veränderlicher Fläche

Gegeben sei eine in der xy -Ebene liegende ebene Leiterschleife gemäß Abb. 2. Die von der Leiterschleife aufgespannte Fläche sei rechteckförmig. Die Kanten 1,2,3 der Leiterschleife rühen, die Kante 4 führe eine Bewegung in x -Richtung mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v} = v \cdot \vec{e}_x$ aus. Während der Bewegung gleite die Kante 4 auf den unendlich ausgedehnten

36. Aufgabe

-1-



Kurve ①: erreicht pos Elektrode
→ Stromfluß

Kurve ②: kein Stromfluß,
durch hohes B-Feld

Elektron wird aufgrund des elektrischen Feldes beschleunigt \Rightarrow hat Geschwindigkeit \vec{v} , entspricht somit einem fließenden Strom \Rightarrow Magnetfeld wird vom Elektron aufgebaut, welches dem äußeren Magnetfeld entgegenwirken muß (Lenz'sche Regel)

→ Lorentzkraft, Ablenkung mehr oder weniger stark nach links (mit Elektron)

Kräftegleichgewicht: $m_e \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{E\text{-Feld}} + \vec{F}_{\text{Lorentz}}$

$$m_e \cdot \ddot{\vec{r}} = q \cdot \vec{E} + q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

$$m_e \cdot \ddot{\vec{r}} = -q \cdot E \vec{e}_z + q \cdot \dot{\vec{r}} \times B \vec{e}_x$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \quad \dot{\vec{r}} \times B \vec{e}_x = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_y B \cdot \dot{z} - \vec{e}_z B \cdot \dot{y}$$

$$\Rightarrow m_e \left[\ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y + \ddot{z} \vec{e}_z \right] = -q \cdot E \vec{e}_z + q \cdot B \cdot \dot{z} \vec{e}_y - q \cdot B \cdot \dot{y} \vec{e}_z$$

Aufspaltung nach Koordinaten \Rightarrow 3 Gleichungen

$$\vec{e}_x: \quad m_e \ddot{x} = 0 \quad (\text{I})$$

$$\vec{e}_y: \quad m_e \ddot{y} = q \cdot B \cdot \dot{z} \quad (\text{II})$$

$$\vec{e}_z: \quad m_e \ddot{z} = -qE - q \cdot B \cdot \dot{y} \quad (\text{III})$$

aus (I): $\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = C_1 \Rightarrow x = C_1 t + C_2$

$$v(t=0) = \dot{x}(t=0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 ; x(t=0) = 0 = C_2 = 0$$

36.

\Rightarrow $|x=0|$ Elektron verläuft nur in y - z -Ebene $-z=$

Gleichung (II) und (III) sind miteinander verkoppelt!

$$\int \text{(II)} dt : m_e \dot{y} = q \cdot B \cdot z + C_3$$

$$\dot{y} = \frac{q \cdot B}{m_e} \cdot z + C_3$$

$$\dot{y}(t=0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{q \cdot B}{m_e} \cdot \underbrace{z(t=0)}_{=0} + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\dot{y} = \frac{q \cdot B}{m_e} \cdot z} \quad \text{(IV)}$$

$$\text{(IV) in III: } m_e \ddot{z} = -q \cdot E - q \cdot B \cdot \frac{q \cdot B}{m_e} \cdot z$$

$$\ddot{z} + \left(\frac{q \cdot B}{m_e} \right)^2 z = -\frac{q \cdot E}{m_e} \quad \text{inhomogene, lineare Dgl. 2. Ord.}$$

$$z = z_{\text{homogen}} + z_{\text{inhomogen}}$$

$$\text{Lösung d. homogenen Dgl: } \ddot{z} + \left(\frac{q \cdot B}{m_e} \right)^2 z = 0$$

$$\text{Ansatz } e^{\lambda t} \text{ in Dgl. : } \lambda^2 + \left(\frac{q \cdot B}{m_e} \right)^2 = 0$$

$$\text{Eigenfkt.: } \underline{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}} \quad \lambda_{1/2} = \pm i \frac{q \cdot B}{m_e} \quad \text{Eigenfrequenzen}$$

$$\Rightarrow z_{\text{homog}}(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}$$

eine Lösung der inhomogenen Dgl. ist sicherlich $z_{\text{inhom}} = k_3$

$$\Rightarrow z = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} + k_3$$

$$\text{Einsetzen von } z_{\text{inhom}} \text{ in Dgl.: } \ddot{z}_{\text{inhomogen}} + \left(\frac{q \cdot B}{m_e} \right)^2 z_{\text{inhomogen}} = -\frac{q \cdot E}{m_e}$$

$$\text{oder } 0 + \left(\frac{q \cdot B}{m_e} \right)^2 k_3 = -\frac{q \cdot E}{m_e}$$

36.

$$k_3 \left(\frac{qB}{m_e} \right)^2 = - \frac{qE}{m_e} = 0 \quad \Rightarrow \quad k_3 = - \frac{Em_e}{q \cdot B^2} \quad -3-$$

$$\Rightarrow z(t) = k_1 e^{j \frac{qB}{m_e} t} + k_2 e^{-j \frac{qB}{m_e} t} - \frac{Em_e}{qB^2}$$

Anfangswerte: $z(t=0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow k_1 + k_2 - \frac{Em_e}{qB^2} = 0 \quad (1)$

$$\dot{z}(t=0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow k_1 j \frac{qB}{m_e} - k_2 j \frac{qB}{m_e} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{k_1 = k_2} \quad (2)$$

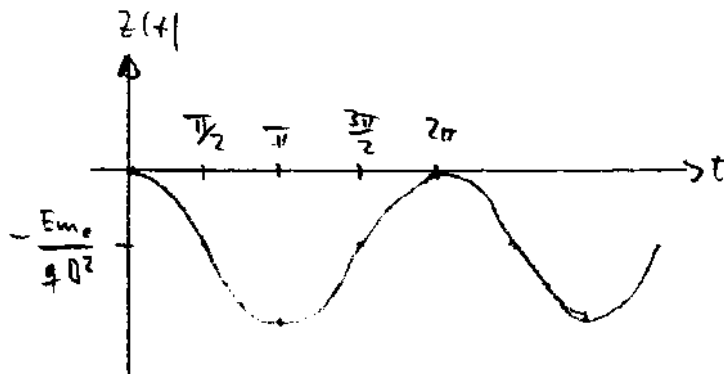
(2) in (1): $2k_1 - \frac{Em_e}{qB^2} = 0$

$$k_1 = \frac{Em_e}{2qB^2}$$

$$\Rightarrow z(t) = \frac{Em_e}{qB^2} \cdot \frac{e^{j \frac{qB}{m_e} t} + e^{-j \frac{qB}{m_e} t}}{2} - \frac{Em_e}{qB^2}$$

$$= \cos\left(\frac{qB}{m_e} t\right)$$

$$z(t) = \frac{Em_e}{qB^2} \cdot [\cos\left(\frac{qB}{m_e} t\right) - 1]$$



Beachte: $q = -1.602 \cdot 10^{-19} \text{ As} < 0 \Rightarrow z(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$
 d.h. Elektron ist wirklich immer nur
 im Halbraum $z > 0$!

36.

-4-

$$z(t) = \frac{Em_e}{qB^2} \left[\cos\left(\frac{qB}{m_e} t\right) - 1 \right]$$

(IV) $\dot{y} = \frac{q \cdot B}{m_e} z$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{E}{B} \int \left[\cos\left(\frac{qB}{m_e} t\right) - 1 \right] + k_4$$

$$y(t) = \frac{E}{B} \left\{ \frac{m_e}{qB} \sin\left(\frac{qB}{m_e} t\right) - t \right\} + k_4$$

$$y(t=0) = 0 \Rightarrow k_4 = 0$$

$$\dot{y}(t=0) = 0 : \frac{qB}{m_e} \cdot \left[\cos\left(\frac{qB}{m_e} \cdot 0\right) - 1 \right] = 0 \checkmark$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{Em_e}{qB^2} \sin\left(\frac{qB}{m_e} t\right) - \frac{E}{B} t$$

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{Em_e}{qB^2} \sin\left(\frac{qB}{m_e} t\right) - \frac{E}{B} t \\ \frac{Em_e}{qB^2} \left[\cos\left(\frac{qB}{m_e} t\right) - 1 \right] \end{pmatrix}$$

Übungen Theoretische Elektrotechnik III Blatt 13

Aufgabe 43: Leitungstheorie

Es scheint zunächst verwunderlich zu sein Leitungstheorie im Rahmen der elektromagnetischen Feldtheorie (TET III) und nicht der Vorlesung Netzwerktheorie (TET I/II) zu behandeln. erinnert man sich allerdings an die Voraussetzungen zur diskreten netzwerktheoretischen Behandlung, so stößt man unweigerlich auf die Annahme, die Wellenlängen der betrachtenden Größen (Spannungen und Ströme) seien groß im Vergleich zu den Abmessungen des Netzwerkes. Mit zunehmender Frequenz erreicht diese Annahme jedoch ihre Gültigkeitsgrenzen und muß dann unter dem allgemeinen Ansatz verteilter Bauelemente betrachtet werden. Dies führt wie in der Vorlesung TET III hergeleitet zu den sogenannten Telegraphengleichungen identisch in U und I (Vorl. 6.5.5a und 6.5.5b), als Basis der Leitungstheorie.

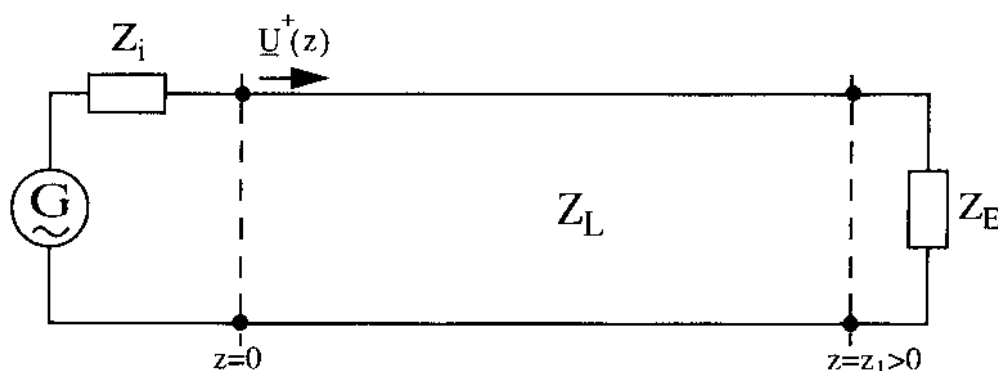


Abb. 43.1: Übertragungsleitung gespeist durch einen Generator mit Innenwiderstand Z_i und Abschlußwiderstand Z_E

Gegeben sei das in Abb. 43.1 dargestellte Netzwerk, das durch einen Generator G , der ein hochfrequentes sinusförmiges Signal der Frequenz $f = 10\text{MHz}$ erzeugt, gespeist wird. Weiterhin sei der Generator mit einem Innenwiderstand Z_i behaftet, der identisch dem Wellenwiderstand Z_L der angeschlossenen Leitung der Länge z_1 ist.

Weiterhin ist die Leitung durch ihren Widerstandsbelag von $R' = 600\Omega/\text{km}$, einen Induktivitätsbelag von $L' = 0,25\mu\text{H}/\text{m}$, dem Kapazitätsbelag von $C' = 100\text{pF}/\text{m}$ und einem vernachlässigbar kleinen Leitwertbelag $G' = 0$ charakterisiert. Die Abschlußimpedanz ist rein reell und beträgt $Z_E = 150\Omega$.

- a. Berechnen Sie unter der Voraussetzung $R' \ll \omega \cdot L'$ (d.h. für hohe Frequenzen)
 - aa. den Wellenwiderstand Z_L der Leitung,
 - ab. die komplexe Fortpflanzungskonstante γ , sowie die sich ergebende Dämpfungskonstante α und Phasenkonstante β ,
 - ac. die Wellenlänge λ ,
 - ad. die Ausbreitungsgeschwindigkeit v_c der Welle.

Hinweis: Verwenden Sie bei der Bestimmung der Größen unter Aufgabenteil ab. die Näherung $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ für $|x| \ll 1$.

Der Generator erzeugt eine in positive z -Richtung laufende zeitharmonische Spannungswelle der komplexen Amplitude $\underline{U}^+(z) = U_0 \cdot e^{-\gamma \cdot z}$.

