

Diplomhauptprüfung (Herbst 2004)

Theoretische Elektrotechnik III

1. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
2. Außer Schreib- und Zeichenmaterial sind keine Hilfsmittel zugelassen (auch kein Taschenrechner)!
3. Die jeweils maximal erreichbare Punktzahl pro Teilaufgabe ist in Klammern am Ende jeder Teilaufgabe angegeben.
4. Es sind alle Aufgaben zu bearbeiten! Die Zusatzaufgaben sind optional.
5. Verwenden Sie ausschließlich die Ihnen ausgeteilten Doppelbögen; nur diese werden bewertet. Trennen Sie die Doppelbögen nicht.
6. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Doppelbogen!
7. Schreiben Sie auf jeden Doppelbogen Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Aufgabe (inklusive der Teilaufgabe), die Sie bearbeiten!
8. Zeigen Sie den gewählten Lösungsweg auf. Geben Sie insbesondere Zwischenergebnisse und Begründungen an. Nur eindeutige Aussagen können bewertet werden!
9. Einige häufig gebrauchte Formeln finden Sie im Anhang.
10. **VIEL ERFOLG!!!**

Aufgabe 1: Homogene Raumladungsverteilungen in Form zentrischer und exzentrischer Hohlkugeln (16 Punkte + 4 Zusatzpunkte)

Gegeben sei eine homogene Raumladungsverteilung mit $\rho(r) = \rho_0 = \text{konst.}$ zunächst in Form einer konzentrischen Hohlkugel (siehe Darstellung des zentrischen Schnittes in Bild 1.1). Das heißt die komplette positive Ladung Q verteilt sich homogen im Raum zwischen den beiden Kugeln mit den Radien R_i und R_a . Die Dielektrizitätskonstante ϵ sei im ganzen Raum identisch ϵ_0 .

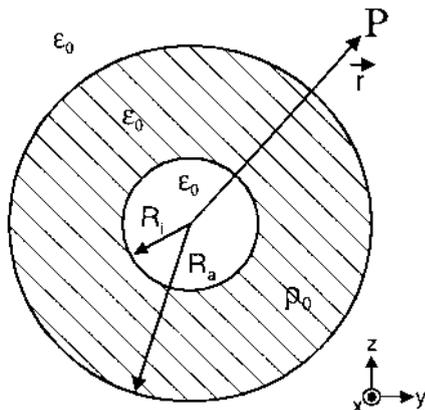


Bild 1.1: Homogene Raumladungsverteilung in Form einer zentrischen Hohlkugel

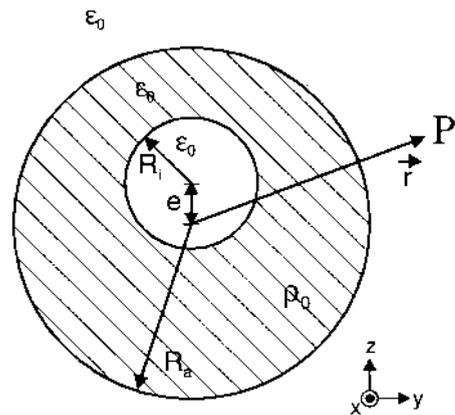


Bild 1.2: Homogene Raumladungsverteilung in Form einer exzentrischen Hohlkugel

- 1.1 Berechnen und skizzieren Sie den Verlauf der **elektrischen Feldstärke** $\vec{E}(\vec{r})$ in Abhängigkeit vom Beobachtungspunkt P mit dem Ortsvektor \vec{r} und den gegebenen Geometrie- und Materialparametern im **gesamten Raum**. (4 Punkte)
- 1.2 Berechnen und skizzieren Sie den Verlauf des **elektrischen Potentials** $\varphi(\vec{r})$ in Abhängigkeit vom Beobachtungspunkt P mit dem Ortsvektor \vec{r} und den gegebenen Geometrie- und Materialparametern im **gesamten Raum**. Wählen Sie hierfür eine günstige Lage des Bezugspotentials. (4 Punkte)

Die Raumladungsverteilung sei weiterhin homogen, jedoch nicht mehr wie in Bild 1.1 in Form einer zentrischen Hohlkugel, sondern in Form einer exzentrischen Hohlkugel verteilt. Die Exzentrizität e entspricht dem Versatz des Hohlraummittelpunktes um die Weglänge e in positive z -Richtung (siehe Bild 1.2).

- 1.3 Berechnen Sie nun für die geänderte Anordnung wiederum den Verlauf der **elektrischen Feldstärke** $\vec{E}(\vec{r})$ in Abhängigkeit vom Beobachtungspunkt P und den gegebenen Geometrie- und Materialparametern im **gesamten Raum**. (7 Punkte)
- 1.4 Verifizieren Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil 1.3 für den Grenzfall verschwindender Exzentrizität $e = 0$ mit denen aus Aufgabenteil 1.1. (1 Punkt)

Zusatzaufgaben:

- 1.Z.1 Geben Sie zu Aufgabenteil 1.1 einen **alternativen Lösungsweg** an und skizzieren Sie diesen kurz in groben Zügen (keine expliziten Berechnungen nötig). (2 Punkte)
- 1.Z.2 Begründen Sie weshalb das **elektrische Potential** φ immer **stetig** sein muß. (2 Punkte)

Aufgabe 2: Elektromagnetisches Feld eines ideal leitenden Zylinders im verlustbehafteten Medium (11 Punkte + 4 Zusatzpunkte)

Ein **ideal leitender Zylinder** der Länge L werde mit einem **Gleichstrom** I an der Stelle $z = 0$ gespeist. Der Strom I verteile sich homogen über die Zylinderoberfläche. Es werde angenommen, dass die Stromzuführung die Symmetrie dabei nicht störe. Da das Verhalten des ideal leitenden Zylinders in dessen Mitte bei $L/2$ (d. h. bei $z = 0^+$) untersucht werden soll, können **Randeffekte** vernachlässigt werden. Der Zylinder mit Radius R sei im Abstand a parallel zur z -Achse verlegt und befinde sich in einem Medium mit der Leitfähigkeit $\kappa > 0$ und der Dielektrizitätszahl $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$; $\epsilon_r = \text{konst.}$ (siehe Bild 2.1). Der Halbraum über dem Medium, d. h. für $y > 0$, ist nicht leitfähig.