- Beschreiben Sie anschaulich den weiteren qualitativen Verlauf der Spannungswelle.
- Bestimmen Sie die komplexe Amplitude der zurücklaufenden Welle und den Amplitudenreflexionsfaktor zuerst am Ort $z = z_1$ und danach für beliebige Orte $0 \leq z \leq z_1$.
- Berechnen Sie die komplexe Amplitude der Gesamtspannungswelle $\underline{U}(z)$ auf der Leitung. Wie kann man daraus den Verlauf der Stromwellenamplitude $\underline{I}(z)$ in der Leitung bestimmen?
- Skizzieren Sie die Momentanbilder der hinlaufenden Spannungswelle auf der Leitung für etwa zwei Wellenlängen für: $t \in \{0, T/4, T/2\}$, wobei T der Periodendauer einer zeitlichen Schwingung entspricht.
- Skizzieren Sie die zeitlichen Verläufe der hinlaufenden Spannungswelle auf der Leitung im Intervall $0 \leq t \leq 2T$ an den Stellen: $z/\lambda \in \{0, 1/4, 1/2\}$

Aufgabe 44: Asymmetrischer Dielektrischer Wellenleiter

Um die mathematische Problembehandlung der Lichtführung in optischen Fasern zu entschärfen, ist es beliebt grundlegende Betrachtungen an sogenannten dielektrischen Film- oder Schichtwellenleitern zu vollziehen, denen ja auch insbesondere im Bereich der Integrations-technik ebenfalls eine wesentliche Bedeutung hinzukommt. Diese Schichtwellenleiter bestehen aus dielektrischen, als verlustlos (d.h. nicht leitend) angenommenen Schichten unterschiedlicher Brechzahlen. Wie Abbildung 44.1 zeigt, sind die verschiedenen Schichten sowohl in y - als auch in z -Richtung unendlich ausgedehnt.

Lediglich in x -Richtung ist hier eine Begrenzung der inneren Schicht, der sogenannten „Wellenleiter Schicht“, auf eine endliche Höhe $h = 2 \cdot a$ gegeben.

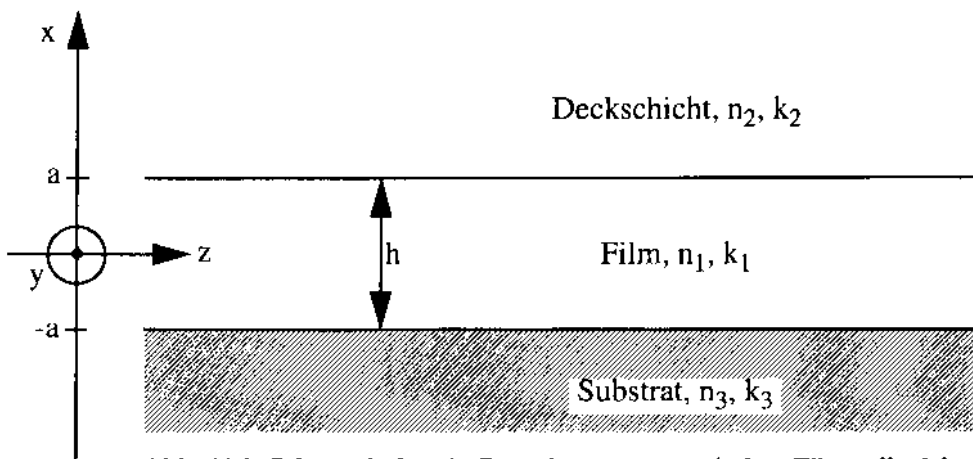


Abb. 44.1: Schematischer Aufbau eines asymmetrischen Filmwellenleiters

Um der Forderung nach dauerhafter Lichtführung nachzukommen, muß sowohl an der Grenzfläche zur Deckschicht (n_1, n_2) als auch zum Substrat (n_1, n_3) hin Totalreflexion auftreten.

- In welcher Beziehung müssen demnach n_1, n_2 und n_3 stehen?

Eine sich im Filmwellenleiter ausbreitende Welle stellt im Grunde eine Lösung der allgemeinen Wellengleichung (vgl. Aufgabe 39 auf Aufgabenblatt 11)

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \left(\frac{n}{c}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (\text{Gl. 44.1})$$

mit den entsprechenden Randbedingungen dar. Für die elektrische Feldkomponente der Lichtwelle wird folgender Ansatz gewählt:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = E_y(x) \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \hat{e}_y. \quad (\text{Gl. 44.2})$$

- b. Charakterisieren Sie die durch das $\underline{\vec{E}}$ -Feld nach Gl. 44.2 beschriebene elektromagnetische Welle.

Im weiteren werden folgende Substitutionen mit der jeweiligen Freiraum-Ausbreitungs-Konstanten k_μ vereinbart:

$$q_1 = \sqrt{k_1^2 - \beta^2} \quad \text{für } -a < x < a \quad (\text{Gl. 44.3a})$$

$$\kappa_2 = \sqrt{\beta^2 - k_2^2} \quad \text{für } a < x < \infty \quad (\text{Gl. 44.3b})$$

$$\kappa_3 = \sqrt{\beta^2 - k_3^2} \quad \text{für } -\infty < x < -a \quad (\text{Gl. 44.3c})$$

mit $k_\mu = \frac{n_\mu \cdot \omega}{c_0}$, $\mu \in \{1, 2, 3\}$, $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}}$: Vakuumlichtgeschwindigkeit.

- c. Bestimmen Sie unter Verwendung von Gl. 44.3a,b,c, die sich durch Einsetzen von Gl. 44.2 in Gl. 44.1 ergebenden vereinfachten Wellengleichungen.
- d. Nutzen Sie nun die allgemeinen Grenzflächenbedingungen der elektromagnetischen Feldtheorie aus, um einen Ansatz zur Verteilung der elektrischen Feldamplitude $E_y(x)$ aus Gl. 44.2 zu finden. Unterscheiden Sie dabei gerade und ungerade Modi.
- e. Skizzieren Sie die sich ergebende E-Feld-Verteilung qualitativ für den ersten geraden und ungeraden Modus. Heben Sie dabei die Unterschiede zu einem symmetrischen Wellenleiter heraus.
- f. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von der ermittelten elektrischen Feldstärkeverteilung $E_y(x)$ den zugehörigen magnetischen Feldstärkevektor $\underline{\vec{H}}(\vec{r}, t)$.

BLATT 13

Aufgabe 43: Leitungstheorie

Gegeben: $f = 10 \text{ MHz} \rightarrow \omega = 2\pi f = 20 \cdot \pi \cdot 10^6 \frac{1}{s}$

$z_i = z_L$

$z_E = 150 \Omega$

$R' = 600 \Omega / \text{km}$ (ca. Faktor 10 zu groß gegenüber Realität / Praxis)
 $G' = 0$ (häufig vorkommende Annahme)

$L' = 0,25 \cdot 10^{-6} \frac{\text{H}}{\text{m}}$

$C' = 100 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$

Lösungen zu

a) $R' \ll \omega L'$

aa) $z_L = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{j\omega C'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \cdot \sqrt{1 + \frac{R' \cdot C'}{j\omega L'}} \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}}$

$\rightarrow z_L = 50 \Omega$

ab) $\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L') \cdot (G' + j\omega C')} = \sqrt{j\omega C' R' + (j\omega)^2 L' C'}$

$= j\omega \sqrt{L' C'} \cdot \sqrt{1 + \frac{R'}{j\omega L'}} \stackrel{*}{=} j\omega \sqrt{L' C'} \cdot \left(1 + \frac{R'}{2j\omega L'}\right) \left| \text{da } \frac{R'}{\omega L'} \ll 1 \right.$

$= j\omega \sqrt{L' C'} + \frac{j\omega R'}{2j\omega L'} \cdot \sqrt{L' C'} = \frac{R'}{2} \cdot \sqrt{\frac{C'}{L'}} + j\omega \sqrt{L' C'}$

* $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \quad |x| \ll 1$
 Wissen!

$\underbrace{\frac{R'}{2} \cdot \sqrt{\frac{C'}{L'}}}_{\alpha} + j \cdot \underbrace{j\omega \sqrt{L' C'}}_{\beta}$

$\gamma = \frac{R'}{2} \cdot \frac{1}{z_L} + j\omega \sqrt{L' C'}$	$= 6 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{m}} + j \cdot \pi \cdot 10^{-1} \frac{1}{\text{m}}$
$\alpha = \frac{R'}{2} \cdot \frac{1}{z_L}$	$= 6 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{m}}$
$\beta = \omega \sqrt{L' C'}$	$= \pi \cdot 10^{-1} \frac{1}{\text{m}}$

a c)
$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\pi \cdot 10^{-1}} \text{ m} = 20 \text{ m}$$

a d) Ausbreitungsgeschwindigkeit / Phasengeschwindigkeit:

$$v_c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = 2 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 66,7\% \cdot c_0$$

b) Die vom Generator erzeugte Spannungswelle $\underline{u}^+(z)$ erfährt an der ersten „Stoßstelle“ bei $z=0$ keine Reflexion, da durch $Z_i = Z_L = 50 \Omega$, Anpassung besteht.

Die Welle breitet sich dann längs der Leitung bis zu $z=z_1$ aus und wird auf ihrem Weg aufgrund des nicht vernachlässigbaren Widerstandsbelags der Leitung exponentiell gedämpft.

An der zweiten „Stoßstelle“ bei $z=z_1$ besteht nun nicht mehr der Fall der Anpassung, da $Z_L = 50 \Omega \neq 150 \Omega = Z_E$. D.h. ein Teil der Welle wird zurückreflektiert, der andere passiert die „Stoßstelle“.

Die reflektierte Welle erfährt längs der Leitung wiederum die schon erwähnte Dämpfung bis sie die erste „Stoßstelle“ wieder erreicht. Hier wird die Welle vollständig absorbiert und nicht mehr reflektiert ($Z_L = Z_i$).

c) $z=z_1$:
$$\underline{r}(z=z_1) = \frac{Z_E - Z_L}{Z_E + Z_L} = \frac{150 - 50}{150 + 50} = \frac{1}{2} = r(z=z_1)$$

$$\begin{aligned} \underline{u}^-(z=z_1) &= \underline{r}(z=z_1) \cdot \underline{u}^+(z=z_1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot u_0 \cdot e^{-\gamma \cdot z_1} \end{aligned}$$

$$\underline{u}^-(z=z_1) = \frac{u_0}{2} \cdot e^{-\gamma \cdot z_1}$$

WAVE

14.06.06

$$z=z_1: \underline{u}^-(z) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot u_0 \cdot e^{-\gamma \cdot z_1}}_{\leq \underline{u}(z=z_1)} \cdot \underbrace{e^{+\gamma \cdot (z-z_1)}}_{\substack{\text{in neg. } z\text{-} \\ \text{Richtung} \\ \text{laufender} \\ \text{Term}}} = \underline{\underline{\frac{u_0}{2} \cdot e^{\gamma(z-2z_1)}}}$$

$$\underline{v}(z) = \frac{\underline{u}^-(z)}{\underline{u}^+(z)} = \frac{u_0 \cdot e^{\gamma \cdot (z-2z_1)}}{2 \cdot u_0 \cdot e^{-\gamma \cdot z}} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot e^{2\gamma(z-z_1)}}}$$

d) $\underline{u}(z) = \underbrace{\underline{u}^+(z)}_{\substack{\text{hin- und} \\ \text{rück-} \\ \text{laufende Welle!}}} + \underline{u}^-(z) = \underline{\underline{u_0 \cdot e^{-\gamma \cdot z} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot e^{2\gamma(z-z_1)}\right]}}$ $\underline{v}(z)$

Siehe Skript: $\underline{y}(z) = \underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma \cdot z} + \underline{A}_2 \cdot e^{\gamma \cdot z}$

$$\underline{I}(z) = \underline{A}_1 / z_L \cdot e^{-\gamma \cdot z} - \underline{A}_2 / z_L \cdot e^{\gamma \cdot z}$$

hier: $\underline{A}_1 = u_0$; $\underline{A}_2 = \frac{1}{2} \cdot u_0 \cdot e^{-\gamma \cdot 2z_1}$

$$\Rightarrow \underline{I}(z) = \frac{u_0}{z_L} \cdot e^{-\gamma \cdot z} - \frac{u_0}{2z_L} \cdot e^{\gamma \cdot (z-2z_1)}$$

$$\underline{\underline{\underline{I}(z) = \frac{u_0}{z_L} \cdot e^{-\gamma \cdot z} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot e^{2\gamma(z-z_1)}\right]}}$$

// oder einfach: $\underline{I}(z) = \underline{I}^+(z) - \underline{I}^-(z)$

$$= \frac{\underline{u}^+(z)}{z_L} - \frac{\underline{u}^-(z)}{z_L} = \frac{u_0}{z_L} \cdot e^{-\gamma \cdot z} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot e^{2\gamma(z-z_1)}\right]$$

e) reale physikalische Größen sind nach Vereinbarung gleich dem Realteil der komplexen Amplituden, d.h. $u(t) = \text{Re}\{\underline{u}(z,t)\}$