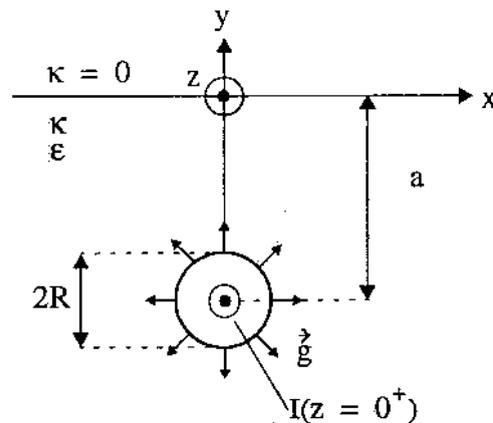


Bild 2.1: Schnitt eines ideal leitenden stromdurchflossenen Zylinders

- 2.1 Berechnen Sie die Stromdichte \vec{j} außerhalb des ideal leitenden Zylinders im leitfähigen Medium ($y \leq 0$) und über dem leitfähigen Medium ($y > 0$). (3 Punkte)
- 2.2 Berechnen Sie die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ für $y \leq 0$. (1 Punkt)
- 2.3 Berechnen Sie das elektrische Potential $\phi(\vec{r})$ für $y \leq 0$. (3 Punkte)
- 2.4 Wie verlaufen die elektrischen Feldlinien in der Ebene $y = 0$? Begründen Sie das Ergebnis anschaulich! (2 Punkte)
- 2.5 Berechnen Sie die Raumladungsdichte $\rho(\vec{r})$ im Medium (d. h. $y < 0$). (2 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 2.Z.1 Berechnen Sie die Flächenladungsdichte $\sigma(\vec{r})$ in der Ebene $y = 0$. (2 Punkte)
- 2.Z.2 Der Strom I sei nun zeitabhängig, d. h. $I = i(t)$. Welches Verfahren erlaubt eine einfache Berechnung der Stromdichte \vec{j} und des elektrischen Feld $\vec{E}(\vec{r})$? Geben Sie den Rechengang und die Grenzen des Verfahrens an! (2 Punkte)

Aufgabe 3: TEM-Wellen

(11 Punkte + 4 Zusatzpunkte)

Eine ebene, harmonische, zirkular polarisierte TEM-Welle mit der Kreisfrequenz ω breite sich in einem homogenen, verlustfreien Dielektrikum aus. Die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ist im Raumpunkt \vec{r} zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = T/4$ (T entspricht der Periodendauer) gegeben durch

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r} = \vec{0}, t = 0) &= -3 \cdot E_0 \cdot \vec{e}_y + 4 \cdot E_0 \cdot \vec{e}_z \quad \text{und} \\ \vec{E}(\vec{r} = \vec{0}, t = T/4) &= 5 \cdot E_0 \cdot \vec{e}_x \quad \text{mit } E_0 = \text{konst.}\end{aligned}$$

- 3.1 Berechnen Sie den Einheitsvektor $\vec{e}_a = e_{a,x} \cdot \vec{e}_x + e_{a,y} \cdot \vec{e}_y + e_{a,z} \cdot \vec{e}_z$ in dessen Richtung sich die Welle ausbreitet. Begründen Sie Ihre Rechenschritte! (2 Punkte)

Sollte Aufgabenteil 3.1 nicht gelöst werden können, so kann der dort gesuchte Einheitsvektor für die weiteren Rechnungen alternativ zu $\vec{e}_a = 4/5 \cdot \vec{e}_y + 3/5 \cdot \vec{e}_z$ angenommen werden.

Für die y-Komponente k_y des Wellenvektors $\vec{k} = k_x \cdot \vec{e}_x + k_y \cdot \vec{e}_y + k_z \cdot \vec{e}_z$ der oben beschriebenen TEM-Welle gelte außerdem $k_y = k_0 \cdot 8/5$ mit $k_0 =$ Wellenzahl im freien Raum.

- 3.2 Geben Sie die relative Dielektrizitätszahl ϵ_r des Dielektrikums an, für welche die oben angegebene Beziehung zwischen k_y und k_0 erfüllt wird. Berechnen Sie damit nun explizit den Wellenvektor \vec{k} der TEM-Welle. (2 Punkte)

Die komplexwertigen Feldgrößen $\vec{E}(\vec{r})$ und $\vec{H}(\vec{r})$ seien definiert durch:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re\{\vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}\} \quad \text{und} \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \Re\{\vec{H}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}\},$$

wobei der Operator $\Re\{\vec{a}\}$ den Realteil \vec{a} der komplexen Größe \vec{a} liefert.

- 3.3 Berechnen Sie die komplexe elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$, als Funktion von E_0 , \vec{k} und \vec{r} . (4 Punkte)

- 3.4 Bestimmen Sie nun hieraus die komplexe magnetische Feldstärke $\vec{H}(\vec{r})$, als Funktion von E_0 , \vec{k} , \vec{r} und Z_0 , dem Feldwellenwiderstand im Vakuum. (3 Punkte)

Zusatzaufgabe:

- 3.Z.1 Berechnen Sie die Wirkleistung \bar{P}_w , die im zeitlichen Mittel in Ausbreitungsrichtung durch eine dazu senkrechte Einheitsfläche transportiert wird. (4 Punkte)

Aufgabe 4: Elektromagnetische Wellen (15 Punkte + 4 Zusatzpunkte)

- 4.1 Vergleichen Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle in einer idealen Koaxialleitung (Dielektrikum mit $\epsilon_r = 4$) mit der im „Freiraum“ der relativen Brechzahl $n = 2$. (2 Punkte)
- 4.2 Zeigen Sie unter Verwendung des Nabla-Operators und eines Satzes aus der Vektoranalysis, daß ein **Gradientenfeld stets rotationsfrei** ist! (2 Punkte)
- 4.3 Modell der **homogenen ebenen** elektromagnetischen Welle im freien Raum
- Charakterisieren Sie eine homogene ebene elektromagnetische Welle! (1 Punkt)
 - Weshalb kann in der Natur nie eine „reale“ homogene ebene elektromagnetische Welle vorkommen? (1 Punkt)
 - Nennen Sie einen Fall, bei dem dieses Modell trotzdem in sehr guter Näherung genutzt werden kann. (1 Punkt)
- 4.4 **Polarisation** einer elektromagnetischen Welle
- Zu welchem Wellentyp zählt man die elektromagnetischen Wellen? (1 Punkt)
 - Wie läßt sich ein beliebiger Polarisationszustand einer elektromagnetischen Welle beschreiben und wie wird er bezeichnet? (2 Punkte)
 - Wie kann man sich eine zirkular polarisierte Welle zusammengesetzt vorstellen? Welche Bedingungen müssen dann gelten? (2 Punkte)
- 4.5 **Feldwellenwiderstand**
- Wie ist der Feldwellenwiderstand definiert? (1 Punkt)
 - Welche Bedeutung hat er? (1 Punkt)
 - Wie groß ist er in einem großen Quader aus Fensterglas? Geben Sie das Ergebnis in Abhängigkeit vom Feldwellenwiderstand im Vakuum an. (1 Punkt)