Betrachte nur hinlaufende Spannungswelle:

$$\underline{u}^+(z,t) = \underline{u}^+(z) \cdot e^{j\omega t} = u_0 \cdot e^{(j\omega t - \gamma z)} = u_0 \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{j(\omega t - \beta z)}$$

$$\underline{t=0}: \frac{u(z,t=0)}{u_0} = \text{Re}\left\{e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z}\right\} = \underline{\underline{e^{-\alpha z} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot z\right)}}$$

$$\underline{t=\frac{T}{4}}: \frac{u(z,t=\frac{T}{4})}{u_0} = \text{Re}\left\{e^{-\alpha z} \cdot e^{j\left[\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot z\right]}\right\} = e^{-\alpha z} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot z\right) \\ = \underline{\underline{e^{-\alpha z} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot z\right)}}$$

$$\frac{u(z, t = \frac{T}{2})}{u_0} = \operatorname{Re} \left\{ e^{-\alpha \cdot z} \cdot e^{j \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot z \right)} \right\} = e^{-\alpha \cdot z} \cdot \cos \left(\pi - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot z \right)$$

$$= \underline{\underline{-e^{-\alpha \cdot z} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot z \right)}}$$

Skizzen: Siehe Beiblätter!

f) $z/\lambda = 0$:

$$\frac{u(t, z=0)}{u_0} = e^{-\alpha \cdot z} \cdot \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot z \right) \Big|_{z=0} = \underline{\underline{\cos(\omega t) = \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right)}}$$

$z/\lambda = \frac{2\lambda}{4}$:

$$\frac{u(t, z = \frac{2\lambda}{4})}{u_0} = e^{-\frac{2\lambda}{4} \cdot \alpha} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{2\pi \cdot 2\lambda \cdot \lambda}{\lambda \cdot 4 \cdot 2} \right)$$

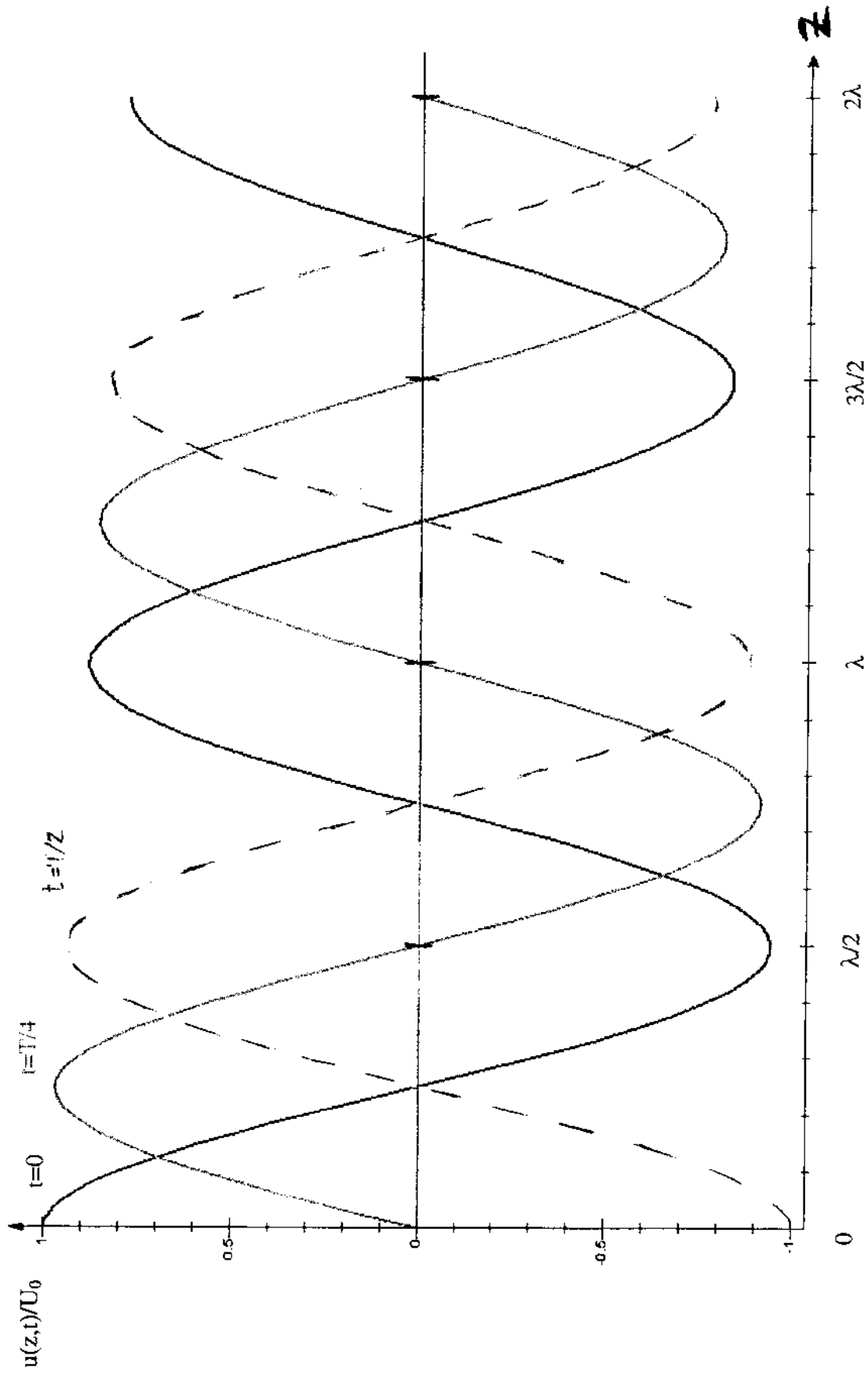
$$= e^{-\frac{2\lambda}{4} \cdot \alpha} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{\pi}{2} \right) = \underline{\underline{e^{-\frac{\lambda}{4} \cdot \alpha} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right)}}$$

$z/\lambda = \frac{3\lambda}{2}$:

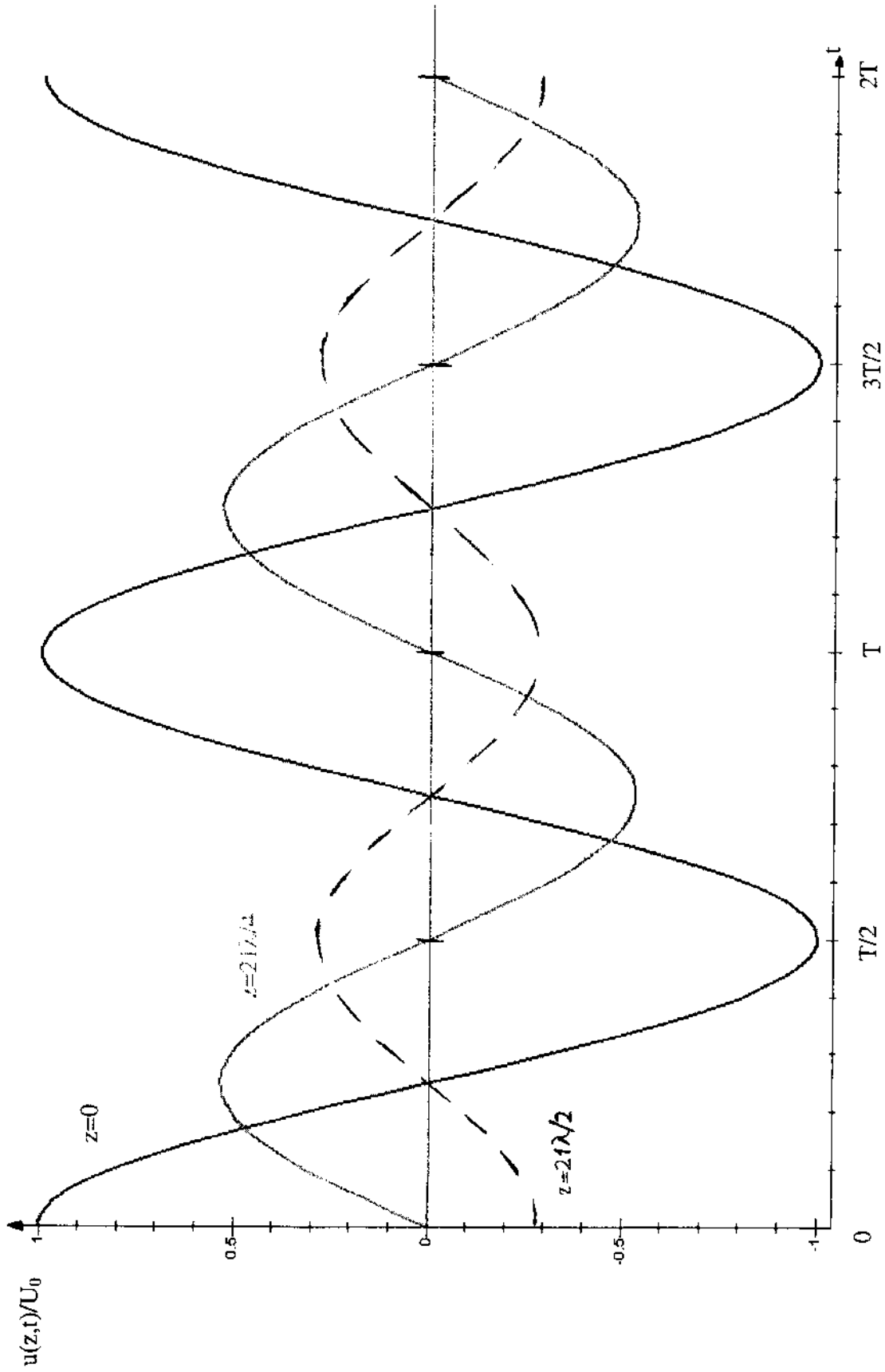
$$\frac{u(t, z = \frac{3\lambda}{2})}{u_0} = e^{-\frac{3\lambda}{2} \cdot \alpha} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t - 2\pi \right) = \underline{\underline{e^{-\frac{3\lambda}{2} \cdot \alpha} \cdot \left[-\cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \right]}}$$

Zu Aufgabe 43:

e)



f)



Aufgabe 44: Asymmetrische Dielektrische Wellenleiter

a) Bedingung zur fast verlustfreien Wellenführung:
TOTALREFLEXION!

Totalreflexion kann nur dann auftreten, wenn das Licht bzw. die elektromagnetische Welle, von einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium übergeht. Hiermit folgt:

$$\mu_1 > (\mu_2, \mu_3)$$

b) $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) = E_y(x) \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_y$

• harmonisch ($e^{j\omega t}$)

• in y-Richtung polarisiert ($\vec{E} = |\vec{E}| \cdot \vec{e}_y$)

• TE (transversal elektrisch): $E_z = 0$

• inhomogen ($|\vec{E}| = f(x) \neq$ Ebene const. Phase)

• Plauwelle (eben) da Platte const. Phase Ebene bilden

c) Wellengleichung: $\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \left(\frac{\mu}{c}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{0}$

hier: $\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = \left(\Delta (E_y(x) \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j\beta z}) \right) \cdot \vec{e}_y$
 $= \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (E_y(x) \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j\beta z}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (E_y(x) \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j\beta z}) \right] \cdot \vec{e}_y$
 $= \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y(x) + (-j\beta)^2 \cdot E_y(x) \right] \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_y$

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y(x) - \beta^2 \cdot E_y(x) \right] \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_y$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\vec{r}, t) = E_y(x) \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_y \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\omega^2 \cdot E_y(x) \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_y$$

in Wellengleichung:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y(x) - \beta^2 E_y(x) \right] \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j\beta z} \vec{e}_y + \left(\frac{\omega \mu}{c} \right)^2 E_y(x) \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j\beta z} \vec{e}_y = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y(x) + \left[\left(\frac{\omega \mu}{c} \right)^2 - \beta^2 \right] \cdot E_y(x) = 0 \quad | \text{skalare WG!}$$

Für das Phasennuß β der geführten Welle gilt bezüglich den Freiraumausbreitungskonstanten der Schichten k_1, k_2, k_3 :

$$k_1 > \beta > k_2, k_3.$$

Mit $\frac{\omega \mu}{c} = k_1$ bzw. $\frac{\omega \cdot \mu_\mu}{c} = k_\mu$; $\mu \in \{1, 2, 3\}$ und den Substitutionen nach Gl. 44.3 a, b, c ergeben sich dann

3 verschiedene skalare Wellengleichungen:

$$\text{I. } \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y(x) + q_1^2 \cdot E_y(x) = 0 \quad ; \quad -a < x < a$$

$$\text{II. } \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y(x) - \alpha_2^2 \cdot E_y(x) = 0 \quad ; \quad a < x$$

$$\text{III. } \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y(x) - \alpha_3^2 \cdot E_y(x) = 0 \quad ; \quad x < -a$$

Anmerkung: $\alpha \neq$ Leitfähigkeit, hier: verlustloses Dielektrikum!

d) 1. ogf. Physikunterricht: 1. DGL: Schwingungsgleichung: cos / sin

Beim Lösen der DGL's erhält man für (I.) imaginäre Eigenfrequenzen und für (II., III.) reelle Eigenfrequenzen.