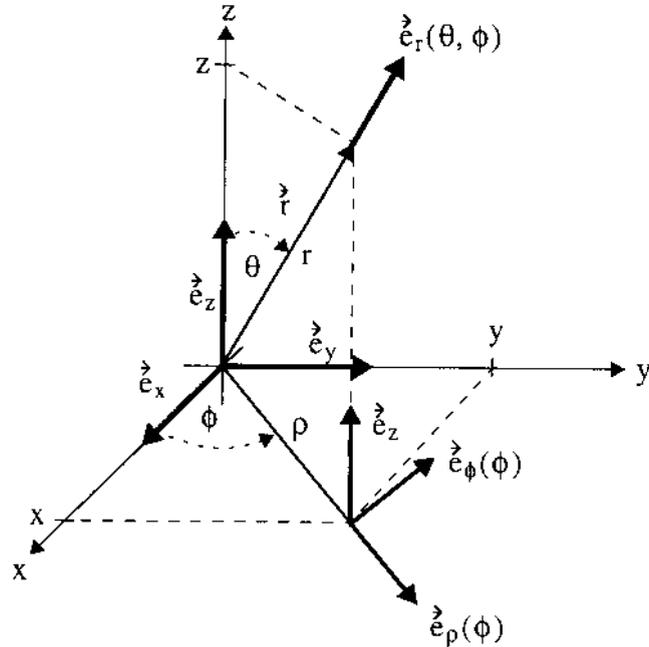
Zusatzaufgaben:

- 4.Z.1 Geben Sie einen **mathematischen Ausdruck** für die komplexe Amplitude des magnetischen Feldes $\vec{H}(x, y, z, t)$ einer TEM-Welle im **homogenen Dielektrikum** der Brechzahl n an, wenn die harmonische Welle in x -Richtung **linear polarisiert** ist, sich in positive z -Richtung ausbreitet und in Ausbreitungsrichtung um den Faktor α (in $1/m$) **exponentiell gedämpft** wird. (2 Punkte)
- 4.Z.2 Gegeben sei die **skalare Wellenfunktion** $\psi(\vec{r}, t)$ in Abhängigkeit vom Ort $\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z$ und der Zeit t zu $\psi(\vec{r}, t) = A \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}}$. Die Amplitude A sei, genauso wie der Wellenvektor \vec{k} und die Kreisfrequenz ω konstant. Um welche **Wellenform** handelt es sich? Beweisen Sie Ihre Aussage mathematisch! (2 Punkte)

Formelsammlung

1. Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}\vec{e}_\rho(\phi) &= \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\phi \cdot \vec{e}_y \\ \vec{e}_\phi(\phi) &= -\sin\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\phi \cdot \vec{e}_y \\ \vec{r}(\rho, \phi, z) &= \rho \cdot \vec{e}_\rho(\phi) + z \cdot \vec{e}_z \\ \vec{e}_\rho(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [x\vec{e}_x + y\vec{e}_y] \\ \vec{e}_\phi(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y] \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}\end{aligned}$$



2. Kugelkoordinaten:

$$\vec{e}_r(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{e}_r(\theta, \phi) = \sin\theta \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\theta \sin\phi \cdot \vec{e}_y + \cos\theta \cdot \vec{e}_z$$

3. Oberflächen- und Volumenelemente:

$$\begin{aligned}d\vec{A}(r, \theta, \phi) &= r^2 \sin\theta d\theta d\phi \cdot \vec{e}_r & dV(r, \theta, \phi) &= r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr \\ d\vec{A}(\rho, \phi, z) &= \rho d\phi dz \cdot \vec{e}_\rho & dV(\rho, \phi, z) &= \rho d\rho d\phi dz\end{aligned}$$

4. Divergenz und Rotation in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{A} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \{\rho A_\rho\} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \{A_\phi\} + \frac{\partial}{\partial z} \{A_z\} \\ \operatorname{rot} \vec{A} &= \vec{e}_\rho \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right] + \vec{e}_\phi \cdot \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] + \vec{e}_z \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right]\end{aligned}$$

5. Laplace-Operator und Gradient in Zylinderkoordinaten

$$\Delta U(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \cdot \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \phi} \cdot \vec{e}_\phi + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \vec{e}_z$$

6. Laplace-Operator und Gradient in Kugelkoordinaten

$$\Delta \varphi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \right]$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \cdot \vec{e}_\phi$$

7. Vektoroperationen:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \text{ mit } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$$

8. Näherungsformeln nach Taylorentwicklung um x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

für kleine Winkel α gilt: $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$, od. $\sin \alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{3!}$, $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2!}$.

9. Integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C,$$

$$\int \frac{x dx}{[x^2+a^2]^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + C$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2} + C,$$

$$\int \frac{dx}{[x^2+a^2]^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \cdot \sqrt{x^2+a^2}} + C$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(a^2+x^2) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

10. Trigonometrische Funktionen:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

11. Feldtheoretische Zusammenhänge:

Biot-Savartsches Gesetz:
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Magnetisches Vektorpotential:
$$\vec{V}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \cdot d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Fresnelsche Formeln mit Wellenausbreitungsrichtungen \vec{e}_e , \vec{e}_r und \vec{e}_t :

a) für S-Polarisation:

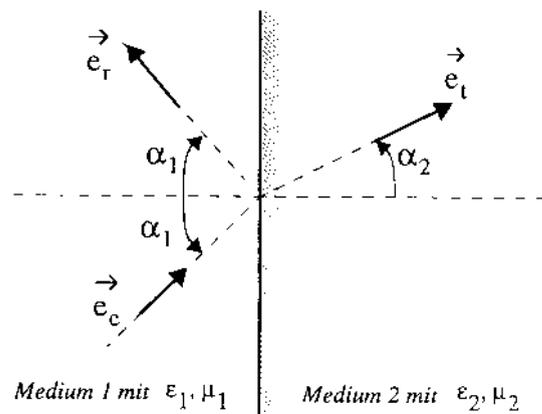
$$\frac{E_r}{E_e} = \frac{Z_2 \cos \alpha_1 - Z_1 \cos \alpha_2}{Z_2 \cos \alpha_1 + Z_1 \cos \alpha_2}$$

$$\frac{E_t}{E_e} = \frac{2Z_2 \cos \alpha_1}{Z_2 \cos \alpha_1 + Z_1 \cos \alpha_2}$$

b) für P-Polarisation:

$$\frac{E_r}{E_e} = \frac{Z_2 \cos \alpha_2 - Z_1 \cos \alpha_1}{Z_2 \cos \alpha_2 + Z_1 \cos \alpha_1}$$

$$\frac{E_t}{E_e} = \frac{2Z_2 \cos \alpha_1}{Z_1 \cos \alpha_1 + Z_2 \cos \alpha_2}$$



$Z_{1,2}$ entspricht dem Feldwellenwiderstand im Medium der Brechzahl n_1 bzw. n_2 .