Daraus folgt folgender Ansatz:

$$E_y(x) = \begin{cases} A_1 \cdot e^{\alpha_2 \cdot x} + A_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot x} & ; \quad a < x \\ A_3 \cdot \cos(q_1 \cdot x) + A_4 \cdot \sin(q_1 \cdot x) & ; \quad -a < x < a \\ A_5 \cdot e^{\alpha_3 \cdot x} + A_6 \cdot e^{-\alpha_3 \cdot x} & ; \quad x < -a \end{cases}$$

physikalisch sinnvoll: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} E_y(x) = 0$

$\Rightarrow A_1 \equiv 0$ und $A_6 \equiv 0$

$$E_y(x) = \begin{cases} A_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot x} & ; \quad a < x \\ A_3 \cos(q_1 \cdot x) + A_4 \sin(q_1 \cdot x) & ; \quad -a < x < a \\ A_5 \cdot e^{\alpha_3 \cdot x} & ; \quad x < -a \end{cases}$$

Bezüglich der Grenzflächen hier nur tangentiale elektrische /

Magn. Feldkomponente: Bedingung: Stetigkeit!

$\Rightarrow E_{t1} = E_{t2} \leftarrow$ $\Rightarrow H_{t1} = H_{t2} \leftarrow$ Differenz von $E_y(x)$

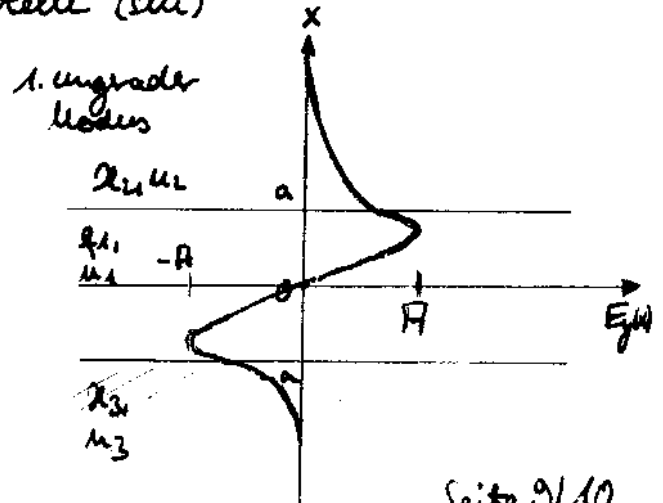
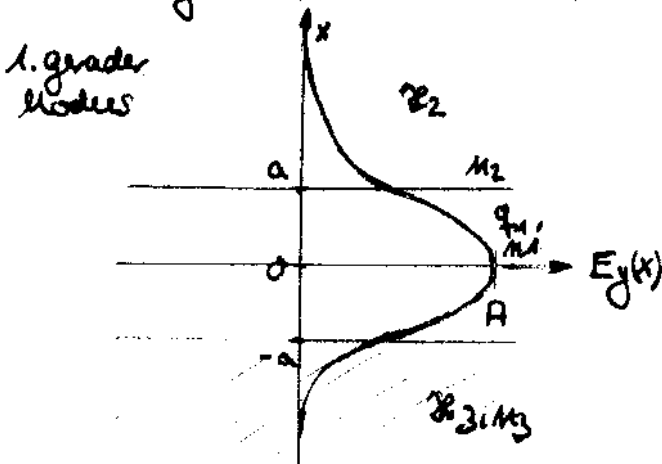
hier: $\lim_{x \rightarrow -a} E_y(x) = \lim_{x \rightarrow -a} E_y(x)$ | Grenzfläche: Substrat-Film
 $x < -a$ $x > -a$

$\lim_{x \rightarrow a} E_y(x) = \lim_{x \rightarrow a} E_y(x)$ | Grenzfläche: Film-Deckschicht
 $x < a$ $x > a$

$$E_y(x) = \begin{cases} A \cdot \begin{bmatrix} \cos(q_1 \cdot a) \\ \sin(q_1 \cdot a) \end{bmatrix} \cdot e^{-\alpha_2 \cdot (x-a)} & ; \quad a < x \\ A \cdot \begin{bmatrix} \cos(q_1 \cdot x) \\ \sin(q_1 \cdot x) \end{bmatrix} & ; \quad -a \leq x \leq a \\ A \cdot \begin{bmatrix} \cos(q_1 \cdot a) \\ -\sin(q_1 \cdot a) \end{bmatrix} \cdot e^{\alpha_3 \cdot (x+a)} & ; \quad x < -a \end{cases}$$

Terme mit cos: gerade Modi; Terme mit sin: ungerade Modi

- c) 1. gerade Modus: keine Nullstelle (cos)
- 1. ungerader Modus: eine Nullstelle (sin)



Der Unterschied zur Feldverteilung eines symmetrischen Wellenleiters besteht darin, daß die Wellenanteile im Selbststrahl und in der Deckschicht unterschiedlich stark abklingen: $\kappa_2 \neq \kappa_3$ im allgemeinen.

Hier angedeutet: $\kappa_3 > \kappa_2$.

f) Benutze 2. Maxwell'sche Gleichung: $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
 hier: $\text{rot } \vec{E} = -j\omega\mu_0 \cdot \vec{H}$ mit $\vec{E}(\vec{r}, t) = E_y(x) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot \vec{e}_y$
 $\Leftrightarrow \vec{H} = \frac{j}{\omega\mu_0} \cdot \text{rot } \vec{E} = E_y(x, z) \cdot \vec{e}_y$
 $\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y(x, z) & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_x \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial z} E_y(x, z)\right) + \vec{e}_z \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} E_y(x, z)\right)$
 $= -(-j\beta) \cdot E_y(x) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial x} E_y(x) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot \vec{e}_z$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \left[\frac{j\beta}{\omega\mu_0} \cdot E_y(x) \cdot \vec{e}_x + \frac{j\vec{e}_z}{\omega\mu_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x} E_y(x) \right] \cdot e^{j(\omega t - \beta z)}$$

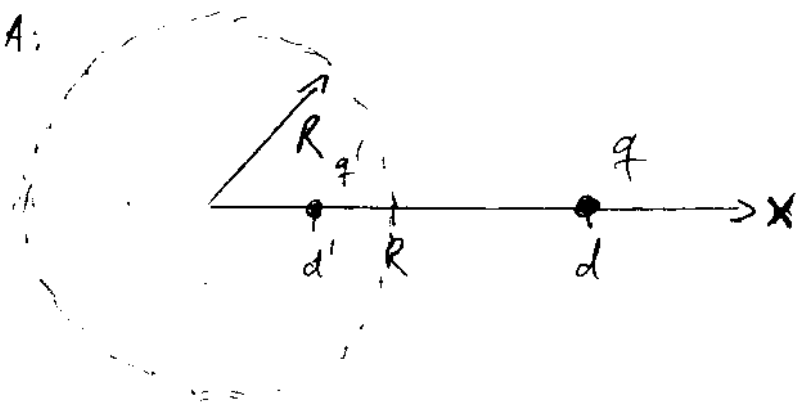
$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \left[-\frac{E_y(x)}{z} \cdot \vec{e}_x + \frac{j}{\omega\mu_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x} E_y(x) \cdot \vec{e}_z \right] \cdot e^{j(\omega t - \beta z)}$$

Ich wünsche Euch allen eine angenehme vorlesungsfreie Zeit und viel Erfolg in den bevorstehenden Prüfungen. Falls Fragen bzgl. TET III offen sein sollten, dann wendet Euch gerne an mich.

Frank Ellrich
 111434
 App.: 2037
 ellrich@rlnk.uni-kl.de

Grüß Frank

Aufgabe A:



Pktladung: $q \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_q)$

wo $\vec{r}_q = d \vec{e}_x$

Spiegelkugelladung q' im Punkt d' :

$r > R$: $\Delta \varphi = -\frac{q}{\epsilon_0} \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_q)$
 $\varphi|_{\text{Kugelfläche}} = 0$

$r < R$: $\Delta \varphi = 0$
 $\varphi|_{\text{Kugelfläche}} = 0$: Randwertproblem
 $\Rightarrow \boxed{\varphi = 0}$

- Symmetrie: Anordnung ist rotationsymmetrisch
 \Rightarrow muß auch für "Spiegelanordnung" gelten $\Rightarrow q'$ liegt auf x-Achse im Inneren d. Kugel

$\vec{r}_{q'} = d' \vec{e}_x$

Allgemein gilt (Kugelkoordinaten) hier: $r > R$:

$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} + \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}_{q'}|} \right]$

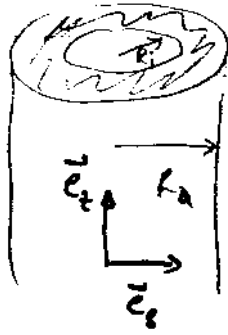
mit $|\vec{r} - \vec{r}_q| = [r^2 + d^2 - 2rd \cos(\alpha)]^{1/2}$

$|\vec{r} - \vec{r}_{q'}| = [r^2 + d'^2 - 2rd' \cos \alpha]^{1/2}$

$\Rightarrow \varphi(r, \alpha) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{[r^2 + d^2 - 2rd \cos \alpha]^{1/2}} + \frac{q'}{[r^2 + d'^2 - 2rd' \cos \alpha]^{1/2}} \right\}$

Aufgabe B:

a.



Stromdichte $\vec{g} = \frac{I}{A} \vec{e}_z = \frac{I}{\pi(R_a^2 - R_i^2)} \vec{e}_z$

$$\vec{g} = \frac{I}{\pi(R_a^2 - R_i^2)} \vec{e}_z = \text{konst.}$$

1. Fall: $s \in [0, R_i]$:

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \iint \vec{g} d\vec{A} = 0 \quad \text{kein Stromfluss}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H} = \vec{0}}$$

2. Fall: $s \in [R_i, R_a]$:

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \iint \vec{g} d\vec{A}$$

$$H \cdot 2\pi s = \frac{I}{\pi(R_a^2 - R_i^2)} \pi(s^2 - R_i^2)$$

Symmetrie: $\vec{H} = H \vec{e}_\phi(\phi)$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{I}{2\pi(R_a^2 - R_i^2)} \left(s - \frac{R_i^2}{s} \right)}$$

3. Fall: $s \geq R_a$:

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = I$$

$$H \cdot 2\pi s = I \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{I}{2\pi s} \vec{e}_\phi(\phi)}$$

b. $W = \frac{1}{2} L I^2 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \mu_0 \int H^2 dV$

$$\Rightarrow \int |\vec{H}|^2 dV = \frac{I^2}{4\pi^2 (R_a^2 - R_i^2)^2} \int_{z=0}^l \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{s=R_i}^{R_a} \left(s^2 - 2R_i^2 + \frac{R_i^4}{s^2} \right) s ds d\phi dz$$

$$= \frac{I^2 \cdot l}{2\pi (R_a^2 - R_i^2)^2} \int_{s=R_i}^{R_a} \left\{ s^3 - 2R_i^2 s + R_i^4 \cdot \frac{1}{s} \right\} ds$$

$$\int |\vec{H}|^2 dV = \frac{I^2 l}{2\pi (R_a^2 - R_i^2)^2} \left[\frac{1}{4} (R_a^4 - R_i^4) - R_i^2 (R_a^2 - R_i^2) + \dots \right. \\ \left. \dots + R_i^4 \ln \frac{R_a}{R_i} \right]$$

37. Aufgabe

$$\phi = \phi(x, t) : \frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t}$$

$$a. \quad u_i = + \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot v(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

wegen Linksschraube!

$$\Phi = \int_{\text{Fläche}} \vec{B} d\vec{A} = \int_{x'=0}^x \int_{y=-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} B_0(t) e^{-x'/a} dx' dy$$

$$= B_0(t) \cdot b \cdot \int_{x'=0}^x e^{-x'/a} dx' = B_0(t) b \cdot (-a) [e^{-x'/a}]_0^x$$

$$\Phi = B_0(t) \cdot ab \cdot [1 - e^{-\frac{x}{a}}] \quad \text{Achtung } \underline{x = x(t)!}$$

$$\Rightarrow u_i = B_0(t) \cdot ab \cdot (1 - e^{-\frac{x}{a}}) \cdot \left(\frac{1}{a}\right) \cdot v + \dot{B}_0(t) ab [1 - e^{-\frac{x}{a}}]$$

- b. Vorzeichen der "Rotationspannung": über Startposition der Rotation ^{+Drehrichtung} wird keine Aussage gemacht \Rightarrow nehme gleiches Vorzeichen wie alle anderen Induktionsterme.

$$u_i = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Teilabt. a.

$$\Phi(t) = B_0(t) \cdot a \cdot [1 - e^{-\frac{x}{a}}] \cdot b \cdot \sin(2\pi f_0 t)$$

Länge von b ist nur zeitabhängig!

$$\Rightarrow u_i = B_0(t) \cdot b \cdot \omega(2\pi f_0 t) [e^{-\frac{x}{a}}] \cdot v + \dot{B}_0(t) \cdot ab \cos(2\pi f_0 t) [1 - e^{-\frac{x}{a}}] + \dots$$

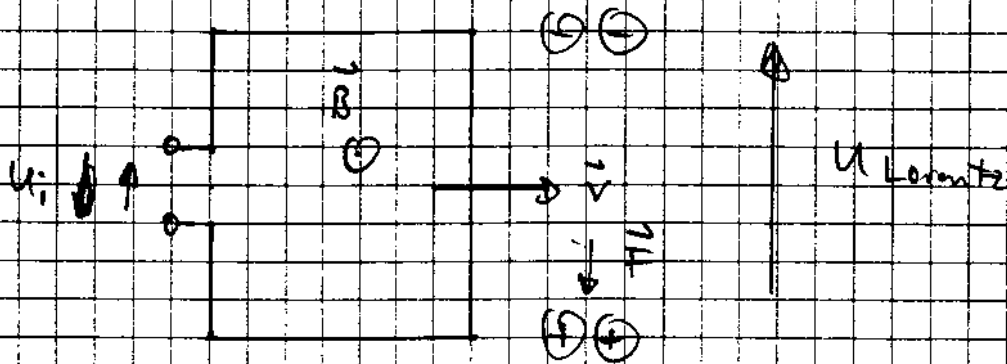
$$\dots + B_0(t) ab [1 - e^{-\frac{x}{a}}] \cdot \frac{\partial}{\partial t} \{ \cos 2\pi f_0 t \}$$

$$u_i = B_0(t) b \omega(2\pi f_0 t) e^{-\frac{x}{a}} \cdot v + \dot{B}_0(t) ab \cos(2\pi f_0 t) [1 - e^{-\frac{x}{a}}] - B_0(t) 2\pi f_0 ab [1 - e^{-\frac{x}{a}}] \sin(2\pi f_0 t)$$

Zu B7a

Vorzeichen d. Induktionsspannung aus Physik

Lorentzkraft: $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$



$\vec{v} \times \vec{B}$ mit rechter Hand.
Kraft \vec{F} nach unten

Kraft \vec{F} auf pos. Ladungsträger nach unten

\Rightarrow "Lorentzspannung" U_{Lorentz} nach oben

aus Bild: $U_i = + U_{\text{Lorentz}} = + \frac{\partial \phi}{\partial t}$

Übungen Theoretische Elektrotechnik III Blatt 11

Aufgabe 38: Induktionsgesetz

Eine dreieckige Leiterschleife liege gemäß Abb. 1 in der x - y -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems. Eine Seite des Dreiecks besteht aus dem Geradenstück $x = 0$, $y \in [-h, h]$. Die beiden anderen Seiten seien exponentiell gekrümmt gemäß den Funktionen $\pm h e^{x/x_0}$, wobei $x \leq 0$ und die Konstante x_0 größer 0 ist, so daß die dritte Ecke des Dreiecks im unendlich fernen Punkt liegt. Noch bevor die exponentiell gekrümmten Seiten den unendlich fernen Punkt erreichen können, kann die induzierte Spannung an 2 Klemmen abgegriffen werden.

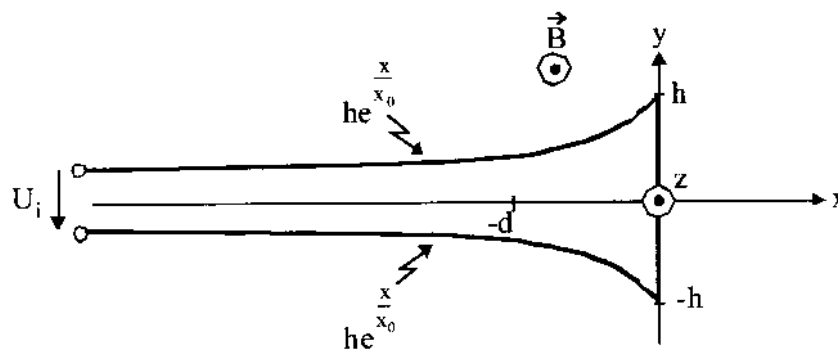


Abb. 1 dreieckige Leiterschleife im Magnetfeld

Zuerst ruhe die Leiterschleife in dem **räumlich und zeitlich veränderlichen Magnetfeld** mit der magnetischen Induktion $\vec{B}(x, t) = B_0 \frac{x}{d} \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 \cdot \vec{e}_z$ mit den Konstanten $B_0, d, t_0 > 0$. Das Magnetfeld \vec{B} existiere nur im Bereich $-d \leq x \leq 0$. Sonst sei es identisch Null.

- a. Berechnen Sie die induzierte Spannung U_i für das räumlich und zeitlich veränderliche Magnetfeld!

Die Leiterschleife führt in den folgenden Aufgabenteilen eine **gleichmäßig beschleunigte** Translation mit der Beschleunigung $a > 0$ aus (beginnend zum Zeitpunkt $t = 0$). Die Geschwindigkeit mit der sich die Schleife dann bewegt ergibt sich zu $\vec{v} = at \cdot \vec{e}_x$. Nehmen Sie weiterhin an, daß die Leiterschleife nur solange beschleunigt wird, daß die weit entfernten Klemmen der Schleife **immer** außerhalb des Magnetfeldes liegen.

- b. Berechnen Sie auch für diesen Fall die induzierte Spannung.

Zusätzlich zur Bewegung rotiere nun noch die Leiterschleife um die x -Achse proportional $\cos(2\pi f_0 t)$ mit der konstanten Frequenz f_0 .

- c. Wie groß ist die induzierte Spannung jetzt?

Aufgabe 39: Funktionsprinzip einer Stabantenne

Gegeben sei die Stabantenne nach Abb. 2, welche mittels eines hochfrequenten Stromes erregt wird. Aufgrund des **zeitlich veränderlichen Stromes** wird von der Stabantenne Energie in Form von elektromagnetischen Wellen abgestrahlt.

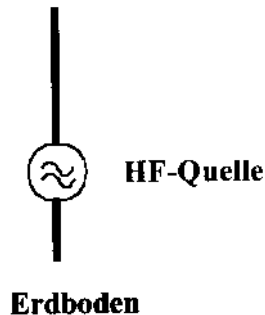


Abb. 2 Stabantenne

Erklären Sie mittels den Maxwell'schen Gleichungen das Funktionsprinzip der Antenne! Die Anordnung befindet sich zwar in der Luft, doch man kann näherungsweise annehmen, daß Luft die gleichen Eigenschaften bezüglich der elektromagnetischen Wellen hat, wie das Vakuum.

Aufgabe 40: Herleitung der Wellengleichung

Gegeben sei ein unendlich ausgedehntes homogenes Dielektrikum (Quarzglas) der Dielektrizitätszahl ϵ . Das Material sei unmagnetisch ($\mu = \mu_0$), nicht leitfähig ($\kappa = 0$) und besitze keine freien Ladungsträger ($\rho = 0$). In der Optik benutzt man anstelle der Dielektrizitätszahl häufig den Begriff der Brechzahl, welche definiert ist als $n = \sqrt{\epsilon_r}$.

- a. Leiten Sie aus den Maxwell'schen Gleichungen die Wellengleichung für die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r}, t)$ in Abhängigkeit der Brechzahl n her.

Hinweis: Mittels des Graßmann'schen Entwicklungssatzes folgt:

$$\text{rot rot } \vec{a} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \text{grad}(\text{div } \vec{a}) - \Delta \vec{a}$$

Für harmonische Felder kann man die Wellengleichung auch zeitfrei darstellen.

- b. Leiten Sie nun aus a. mittels Fouriertransformation die zeitfreie Wellengleichung (**Helmholtz-Gleichung**) für $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$ her!

Übungen Theoretische Elektrotechnik III: Blatt 12

Aufgabe 41: Elektromagnetische Welle: Wellenform, Ausbreitungsrichtung, Koppelung: elektr. - magn. Feld, Energieflußdichte, Polarisation

Eine mögliche Lösung der Wellengleichung aus Aufgabe 39 ist ein in x -Richtung polarisiertes, **harmonisches** elektrisches Feld der Form $\vec{E}_0(\vec{r}, t) = E_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j(\vec{k} \cdot \vec{r})} \cdot \vec{e}_x$, wobei \vec{k} der Wellenvektor, $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ ein beliebiger Punkt und E_0 die konstante reelle Amplitude der Welle ist. Die Welle breitet sich im Vakuum aus.

a. Um welche Wellenform handelt es sich?

Nun sei die **harmonische** elektrische Feldstärke einfacher gegeben durch $\vec{E}_0(\vec{r}, t) = E_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-jkz} \cdot \vec{e}_x$.

b. In welche Richtung und mit welcher Geschwindigkeit breitet sich die elektrische Welle aus?

c. Berechnen Sie das magnetische Feld $\vec{H}_0(\vec{r}, t)$ der Welle!

Hinweis: Benutzen Sie die 2. Maxwellsche Gleichung für harmonische Felder.

d. Berechnen Sie die Richtung und den Betrag des Augenblickswertes und des Mittelwertes der Energieflußdichte der Welle!

Das elektrische Feld $\vec{E}_0(\vec{r}, t)$ einer kohärenten Lichtquelle (z. B. ideale Laserdiode) werde nun das elektrische Feld einer zweiten Lichtquelle überlagert. Dieses zweite elektrische Feld ist in y -Richtung polarisiert und hat die gleichen Frequenz ω und Wellenzahl k aber unterschiedlicher Amplitude im Vergleich zum ersten elektrischen Feld. Das zweite elektrische Feld ist gegeben mit $\vec{E}_1(\vec{r}, t) = E_1 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-jkz} \cdot \vec{e}_y$.

e. Wie ist die durch Überlagerung entstehende Welle polarisiert?

Als nächstes überlagere sich der Welle mit dem elektrischen Feld $\vec{E}_0(\vec{r}, t)$ ein anderes elektrisches Feld $\vec{E}_2(\vec{r}, t) = E_0 \cdot e^{j(\omega t + \pi/2)} \cdot e^{-jkz} \cdot \vec{e}_y$ mit gleicher Amplitude, der gleichen Fre-

41. Aufgabe

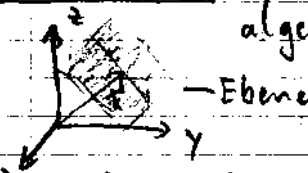
$$t = t_0 = \text{konst}$$

a. Betrachte für festen Zeitpkt. Punkte konstanter Phase, d.h. setze $e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = \text{konst}$

$$e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = C_1 \Rightarrow -j\vec{k} \cdot \vec{r} = C_2$$

oder $\vec{k} \cdot \vec{r} = c$ Normalenform der Vektoralgebra einer Ebene

\Rightarrow Ebene Welle



NB: Eigenschaften von \vec{k} : $\vec{k} \perp \vec{E}$, $\vec{k} \perp \vec{H}$, $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$

\vec{k} zeigt in Ausbreitungsrichtung $c = \lambda f$

b. $\vec{E}_0(\vec{r}, t) = E_0 e^{j\omega t} e^{-jkz} \cdot \vec{e}_x$

Ausbreitungsrichtung: Betrachte Fläche konstanter Phase

$$\Rightarrow j(\omega t - kz) = C$$

$$\Rightarrow z = \frac{\omega t}{k} - C' \quad \text{mit } k = \text{konst}$$

Geschwindigkeit $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\omega}{k} > 0 \Rightarrow$ in pos. z-Richtung

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \lambda f = c \quad \text{Lichtgeschw.}$$

c. 2. Maxwell'sche Gleichung: $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

harmonische Felder $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow j\omega$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{E} = -j\omega \mu_0 \vec{H}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_0 e^{j\omega t - jkz} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -j\omega \mu_0 \vec{H}$$

$$\Leftrightarrow \vec{H} = -\frac{1}{j\omega \mu_0} (\vec{e}_y [E_0 e^{j\omega t} e^{-jkz} \cdot (-jk)])$$

4) c.

$$\vec{H} = \frac{E_0 k}{\omega \mu_0} e^{j\omega t} e^{-jkz} \vec{e}_y; \quad \omega = 2\pi f; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c}$$

$$= \frac{2\pi f/c}{2\pi f \mu_0} \cdot E_0 e^{j\omega t} e^{-jkz} \vec{e}_y \quad \vec{r} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0/\mu_0}}$$

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 e^{j\omega t} e^{-jkz} \vec{e}_y$$

NB: $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} =$ Wellenwiderstand des Vakuums $\approx 377 \Omega$!

d. Energiedichte: Einheit $\frac{J}{m^3} = \frac{W \cdot s}{m^3} = \frac{W}{m^3}$

$\hat{=}$ Leistungsdichte

\rightarrow Poynting'scher Vektor \vec{S}

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)$$

$$= \text{Re} \{ \vec{E} \} \times \text{Re} \{ \vec{H} \}$$

$$= E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x \times E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ E_0 \cos() & 0 & 0 \\ 0 & E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos() & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_z \cdot E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos^2(\omega t - kz)$$

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos^2(\omega t - kz) \vec{e}_z$$

Augenblickswert

\Rightarrow Betrag zeit- u. ortsabhängig $= E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos^2(\omega t - kz)$

Richtung: pos. z-Achse

Mittelwert: betrachte festen Punkt, wähle o. B. A. A. $z=0$

$$\langle \vec{S}(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(\vec{r}, t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos^2(\omega t) dt \vec{e}_z$$

$$= E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{1}{T} \left[\frac{1}{2} t + \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega t) \right] \Big|_0^T = E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{1}{T} \left[\frac{1}{2} T \right] \vec{e}_z$$

$$\langle \vec{S}(t) \rangle = \frac{1}{2} E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \vec{e}_z$$

zu 41a.