Aufgabe 1:

1.1) Aufteilung des Problems in 3 Bereiche:

- | | |
|-------------------------|---|
| I) $0 \leq r \leq R_i$ | } keine Grenzflächenbedingungen zu berücksichtigen, da $\epsilon = \epsilon_0 \neq \epsilon(r)$ |
| II) $R_i < r \leq R_a$ | |
| III) $R_a < r < \infty$ | |

Satz von Gauß: $\oint_{A(=\partial V)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \text{div } \vec{D} \, dV$ mit $\text{div } \vec{D} = \rho$
 (wegen Symmetrie!) $\Rightarrow \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho(\vec{r}) \, dV$

I) $0 \leq r \leq R_i: \rho(\vec{r}) = 0$

$\Rightarrow \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{D} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0}}$

II) $R_i < r \leq R_a: \rho(\vec{r}) = \rho_0 = \text{konst.}$

$\Rightarrow \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho_0 \, dV = \rho_0 \cdot \iiint_V dV$

Symmetrie: $\vec{D}(\vec{r}) = D(r) \cdot \vec{e}_r$

$\Rightarrow D(r) \cdot 4\pi r^2 = \rho_0 \cdot \int_{r=R_i}^r \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} r'^2 \cdot \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr'$

$\Rightarrow D(r) = \frac{\rho_0}{4\pi r^2} \cdot \frac{1}{3} r'^3 \Big|_{R_i}^r \cdot (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi} \cdot 2\pi$

$= \frac{\rho_0 \cdot (r^3 - R_i^3)}{12\pi \cdot r^2} \cdot 2\pi \cdot (-(-1) - (-1))$

$\vec{D}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{3} \cdot \left(r - \frac{R_i^3}{r^2}\right) \cdot \vec{e}_r$ mit $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} \wedge \rho_0 = \frac{3 \cdot Q}{4\pi(R_a^3 - R_i^3)}$

$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \cdot \left(r - \frac{R_i^3}{r^2}\right) \cdot \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi(R_a^3 - R_i^3)} \cdot \left(r - \frac{R_i^3}{r^2}\right) \cdot \vec{e}_r}$

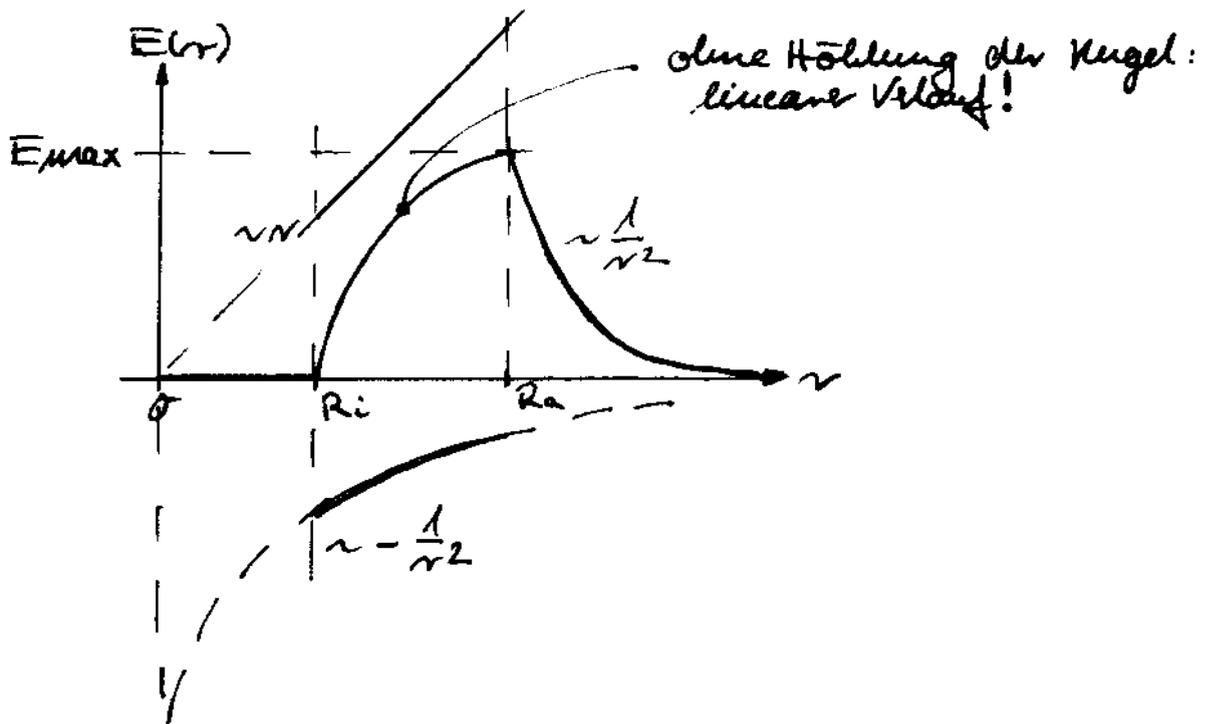
III): $r > R_a$:

$$\oint \vec{D}' \cdot d\vec{A}' = \rho_0 \iiint dV = Q = \rho_0 \cdot \frac{4}{3} \pi (R_a^3 - R_i^3)$$

$$\Rightarrow D(r) = \frac{\rho_0 \cdot 4\pi (R_a^3 - R_i^3)}{4\pi r^2 \cdot 3} = \frac{\rho_0 \cdot (R_a^3 - R_i^3)}{3 \cdot r^2}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0 (R_a^3 - R_i^3)}{3 \cdot |\vec{r}|^2 \cdot \epsilon_0} \cdot \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi \cdot |\vec{r}|^2 \epsilon_0} \cdot \vec{e}_r$$

Skizze:



~21 Bezugspotential: setze (wie üblich) $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) \stackrel{!}{=} 0$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$$

$$\Rightarrow \varphi(r) = \varphi_0 - \int E(r) dr$$

Beginne mit Bruch III, da dort Bezugspotential bekannt!

III): $r > R_a$:

$$\varphi(r) = - \int \frac{\rho_0 (R_a^3 - R_i^3)}{3 \cdot r^2 \cdot \epsilon_0} dr + c = \frac{\rho_0 (R_a^3 - R_i^3)}{3 \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} + c$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = c \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\varphi(r) = \frac{\rho_0 (R_a^3 - R_i^3)}{3 \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \cdot r}$$

$$\text{II): } \varphi(r) = - \int \left(\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \cdot r - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \cdot \frac{R_i^3}{r^2} \right) dr + c$$

$$= - \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} \cdot r^2 - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \cdot \frac{R_i^3}{r} + c$$