Mittels d. komplexen Wechselstromrechnung
könnte man auch rechnen können

$$\vec{S}(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \vec{E} \times \vec{H} \right\} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ E_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x \times E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_y \right\} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ E_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x \times E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} e^{-j(\omega t - kz)} \vec{e}_y \right\}$$

Reij komplex!

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} e^{j2(\omega t - kz)} \vec{e}_z \right\} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \vec{e}_z \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos[2(\omega t - kz)] + \frac{1}{2} E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \right\} \vec{e}_z$$

$$= \frac{1}{2} E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \vec{e}_z \left[\cos(2\omega t - 2kz) + 1 \right]$$

$$\text{NB: } \cos^2 x = \frac{1}{2} [\cos 2x + 1]$$

$$\boxed{\vec{S}(t) = E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \vec{e}_z \cos^2(\omega t - kz)} \quad \text{Augenblicksvektor}$$

Mittelwert: $\langle \vec{S}(t) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\}$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ E_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x \times E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} e^{-j(\omega t - kz)} \vec{e}_y \right\}$$

$$\boxed{\langle \vec{S}(t) \rangle = \frac{1}{2} E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \vec{e}_z} \quad \text{Mittelwert}$$

4d e. Polarisation := zeitliche Abhängigkeit (Kurve) des elektr. Feldvektors in einer Ebene $z = \text{konst}$

\Rightarrow setze o. B. d. A. $z = 0$

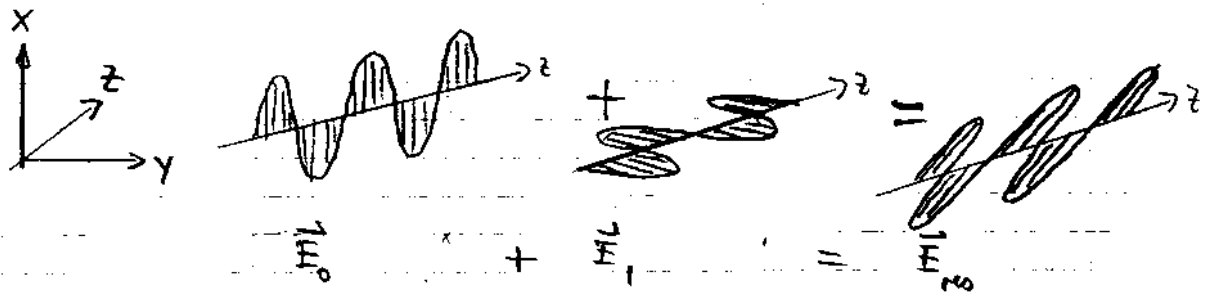
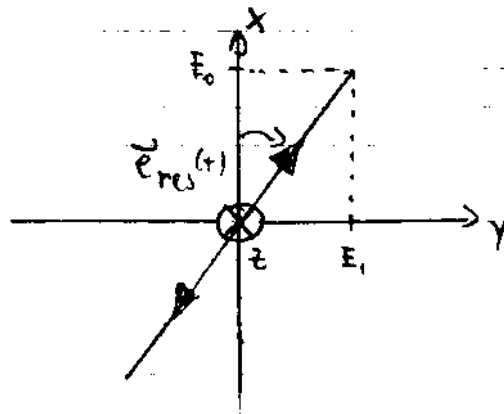
$$\vec{E}_0 = E_0 e^{j\omega t} \vec{e}_x, \quad \vec{E}_1 = E_1 e^{j\omega t} \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_{\text{res}} = e^{j\omega t} [E_0 \vec{e}_x + E_1 \vec{e}_y] \Rightarrow \underline{\underline{\text{lineare Polarisation}}}$$

Physikalisch sinnvoll ist nur der Realteil:

$$\vec{e}_{\text{res}} = \text{Re} \{ \vec{E}_{\text{res}} \} = \underbrace{\omega_0(\omega t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{oszillierender} \\ \text{Anteil}}} [E_0 \vec{e}_x + E_1 \vec{e}_y]_{\substack{\text{Lage in} \\ \text{Ebene } z = \text{konst}}}$$

Bild:



f. Analog: $\vec{E}_{\text{res}} = E_0 [e^{j\omega t} \vec{e}_x + e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} \vec{e}_y]$

Realteil: $\vec{e}_{\text{res}} = \text{Re} \{ \vec{E}_{\text{res}} \} = E_0 \omega \cos \omega t \vec{e}_x + E_0 \omega \underbrace{\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})}_{= -\sin \omega t} \vec{e}_y$

$$\vec{e}_{\text{res}} = E_0 \omega \cos \omega t \vec{e}_x - E_0 \omega \sin \omega t \vec{e}_y$$

Bahnkurve: $e_{\text{res}x} = E_0 \omega \cos \omega t \quad ; \quad e_{\text{res}y} = -E_0 \omega \sin \omega t$

40 f.

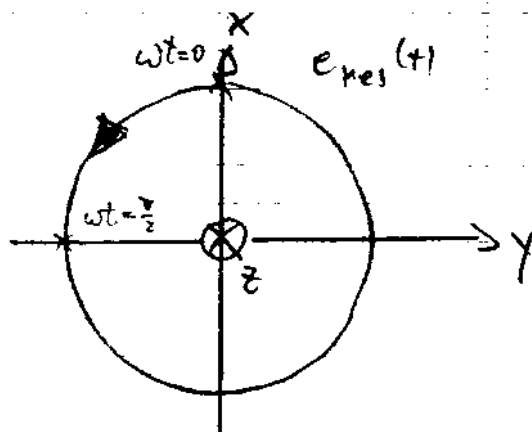
Behaukturve: $e_{resx} = E_0 \cos \omega t$; $e_{resy} = -E_0 \sin \omega t$

$$\begin{aligned} (e_{resx})^2 + (e_{resy})^2 &= E_0^2 \cos^2 \omega t + E_0^2 \sin^2 \omega t \\ &= E_0^2 [\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t] = E_0^2 \end{aligned}$$

$$e_{resx}^2 + e_{resy}^2 = E_0^2 \quad \text{Kreisgleichung}$$

d.h. die x bzw. y-komponenten der resultierenden Feldstärke bilden einen Kreis

\Rightarrow zirkular polarisiert



links drehend

$$\omega t = 0: \vec{e}_{res} = E_0 \vec{e}_x$$

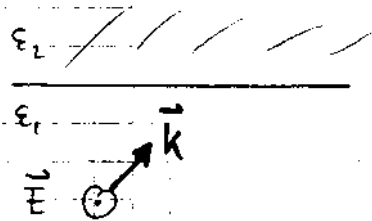
$$\omega t = \frac{\pi}{2}: \vec{e}_{res} = -E_0 \vec{e}_y$$

Zusatz: der allgemeine Fall: $E_1 \neq E_0$ und $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$
bzw. $\varphi \neq 0$

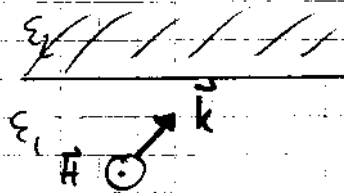
führt zur elliptischen Polarisation

Aufgabe 42:

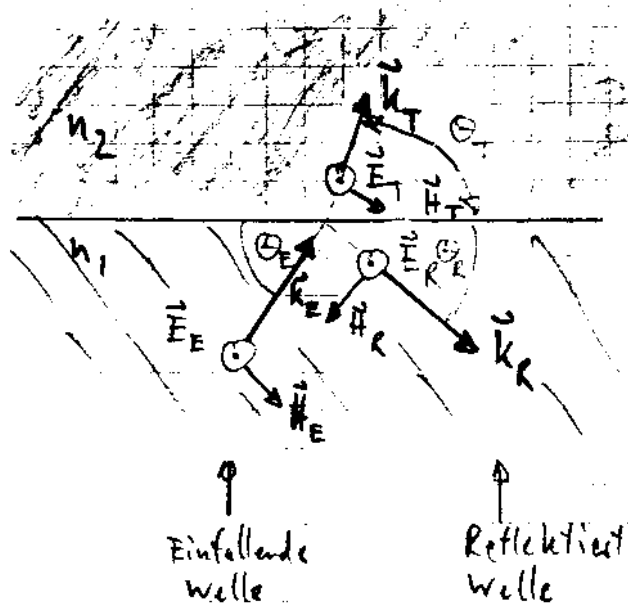
a. TE-Polarisation: \vec{E} steht senkrecht auf Einfallsebene



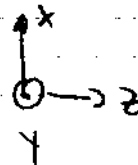
TM-Polarisation: \vec{H} steht senkrecht auf Einfallsebene



b.

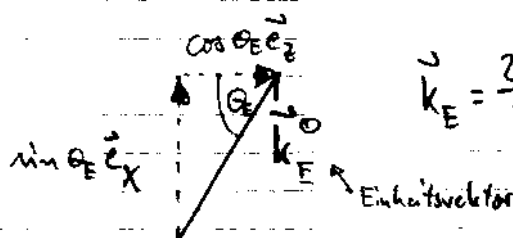


← transmittierte Welle

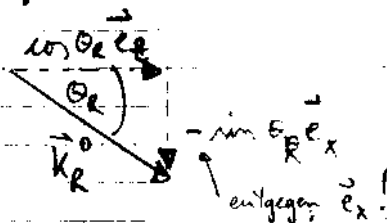


$$\vec{E}_E = E_E \cdot e^{-jk_E z} \cdot e^{j(k_E x + t)}$$

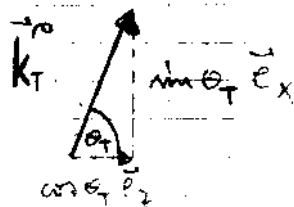
$$\vec{E}_R = E_R \cdot e^{-jk_R z} \cdot e^{j(k_R x + t)}$$



$$\vec{k}_E = \frac{2\pi}{\lambda_E} \begin{pmatrix} \sin \theta_E \\ 0 \\ \cos \theta_E \end{pmatrix} ; \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



$$\vec{k}_R = \frac{2\pi}{\lambda_R} \begin{pmatrix} -\sin \theta_R \\ 0 \\ \cos \theta_R \end{pmatrix}$$



$$\vec{k}_T = \frac{2\pi}{\lambda_T} \begin{pmatrix} \sin \theta_T \\ 0 \\ \cos \theta_T \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}_E = \vec{c}_E \vec{E}_E e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_E} \begin{pmatrix} \sin \theta_E \\ 0 \\ \cos \theta_E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = E_E e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_E} [x \sin \theta_E + z \cos \theta_E]}$$

$$\vec{E}_R = \vec{c}_R \vec{E}_R e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_R} [-x \sin \theta_R + z \cos \theta_R]}$$

$$\vec{E}_T = \vec{c}_T \vec{E}_T e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_T} [x \sin \theta_T + z \cos \theta_T]}$$

NB: $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{\omega}{c}$ somit: $\frac{2\pi}{\lambda_E} = \frac{\omega}{c/n_1} = \frac{\omega n_1}{c}$ Freiraumlichtgeschwindigkeit

$$\frac{2\pi}{\lambda_R} = \frac{\omega n_1}{c}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda_T} = \frac{\omega n_2}{c}$$

c. $\vec{E}_{\text{tang1}} \stackrel{!}{=} \vec{E}_{\text{tang2}}$ an Grenzfläche, d.h. $x=0$

$$\left. \vec{E}_E + \vec{E}_R \right|_{\substack{\text{y-komp.} \\ x=0}} \stackrel{!}{=} \left. \vec{E}_T \right|_{\substack{\text{y-komp.} \\ x=0}}$$

Tangentialkomponente = y-komp.

$$\Rightarrow E_E e^{-j \frac{\omega n_1}{c} z \cos \theta_E} + E_R e^{-j \frac{\omega n_1}{c} z \cos \theta_R} \stackrel{!}{=} E_T e^{-j \frac{\omega n_2}{c} z \cos \theta_T} \quad (1)$$

Gleichung (1) kann nur dann allgemein erfüllt werden,

- falls a. $\theta_E = \theta_R$ Reflexionsgesetz

$$\Rightarrow (E_E + E_R) e^{-j \frac{\omega n_1}{c} z \cos \theta_E} \stackrel{!}{=} E_T e^{-j \frac{\omega n_2}{c} z \cos \theta_T}$$

b. $n_1 \cos \theta_E \stackrel{!}{=} n_2 \cos \theta_T$ Brechungsgesetz

c. $E_E + E_R = E_T$

nur falls a. b. & c. erfüllt sind (gleichzeitig) gilt $\vec{E}_{\text{tang1}} = \vec{E}_{\text{tang2}}$!