Stetigkeit des Potentials: $\varphi(r = R_a^+) \stackrel{!}{=} \varphi(r = R_a^-)$

$$\Rightarrow \frac{\rho_0 \cdot R_a^2}{3\epsilon_0 R_a} - \frac{\rho_0 \cdot R_i^3}{3\epsilon_0 R_a} \stackrel{!}{=} - \frac{\rho_0 R_a^2}{6\epsilon_0} - \frac{\rho_0 R_i^3}{3\epsilon_0 R_a} + c$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \cdot \left(R_a^2 + \frac{R_a^2}{2} \right) = \frac{\rho_0 \cdot R_a^2}{2\epsilon_0}$$

$$\varphi(r) = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} \cdot \left[3R_a^2 - r^2 - \frac{2R_i^3}{r} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_a^3 - R_i^3)} \cdot \left[3R_a^2 - r^2 - \frac{2R_i^3}{r} \right]$$

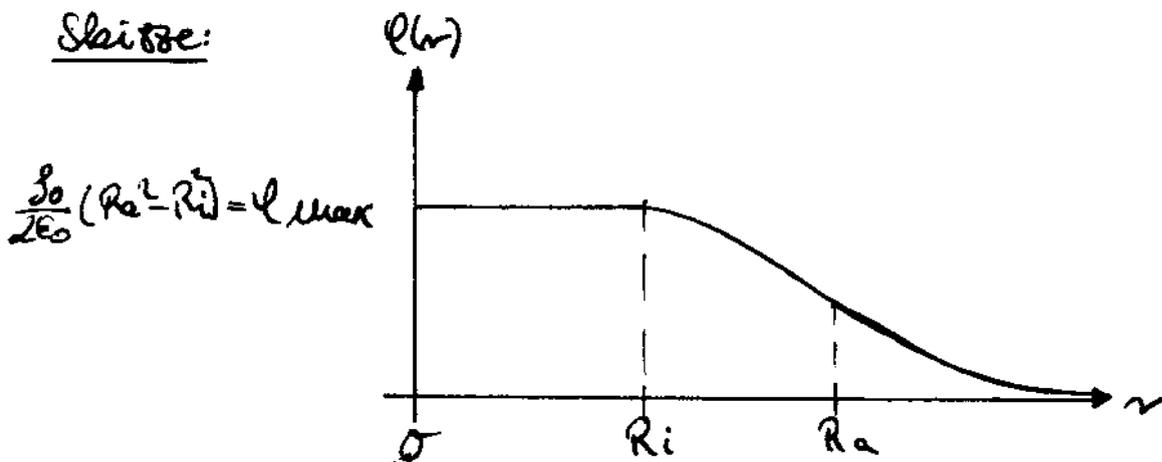
$$\text{I): } \varphi(r) = - \int 0 dr + c = c$$

Stetigkeit des Potentials: $\varphi(r = R_i^+) = \varphi(r = R_i^-)$

$$\frac{\rho_0}{6\epsilon_0} \cdot (3R_a^2 - R_i^2 - 2 \cdot R_i^2) = c = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \cdot (R_a^2 - R_i^2)$$

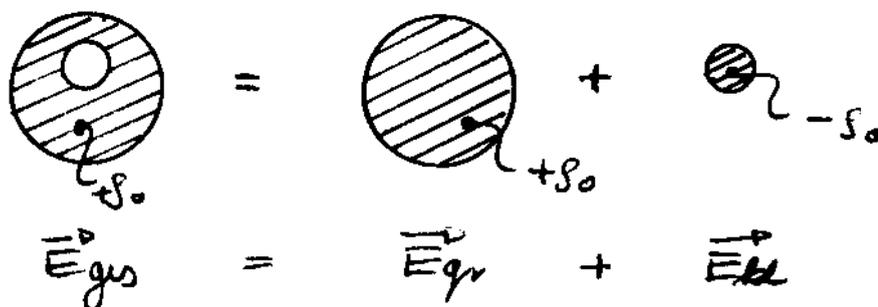
$$\varphi(r) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \cdot (R_a^2 - R_i^2) = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(R_a^2 - R_i^2)}{(R_a^3 - R_i^3)} = \text{const.}$$

Skizze:



1.3 IDEE: Man stelle sich die Raumladungsverteilung in Form einer exzentrischen Hohlkugel als eine SUPERPOSITION zweier Vollkugeln vor, wobei die äußere Kugel (Radius R_a) zentrisch sitzt und mit der Raumladungsdichte $+s_0$ versehen wird und die innere exzentrische Vollkugel (Radius R_i) die Raumladungsdichte $-s_0$ erhält.

D.h.:



mit $s_0 = \frac{3Q}{4\pi(R_a^3 - R_i^3)}$

Feld der großen Kugel: \vec{E}_{gr}

a) innerhalb der Kugel: $r < R_a$: Gauss: $D(r) \cdot 4\pi r^2 = s_0 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$

$\Rightarrow \vec{E}_{gr}(\vec{r}) = \frac{s_0}{3\epsilon_0} \cdot r \cdot \vec{e}_r = \frac{Q \cdot r \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0(R_a^3 - R_i^3)}$

b) außerhalb der Kugel: $r \geq R_a$: Gauss: $D(r) \cdot 4\pi r^2 = s_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R_a^3$

$\Rightarrow \vec{E}_{gr}(\vec{r}) = \frac{s_0 \cdot R_a^3}{3\epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r = \frac{Q \cdot R_a^3}{4\pi\epsilon_0(R_a^3 - R_i^3)} \cdot \frac{\vec{e}_r}{r^2}$

Feld der kleinen Kugel: \vec{E}_{kl}

zunächst im Ursprung (analog zu \vec{E}_{gr}) nur $s_0 \rightarrow -s_0$
 $R_a \rightarrow R_i$

a) innerhalb der Kugel:

$\vec{E}_{kl}(\vec{r}) = \frac{-s_0}{3\epsilon_0} \cdot r \cdot \vec{e}_r$

b) außerhalb der Kugel:

$\vec{E}_{kl}(\vec{r}) = \frac{-s_0 \cdot R_i^3}{3\epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r$

Betrachtung der Exzentrizität: $z \rightarrow z - e$

Sofort zunächst Umwandlung in kartes. Koordinaten:

innerhalb: $\vec{E}_{el} = \frac{-s_0}{3\epsilon_0} \cdot \vec{r} = \frac{-s_0}{3\epsilon_0} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\rightarrow (z \rightarrow z - e): \vec{E}_{el}(x, y, z) = \frac{-s_0}{3\epsilon_0} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - e \end{pmatrix}$

außenhalb: $\vec{E}_{gr} = -\frac{s_0 R_i^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = -\frac{s_0 R_i^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$

$\rightarrow (z \rightarrow z - e): \vec{E}_{gr}(x, y, z) = \frac{-s_0 R_i^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (z - e)\vec{e}_z}{[x^2 + y^2 + (z - e)^2]^{3/2}}$

Gebietsunterscheidung:

I) $[x^2 + y^2 + (z - e)^2]^{1/2} < R_i: \vec{E}_{gs} = \vec{E}_{gr}^{innerhalb} + \vec{E}_{el}^{innerhalb}$

$\vec{E}_{gs} = \frac{s_0}{3\epsilon_0} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{s_0}{3\epsilon_0} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - e \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{gs} = \frac{s_0}{3\epsilon_0} \cdot e \cdot \vec{e}_z}$

II) $R_i \leq [x^2 + y^2 + (z - e)^2]^{1/2} \leq R_a: \vec{E}_{gs} = \vec{E}_{gr}^{innerhalb} + \vec{E}_{el}^{außenhalb}$

$\vec{E}_{gs} = \frac{s_0}{3\epsilon_0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{s_0}{3\epsilon_0} R_i^3 \cdot \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z - e \end{pmatrix}}{[x^2 + y^2 + (z - e)^2]^{3/2}}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_{gs} = \frac{s_0}{3\epsilon_0} \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - e \end{pmatrix} \cdot \frac{R_i^3}{[x^2 + y^2 + (z - e)^2]^{3/2}} \right]}$

III) $R_a < [x^2 + y^2 + (z - e)^2]^{1/2}: \vec{E}_{gs} = \vec{E}_{gr}^{außenhalb} + \vec{E}_{el}^{außenhalb}$

$\vec{E}_{gs} = \frac{s_0 R_a^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{1}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{s_0 R_i^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z - e)^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - e \end{pmatrix}$

$\boxed{\vec{E}_{gs} = \frac{s_0}{3\epsilon_0} \cdot \left\{ \frac{R_a^3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{R_i^3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - e \end{pmatrix}}{[x^2 + y^2 + (z - e)^2]^{3/2}} \right\}}$

1.4] Verifikation: $e = 0$

I) $\vec{E}_{gs} = \vec{0} = \vec{E}_{1,1}^I$ ✓

II) $\vec{E}_{gs} = \frac{f_0}{3\epsilon_0} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{R_i^3}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}} = \frac{f_0}{3\epsilon_0} \cdot \left(\vec{r} - \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|^3} \cdot R_i^3 \right)$
 $= \frac{f_0}{3\epsilon_0} \cdot \left(r - \frac{R_i^3}{r_i} \right) \cdot \vec{e}_r = \vec{E}_{1,1}^{II}$ ✓

III) $\vec{E}_{gs} = \frac{f_0}{3\epsilon_0} \cdot \left\{ \frac{R_a^3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - R_i^3 \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}} \right\} = \frac{f_0}{3\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot (R_a^3 - R_i^3)$
 $= \frac{f_0 \cdot (R_a^3 - R_i^3)}{3\epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r = \vec{E}_{1,1}^{III}$ ✓ g.e.d.

Zusatzaufgaben:

1.6.1: Zusatz über Poissongleichung: $\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$

Beide: I) $\Delta \varphi = 0$
 II) $\Delta \varphi = -\frac{f_0}{\epsilon_0}$
 III) $\Delta \varphi = 0$ } mit $\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)$
 Symmetrie!

mit $\vec{E} = -\text{grad} \varphi = -\frac{\partial}{\partial r} \varphi(r) \cdot \vec{e}_r$
 Symmetrie

$\Rightarrow \Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 (-E(r)) \right) \Rightarrow E(r) = -\frac{1}{r^2} \int \Delta \varphi \cdot r^2 dr$

Dieser Zusatz in den einzelnen Bereichen + Grenzflächenbedingungen

$D_{1,1} = D_{2,1} \Rightarrow$ mit $\epsilon = \epsilon_0 \neq \epsilon(\vec{r})$:

$\vec{E}_{1,1} = \vec{E}_{2,1}$: Stetigkeit des E -Feldes!

1.6.2: elektrisches Potential: $\varphi_{a \rightarrow b} = \frac{W_{a \rightarrow b}}{q_0}$ Probeladung

wobei $W_{a \rightarrow b}$: Arbeit, um die Probeladung

q_0 vom Plat a zum Plat b zu transportieren;

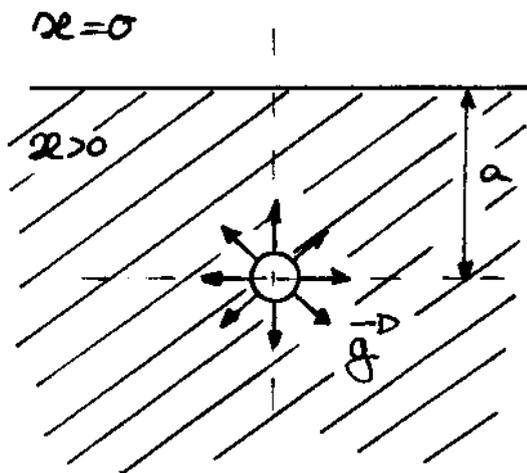
da $q_0 = \text{konst.}$ und $W_{a \rightarrow b}$ immer stetig

(keine sprunghafte (unstetige) Arbeit)

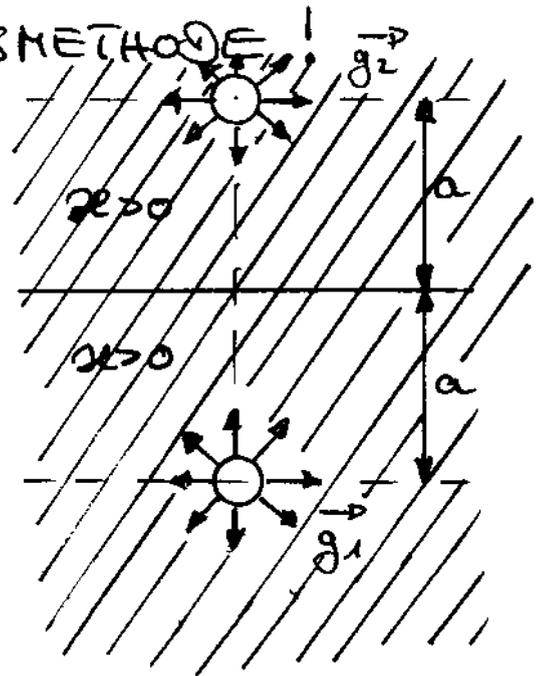
$\Rightarrow \varphi$ ist immer stetig!