42 d.

$$\vec{H}_E = ?$$

$$\text{rot } \vec{E}_E = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}_E}{\partial t} = -\mu_0 j\omega \vec{H}_E$$

$$\vec{H}_E = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \text{rot } \vec{E}_E$$

$$= -\frac{1}{j\omega\mu_0} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_E e^{-j\frac{\omega y}{c_0} [x \sin \theta_E + z \cos \theta_E]} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= +\frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ E_E e^{-j\frac{\omega y}{c_0} [x \sin \theta_E + z \cos \theta_E]} \right\} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \right\}$$

$$= \frac{E_E}{j\omega\mu_0} \left[-j\frac{\omega y}{c_0} \cos \theta_E \vec{e}_x + j\frac{\omega y}{c_0} \sin \theta_E \vec{e}_z \right] e^{-j\frac{\omega y}{c_0} [\dots]}$$

$$\vec{H}_E = \frac{E_E \cdot y}{\mu_0 c_0} \left[-\cos \theta_E \vec{e}_x + \sin \theta_E \vec{e}_z \right] e^{-j\frac{\omega y}{c_0} [x \sin \theta_E + z \cos \theta_E]}$$

42 d.

$$\vec{H}_E = ?$$

$$\text{rot } \vec{E}_E = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}_E}{\partial t} = -\mu_0 j\omega \vec{H}_E$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_E &= -\frac{1}{j\omega\mu_0} \text{rot } \vec{E}_E \\ &= -\frac{1}{j\omega\mu_0} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_E e^{-j\frac{\omega y}{c_0} [z]} & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= +\frac{1}{j\omega\mu_0} \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial z} \left\{ E_E e^{-j\frac{\omega y}{c_0} [x \sin \theta_E + z \cos \theta_E]} \right\} + \vec{e}_z \frac{-1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \right\}$$

$$= \frac{E_E}{j\omega\mu_0} \left[-j\frac{\omega \cos \theta_E}{c_0} \vec{e}_x + j\frac{\omega \sin \theta_E}{c_0} \vec{e}_z \right] e^{-j\frac{\omega y}{c_0} [\dots]}$$

$$\boxed{\vec{H}_E = \frac{E_E \cdot \omega}{\mu_0 c_0} \left[-\cos \theta_E \vec{e}_x + \sin \theta_E \vec{e}_z \right] e^{-j\frac{\omega y}{c_0} [x \sin \theta_E + z \cos \theta_E]}}$$

A: Nebenbedingung: $\varphi(r=R) \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \frac{\varphi}{[R^2 + d^2 - 2Rd \cos \alpha]^{1/2}} + \frac{\varphi'}{[R^2 + d'^2 - 2Rd' \cos \alpha]^{1/2}} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{\sqrt{R^2 + d^2 - 2Rd \cos \alpha}}{\sqrt{R^2 + d'^2 - 2Rd' \cos \alpha}} \quad (1)$$

(1) gilt $\forall \alpha$, also auch für $\alpha=0$ und $\alpha=\pi$

$$\alpha=0: -\frac{\varphi}{\varphi'} = \sqrt{\frac{R^2 - 2Rd + d^2}{R^2 - 2Rd' + d'^2}} = \sqrt{\frac{(R-d)^2}{(R-d')^2}}$$

$$(I) \quad -\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{|R-d|}{|R-d'|} = \frac{d-R}{R-d'} \quad , \text{ da } d > R \text{ und } d' < R$$

$$\alpha=\pi: -\frac{\varphi}{\varphi'} = \sqrt{\frac{R^2 + 2Rd + d^2}{R^2 + 2Rd' + d'^2}}$$

$$(II) \quad -\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{|R+d|}{|R+d'|} = \frac{R+d}{R+d'}$$

$$I = II: \quad \frac{d-R}{R-d'} = \frac{R+d}{R+d'}$$

$$\cancel{d}R + d\cancel{d'} - R^2 - \cancel{d'}R = R^2 + \cancel{d}d' - \cancel{d}R - d\cancel{d'}$$

$$2R^2 = 2dd'$$

$$(III) \quad \boxed{d' = \frac{R^2}{d}}$$

$$(III) \text{ in } (II): \quad \varphi' = -\varphi \cdot \frac{R+d'}{R+d} = -\varphi \cdot \frac{R + \frac{R^2}{d}}{R+d} = -\varphi \cdot \frac{-\frac{Rd+R^2}{d}}{R+d}$$

$$= -\varphi \cdot \frac{R(d+R)}{d(R+d)}$$

$$\boxed{\varphi' = -\varphi \frac{R}{d}}$$

$$\Rightarrow r \geq R: \varphi(r, \alpha) = \frac{1}{4\pi r} \left\{ \frac{\varphi}{[r^2 + d^2 - 2rd \cos \alpha]^{1/2}} - \frac{\varphi \frac{R}{d}}{[r^2 + (\frac{R^2}{d})^2 - 2r \frac{R^2}{d} \cos \alpha]^{1/2}} \right\}$$

Aufgabe B:

b.

$$L' = \frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{I^2 \cdot \ell} \int_V H^2 dV$$

$$L' = \mu_0 \cdot \frac{1}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)^2} \left[\frac{R_2^4 - R_1^4}{4} - R_2^2 R_1^2 + R_1^4 + R_1^4 \ln \frac{R_2}{R_1} \right]$$

c. $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{g}(t) \cdot \vec{e}_g(\phi) + g(t) \cdot \dot{\vec{e}}_g(\phi) + \dot{z}(t) \vec{e}_z$

NB: $\vec{e}_g(t) = \vec{e}_x \cos(\phi(t)) + \vec{e}_y \sin(\phi(t))$

$$\dot{\vec{e}}_g(t) = -\vec{e}_x \sin(\phi) \cdot \dot{\phi} + \vec{e}_y \cos(\phi) \cdot \dot{\phi} = \dot{\phi} \cdot \vec{e}_\phi(t)!$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{g}(t) \vec{e}_g(\phi) + g(t) \cdot \dot{\phi}(t) \cdot \vec{e}_\phi(\phi) + \dot{z}(t) \vec{e}_z$$

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{g}(t) \vec{e}_g(\phi) + \dot{g} \cdot \dot{\vec{e}}_g(\phi) + \dot{g} \dot{\phi} \cdot \vec{e}_\phi + g \ddot{\phi} \vec{e}_\phi + g \dot{\phi} \dot{\vec{e}}_\phi(\phi) + \ddot{z} \vec{e}_z$$

NB: $\vec{e}_\phi(\phi) = -\sin(\phi(t)) \vec{e}_x + \cos(\phi(t)) \vec{e}_y$

$$\dot{\vec{e}}_\phi(\phi) = -\cos \phi \cdot \dot{\phi} \vec{e}_x - \sin(\phi) \dot{\phi} \vec{e}_y = -\vec{e}_g(\phi) \cdot \dot{\phi}$$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = \ddot{g} \vec{e}_g + \dot{g} \dot{\phi} \vec{e}_\phi + \dot{g} \dot{\phi} \vec{e}_\phi + g \ddot{\phi} \vec{e}_\phi - g \dot{\phi} \dot{\phi} \vec{e}_g + \ddot{z} \vec{e}_z$$

d. Lorentzkraft: $\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = q \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{B})$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \vec{e}_\phi(\phi)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_L = q \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \left[\dot{g} \vec{e}_g \times \vec{e}_\phi + g \dot{\phi} \vec{e}_\phi \times \vec{e}_\phi + \dot{z} \vec{e}_z \times \vec{e}_\phi \right]$$

= 0 NB: $\vec{e}_g \times \vec{e}_\phi = \vec{e}_z \mid \vec{e}_z \times \vec{e}_\phi = -\vec{e}_g$

$$\vec{F}_L = \frac{q \mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{\dot{g}}{s} \vec{e}_z - \frac{\dot{z}}{s} \vec{e}_g \right]$$

Aufg. B:

e. $\Delta W = W_{1-2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{s}$ mit $d\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \dot{\vec{r}} dt$

$$= \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) dt$$

↑
Skalarprodukt!

$$\Rightarrow \Delta W = \int_{t_1}^{t_2} \frac{q\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{\dot{s}}{s} \vec{e}_z - \frac{\dot{z}}{s} \vec{e}_s \right] \cdot \left[\dot{s} \vec{e}_s + s\dot{\phi} \vec{e}_\phi + \dot{z} \vec{e}_z \right] dt$$

$$= \frac{q\mu_0 I}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} \left[-\frac{\dot{z}}{s} \cdot \dot{s} \underbrace{\vec{e}_s \cdot \vec{e}_s}_{=1} + 0 \cdot \dot{z} \vec{e}_\phi + \frac{\dot{s}}{s} \cdot \dot{z} \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z}_{=1} \right] dt$$

$\Delta W = 0$

Dieses Ergebnis gilt allgemein, denn $\vec{F}_L \sim \dot{\vec{r}} \perp \vec{B}$, d.h. \vec{F}_L ist immer \perp zu $\dot{\vec{r}}$

\Rightarrow Wovon $\vec{F}_L \cdot \dot{\vec{r}} \equiv 0$ für beliebiges Magnetfeld \vec{B} !
 ($\vec{F}_L \perp \dot{\vec{r}} \Rightarrow \vec{F}_L \cdot \dot{\vec{r}} = 0$)

f. $m \cdot \vec{a} \stackrel{!}{=} \vec{F}_L$

$$\Rightarrow m \cdot [(\ddot{s} - s\dot{\phi}^2) \vec{e}_s + (2\dot{s}\dot{\phi}) \vec{e}_\phi + \ddot{z} \vec{e}_z] \stackrel{!}{=} \frac{q\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{\dot{s}}{s} \vec{e}_z - \frac{\dot{z}}{s} \vec{e}_s \right]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{e}_s: \quad m \cdot \ddot{s} - m s \dot{\phi}^2 &= -\frac{q\mu_0 I}{2\pi} \frac{\dot{z}}{s} \\ \vec{e}_\phi: \quad 2m \dot{s} \dot{\phi} &= 0 \\ \vec{e}_z: \quad m \cdot \ddot{z} &= +\frac{q\mu_0 I}{2\pi} \frac{\dot{s}}{s} \end{aligned}$$

Aufgabe C:

a. $\oint \vec{H} d\vec{s} = \iint_{\text{Strom}} \vec{g} d\vec{A}$ (zeitl. konst $\Rightarrow \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{0}$)

b. $\oint \vec{H} d\vec{s} = \iint \text{rot } \vec{H} d\vec{A} \stackrel{!}{=} \iint \vec{g} d\vec{A}$
↑
Stokes

$$\Rightarrow \iint (\text{rot } \vec{H} - \vec{g}) d\vec{A} \equiv 0 \quad (1)$$

Gleichung (1) soll für beliebige Flächen identisch erfüllt werden. Dies ist nur dann möglich, wenn der Integrand $= 0$ ist:

$$\text{rot } \vec{H} - \vec{g} = 0$$

Def.: $\vec{B} = \text{rot } \vec{V}$

mit $\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$

$$\text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{g}$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{g}$$

$$\text{rot} (\text{rot } \vec{V}) = \mu_0 \cdot \vec{g}$$

$$\text{grad} (\text{div } \vec{V}) - \Delta \vec{V} = \mu_0 \cdot \vec{g}$$

$= 0$, weil dies Voraussetzung (neg. Coulomb-Feldung)

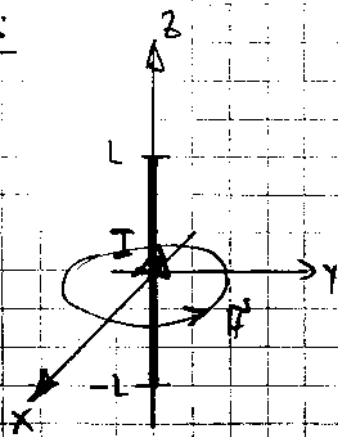
MS: $\text{rot} (\text{rot } \vec{V}) = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$
 $= (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \cdot \vec{\nabla} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{V}$ ↓ Anfg. 8
 $= (\text{div } \vec{V}) \cdot \vec{\nabla} - \vec{\nabla}^2 \cdot \vec{V}$
 $= \text{grad} (\text{div } \vec{V}) - \Delta \vec{V}$

→ "quellfrei"

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{V} = -\mu_0 \vec{g}}$$

Aufg. C:

C.