Aufgabe 2

2.11 Stichwort: SPIEGELUNGSMETHODE!



$\hat{=}$



Symmetrie: Zylinderkoordinaten

mit $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$

Feld \vec{g} des Zylinders im Ursprung: (d.h. Achse parallel zur z-Achse)

$$g = \frac{I}{A} \Rightarrow \text{hier: } \vec{g} = \frac{I}{A} \cdot \vec{e}_\phi(\phi) = \frac{I}{2\pi s \cdot L} \cdot \vec{e}_\phi(\phi) \quad \text{für } s \geq R$$

Mantelfläche des Zylinders

in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{g}(s, \phi) = \frac{I}{2\pi s \cdot L} \cdot \vec{e}_\phi(\phi) = \vec{g}(x, y, z) = \frac{I}{2\pi L} \cdot \frac{x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y}{[x^2 + y^2]^{3/2}}$$

Feld \vec{g}_1 (Verschiebung: $y \rightarrow y+a$):

$$\vec{g}_1(x, y, z) = \frac{I}{2\pi L} \cdot \frac{x \cdot \vec{e}_x + (y+a) \cdot \vec{e}_y}{[x^2 + (y+a)^2]^{3/2}}$$

Feld \vec{g}_2 (Verschiebung: $y \rightarrow y-a$):

$$\vec{g}_2(x, y, z) = \frac{I}{2\pi L} \cdot \frac{x \cdot \vec{e}_x + (y-a) \cdot \vec{e}_y}{x^2 + (y-a)^2}$$

$$\Rightarrow \vec{g} = \vec{g}(x, y, z) = \begin{cases} \frac{I}{2\pi L} \cdot \left(\frac{x \vec{e}_x + (y+a) \cdot \vec{e}_y}{x^2 + (y+a)^2} + \frac{x \cdot \vec{e}_x + (y-a) \cdot \vec{e}_y}{x^2 + (y-a)^2} \right) & y \leq 0 \\ 0 & y > 0 \end{cases}$$

2.21 differentielles ohmsches Gesetz: $\vec{j} = \alpha \cdot \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{j}}{\alpha}$

$$\vec{E}(x,y,z) = \begin{cases} \frac{I}{2\pi\alpha L} \cdot \left\{ \frac{x \cdot \vec{e}_x + (y+a) \cdot \vec{e}_y}{x^2 + (y+a)^2} + \frac{x \vec{e}_x + (y-a) \cdot \vec{e}_y}{x^2 + (y-a)^2} \right\} & |y| \leq a \\ 0 & |y| > a \end{cases}$$

2.31 $\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z\right)$

$$E_x = \frac{I}{2\pi\alpha L} \cdot \left(\frac{x}{x^2 + (y+a)^2} + \frac{x}{x^2 + (y-a)^2} \right)$$

$$E_y = \frac{I}{2\pi\alpha L} \cdot \left(\frac{y+a}{x^2 + (y+a)^2} + \frac{y-a}{x^2 + (y-a)^2} \right)$$

$$E_z = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = - \int E_x dx + c(y,z) \quad \left| \int \frac{x}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \ln(a^2+x^2) + c \right.$$

$$\varphi_1 = - \frac{I}{2\pi\alpha L} \cdot \frac{1}{2} \left(\ln((y-a)^2+x^2) + \ln((y+a)^2+x^2) \right) + c(y,z)$$

analog: $\varphi_2 = - \int E_y dy + c(x,z)$

$$\varphi_2 = - \frac{I}{2\pi\alpha L} \cdot \frac{1}{2} \left(\ln((y-a)^2+x^2) + \ln((y+a)^2+x^2) \right) + c(x,z)$$

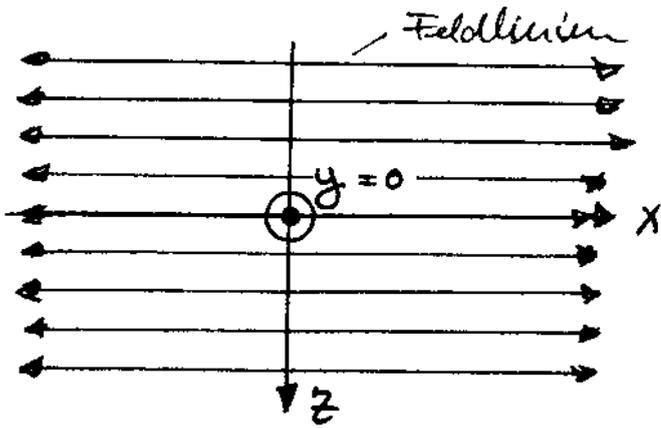
analog: $\varphi_3 = - \int E_z dz + c(x,y)$

$$\varphi_3 = - \int 0 dz + c(x,y) = c(x,y)$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \varphi(x,y) = - \frac{I}{4\pi\alpha L} \cdot \left\{ \ln(x^2+(y+a)^2) + \ln(x^2+(y-a)^2) \right\}}$$

2.41 $y=0: \vec{E}(x,y=0,z) = \frac{I}{2\pi\alpha L} \cdot \frac{x \cdot \vec{e}_x}{x^2+a^2} \cdot 2$

$$\vec{E}|_{y=0} = \frac{I}{\pi\alpha L} \cdot \frac{x}{x^2+a^2} \cdot \vec{e}_x = E(x) \cdot \vec{e}_x$$



d.h. die Feldlinien verlaufen parallel in $\pm x$ -Richtung zur x -Achse. Nur, da \vec{j} nur eine radiale Komponente hat. (bei Draufsicht oben nur x -Komponente)

2.5 $\rho = \text{div } \vec{D} = \text{div}(\epsilon \cdot \vec{E}) = \epsilon \cdot \text{div } \vec{E}$
 da $\epsilon = \text{const.}$

$$= \epsilon \cdot \left\{ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right\} = \epsilon \cdot \frac{I}{2\pi x L} \cdot \left\{ \frac{x^2 + (y+a)^2 - 2x^2}{[x^2 + (y+a)^2]^2} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \frac{x^2 + (y-a)^2 - 2x^2}{[x^2 + (y-a)^2]^2} + \frac{x^2 + (y+a)^2 - 2 \cdot (y+a)^2}{[x^2 + (y+a)^2]^2} + \frac{x^2 + (y-a)^2 - 2 \cdot (y-a)^2}{[x^2 + (y-a)^2]^2} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{-x^2 + (y-a)^2 + x^2 - (y-a)^2}{[x^2 + (y-a)^2]^2} + \frac{-x^2 + (y+a)^2 + x^2 - (y+a)^2}{[x^2 + (y+a)^2]^2} \right\} \frac{I \cdot \epsilon}{2\pi x L}$$

$$= 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho = 0}$$

Zusatzaufgaben:

z.B.1: $D_{n1} - D_{n2} = \sigma \Leftrightarrow \epsilon \cdot E_y|_{y=0^-} - \epsilon \cdot E_y|_{y=0^+} = \sigma$

$$E_y(y=0^-) = \frac{I}{2\pi x L} \cdot \left(\frac{a}{x^2 + a^2} - \frac{a}{x^2 + a^2} \right) = 0 \leftarrow \sigma, \text{ da kein Feld für } y > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = 0}$$