Vektorpotential:

$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV(\vec{r}')$$

Achtung: Formel gilt in obiger Form nur für kart. Koordinaten und die z-Koord. in Zylinderkoordinaten

zuerst kart. Koordinaten: $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

$$\vec{r}' = z'\vec{e}_z$$

$$\vec{j} = I \cdot \delta(x) \cdot \delta(y) \vec{e}_y \quad ; \quad \text{E.-heit } \delta(x) = \frac{1}{m}$$

$$\text{vgl. } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$\Rightarrow \vec{V}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{x'} \int_{y'} \int_{z'=-L}^{+L} \frac{I \cdot \delta(x') \cdot \delta(y')}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz' \vec{e}_z$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{z'=-L}^{+L} \frac{I}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-z')^2}} dz' \vec{e}_z$$

koord. - Transfo: $x^2 + y^2 := s^2 \rightarrow$ Zylinderkoord.

$$\vec{V}(s, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{z'=-L}^{+L} \frac{1}{[s^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dz' \vec{e}_z$$

Sub: $u = z - z' \rightarrow dz' = -du$

Grenzen: $-L \rightarrow z+L$

$+L \rightarrow z-L$

$$= \frac{I \mu_0}{4\pi} \int_{z+L}^{z-L} \frac{du}{[s^2 + u^2]^{3/2}} \vec{e}_z = \frac{I \mu_0}{4\pi} \cdot \left\{ \ln \left(z+L + \sqrt{(z+L)^2 + s^2} \right) - \ln \left(z-L + \sqrt{(z-L)^2 + s^2} \right) \right\} \vec{e}_z$$

Broschi Nr. 192

$$\vec{V}(s, z) = \frac{I \mu_0}{4\pi} \cdot \left[\ln \left(z+L + \sqrt{(z+L)^2 + s^2} \right) - \ln \left(z-L + \sqrt{(z-L)^2 + s^2} \right) \right] \vec{e}_z$$

siehe vorher!

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{V}$$

$$\text{rot } \vec{V} = \frac{1}{s} \begin{vmatrix} \vec{e}_s & \vec{e}_\phi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_s & V_\phi & V_z \end{vmatrix} \quad \text{mit } \vec{V}(\vec{r}) = V_z \vec{e}_z!$$

$$= \frac{1}{s} \left\{ \vec{e}_s \left(\frac{\partial V_z}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial z} V_\phi \right) - s \vec{e}_\phi \left(\frac{\partial V_z}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial z} V_s \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial V_\phi}{\partial s} - \frac{\partial V_s}{\partial \phi} \right) \right\}$$

$$\text{rot } \vec{V} = - \vec{e}_\phi \frac{\partial V_z}{\partial s} \quad (\text{was aus Symm. zu erwarten war!})$$

$$\Rightarrow \vec{B} = - \vec{e}_\phi \frac{\partial V_z}{\partial s} = - \frac{I \mu_0}{4\pi} \vec{e}_\phi \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \ln(z+L + \sqrt{(z+L)^2 + s^2}) - \ln(z-L + \sqrt{(z-L)^2 + s^2}) \right\}$$

Aufg. C.

$$c. \quad \vec{B} = - \frac{I \mu_0}{4\pi} \vec{e}_\phi \left\{ \frac{1}{z+L + \sqrt{(z+L)^2 + s^2}} \cdot \frac{1}{2} [(z+L)^2 + s^2]^{-\frac{1}{2}} \cdot 2s - \frac{s}{(z-L) \sqrt{(z-L)^2 + s^2} + s^2 + (z-L)}$$

$$\vec{B} = \frac{I \mu_0}{4\pi} \vec{e}_\phi \left\{ \frac{s}{s^2 + (z+L)^2 + (z-L) \sqrt{(z-L)^2 + s^2}} - \frac{s}{s^2 + (z+L)^2 + (z+L) \sqrt{(z+L)^2 + s^2}} \right\}$$

d. Mache nicht Grenzübergang $L \rightarrow \infty$, sondern benutze Durchflutungsgesetz (einfacher + schneller!)

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{n} = I$$

$$H \cdot 2\pi s = I$$

$$\text{Symmetrie: } \vec{H} = H \cdot \vec{e}_\phi(\phi)$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{I}{2\pi s} \vec{e}_\phi(\phi)$$

Aufg. C:

e. $\vec{H}_{\text{ges}} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$

$\vec{H}_1 = \frac{I_1}{2\pi s} \vec{e}_\phi$ im Ursprung

wechsle zu kart. Koordinaten:

$\vec{e}_\phi = -\vec{e}_x \sin\phi + \vec{e}_y \cos\phi$

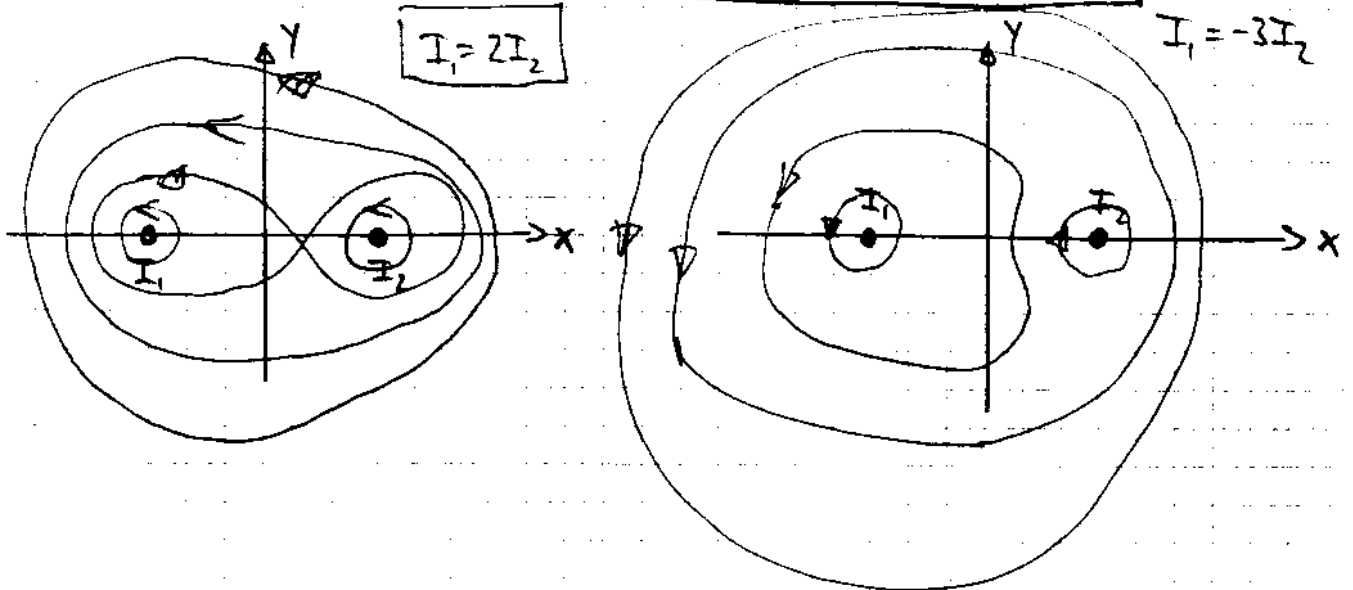
$\sin\phi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, s = \sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow \vec{H}_1 = \frac{I_1}{2\pi} \frac{x\vec{e}_y - y\vec{e}_x}{x^2+y^2}$ im Ursprung

\vec{H}_1 im Pkt $(-\frac{d}{2} | 0)$: $\vec{H}_1 = \frac{I_1}{2\pi} \cdot \frac{(x+\frac{d}{2})\vec{e}_y - y\vec{e}_x}{(x+\frac{d}{2})^2 + y^2}$

analog: $\vec{H}_2 = \frac{I_2}{2\pi} \cdot \frac{(x-\frac{d}{2})\vec{e}_y - y\vec{e}_x}{(x-\frac{d}{2})^2 + y^2}$

$$\vec{H} = \frac{I_1}{2\pi} \cdot \frac{(x+\frac{d}{2})\vec{e}_y - y\vec{e}_x}{(x+\frac{d}{2})^2 + y^2} + \frac{I_2}{2\pi} \cdot \frac{(x-\frac{d}{2})\vec{e}_y - y\vec{e}_x}{(x-\frac{d}{2})^2 + y^2}$$



Zusatzübungen Theoretische Elektrotechnik III

Aufgabe A: Punktladung vor leitender Kugelfläche

Außerhalb einer leitenden, geerdeten Kugelfläche befindet sich eine Punktladung q , siehe Abb. 1. Der Kugelradius sei R , der Abstand der Punktladung vom Mittelpunkt der Kugel sei $d > R$, und die gesamte Anordnung befindet sich im Vakuum.

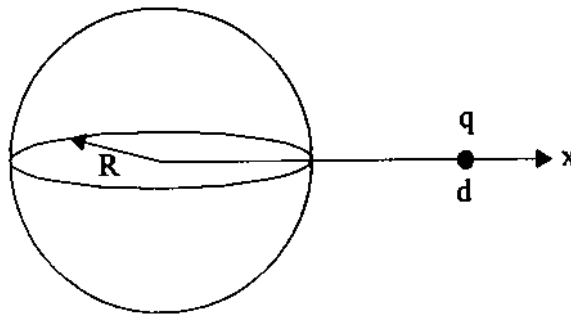


Abb. 1 Punktladung vor leitender Kugelfläche

Berechnen Sie mit Hilfe der Spiegelungsmethode das Potential der Anordnung!

Aufgabe B: Prüfungsaufgabe Frühjahr 1996

Aufgabe 2: Stromdurchflossener Hohlzylinder (19 Punkte)

Längs eines unendlich langen, hohlzylinderförmigen Leiters mit Innenradius R_1 und Außenradius R_2 (siehe Abb. 2.1), dessen Symmetrieachse mit der z -Achse zusammenfällt, fließt ein zeitlich konstanter, homogener über den Leiterquerschnitt verteilter Gesamtstrom I in Richtung der positiven z -Achse.

- (a) Berechnen Sie das vom Strom I erzeugte Magnetfeld $\vec{H}(\vec{r})$ im ganzen Raum, und skizzieren Sie den Verlauf des Betrages von \vec{H} . (4 Punkte)

- (b) Berechnen Sie für den Leiter die innere Induktivität pro Längeneinheit. (3 Punkte)
 Hinweis: Die innere Induktivität berücksichtigt nur das Magnetfeld im Leiter.

Außerhalb des Leiters bewege sich ein geladenes Teilchen mit Ladung q und Masse m unter dem Einfluß der Lorentzkraft $\vec{F}(\vec{r})$ auf einer Bahnkurve $\vec{r}(t)$. Diese ist durch die zeitabhängigen Zylinderkoordinaten $\rho(t)$, $\alpha(t)$ und $z(t)$ in der Form

$$\vec{r}(t) = \rho(t) \vec{e}_\rho(\alpha(t)) + z(t) \vec{e}_z$$

gegeben.

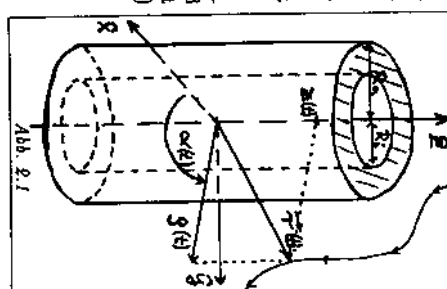


Abb. 2.1

- (c) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{r}}(t)$ längs der Bahnkurve des Teilchens in Zylinderkoordinaten und daraus den Vektor $\ddot{\vec{r}}(t)$ der Beschleunigung in Zylinderkoordinaten. (4 Punkte)

- (d) Berechnen Sie unter Verwendung des in Teilaufgabe (a) berechneten Magnetfeldes im Außenraum des Leiters den Ausdruck für die Lorentzkraft \vec{F}_L , die auf das Teilchen entlang dessen Bahnkurve wirkt, in Zylinderkoordinaten. (3 Punkte)

- (e) Berechnen Sie den Zuwachs ΔW der kinetischen Energie des Teilchens bei der Bewegung zwischen zwei beliebigen Punkten auf seiner Bahnkurve. Gilt das Ergebnis auch für die Bewegung in einem beliebigen Magnetfeld? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

- (f) Leiten Sie aus der Newtonschen Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{a}} = \vec{F}_L$ die Differentialgleichungen für die zeitabhängigen Koordinaten $\rho(t)$, $\alpha(t)$ und $z(t)$ ab. (3 Punkte)