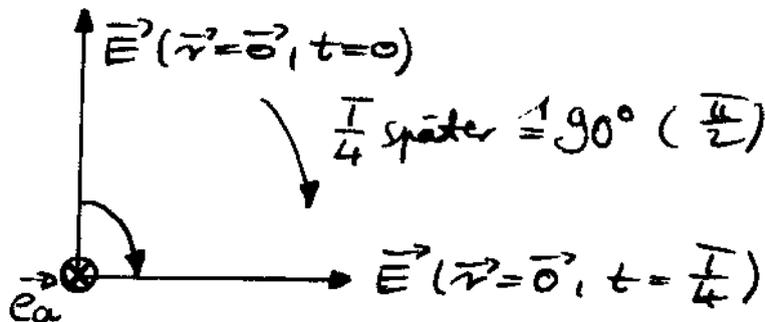
2.2.2: Quasistationäre Näherung $\hat{=}$ Vernachlässigung des Verschiebungsstromes: $\text{rot } \vec{D} = \vec{0}$

Maxwellsche Gleichungen: $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \text{rot } \vec{D}$
 $\text{rot } \vec{E} = -\text{rot } \vec{A}$

\Rightarrow Berechne \vec{j} wie in 2.1, aber $\vec{j} = \vec{j}(t)$ mit $I = I(t)$
 $\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}(t)$ -Berechnung wie in 2.2

Aufgabe 3:

3.1) Bei der Betrachtung der Polarisation (nach Definition bzgl. des \vec{E} -Feldes) nimmt man den \vec{E} an einem festen Ort (z.Bsp. $z=0$, hier $\vec{r}=\vec{0}$) an und betrachtet dessen zeitlichen Verlauf. Der \vec{E} -Feld-Vektor rotiert in einer Ebene normal zur Ausbreitungsrichtung \vec{e}_z mit der zeitlichen Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$.



$\vec{E}(t=0)$, $\vec{E}(t=T/4)$ und \vec{e}_z bilden ein RECHTSYSTEM!

$$\Rightarrow \vec{e}_a = \frac{\vec{E}(\vec{r}=\vec{0}, t=0) \times \vec{E}(\vec{r}=\vec{0}, t=T/4)}{\|(\vec{E}(\vec{r}=\vec{0}, t=0) \times \vec{E}(\vec{r}=\vec{0}, t=T/4))\|}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} E_0^2}{\| \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \| E_0^2} = \frac{\begin{pmatrix} 20-0 \\ 0-(-15) \\ 0 \end{pmatrix}}{[0^2+20^2+15^2]^{1/2}} = \frac{20 \cdot \vec{e}_y + 15 \cdot \vec{e}_z}{25}$$

$$\boxed{\vec{e}_a = \frac{4}{5} \vec{e}_y + \frac{3}{5} \vec{e}_z}$$

3.2) $\epsilon_r = ?$

$$k_y = k_0 \cdot \frac{8}{5} \quad \text{mit} \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{2\pi \cdot f_0}{c_0} = \frac{\omega_0}{c_0}$$

$$k_x = 0;$$

$$\frac{k_y}{k_{\text{med}}} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{k_z}{k_{\text{med}}} = \frac{3}{5}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{k_y}{k_{\text{med}}} = \frac{4}{5} \\ \frac{k_z}{k_{\text{med}}} = \frac{3}{5} \end{array} \right\} \text{mit } k_{\text{med}} = \frac{\omega_0}{c_0} \cdot n = k_0 \cdot n \text{ mit } n^2 = \epsilon_r$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_y}{k_{\text{med}}} = \frac{4}{5} &\Leftrightarrow k_y = \frac{4}{5} \cdot k_{\text{med}} = \frac{4}{5} \cdot k_0 \cdot \mu \\ &1 \quad k_y = \frac{8}{5} \cdot k_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mu = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\epsilon_r = 4} \quad \Rightarrow k_{\text{eff}} = \frac{3}{5} \cdot k_{\text{med}} = \frac{3}{5} \cdot 2 \cdot k_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{k_0}{5} \text{ mit } k_0 = \frac{\omega_0}{c_0}}$$

3.31 $\vec{E}'(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ \underline{\vec{E}}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t} \}$

$\vec{H}'(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ \underline{\vec{H}}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t} \}$

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}) = \underline{\vec{E}}_0 \cdot e^{-j \langle \vec{k}, \vec{r} \rangle} \text{ mit } \underline{\vec{E}}_0 = \begin{pmatrix} \underline{E}_0 x \\ \underline{E}_0 y \\ \underline{E}_0 z \end{pmatrix}$$

$$1.) \vec{E}'(\vec{r} = \vec{0}, t = 0) = \text{Re} \left\{ \begin{pmatrix} \underline{E}_0 x \\ \underline{E}_0 y \\ \underline{E}_0 z \end{pmatrix} \cdot e^{j\omega \cdot 0} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3E_0 \\ 4E_0 \end{pmatrix}$$

$$2.) \vec{E}'(\vec{r} = \vec{0}, t = \frac{T}{4}) = \text{Re} \left\{ \begin{pmatrix} \underline{E}_0 x \\ \underline{E}_0 y \\ \underline{E}_0 z \end{pmatrix} \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \frac{T}{4}} \right\} = \begin{pmatrix} 5E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{E}_{0x} \in \mathbb{C} \Rightarrow$ damit aus $\text{Re} \{ \underline{E}_{0x} \cdot j \} = 5E_0$ folgt, muß

$\underline{E}_{0x} = -j \cdot 5E_0$ sein, analog: \underline{E}_{0y} und $\underline{E}_{0z} \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\vec{E}}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -j5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot E_0 \cdot e^{j \langle \vec{k}, \vec{r} \rangle}}$$

3.4 | H-Feld?

TEM-Welle im homogenen isotropen Medium

$$\underline{\vec{H}}(\vec{r}) = \frac{1}{Z_T} \cdot \vec{e}_z \times \underline{\vec{E}}(\vec{r}), \text{ da } \underline{\vec{E}}, \underline{\vec{H}} \text{ und } \vec{e}_z \text{ ein Rechtssystem bilden}$$

$$Z_T = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z_{T0} \cdot \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} = \frac{Z_{T0}}{\mu} = \frac{Z_{T0}}{2}$$

$$\begin{aligned}\vec{e}_a \times \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -j5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot E_0 \cdot e^{j\vec{k}\vec{r}} \\ &= \frac{E_0}{5} \cdot e^{j\vec{k}\vec{r}} \cdot \begin{pmatrix} 16 - (-9) \\ -15j - 0 \\ 0 - (-20j) \end{pmatrix} = E_0 \cdot e^{j\vec{k}\vec{r}} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3j \\ 4j \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{2 \cdot E_0}{2\mu_0} \cdot e^{-j\langle \vec{k} | \vec{r} \rangle} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3j \\ 4j \end{pmatrix}$$

Zusatzaufgaben:

3.7.1: zeitlicher Mittelwert des Poyntingvektors (gemittelt über 1 Periode T):

$$\begin{aligned}\langle \vec{S} \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \} \\ \vec{E} \times \vec{H}^* &= \begin{pmatrix} -5j \\ -3j \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 3j \\ -4j \end{pmatrix} \cdot E_0 \cdot \frac{2E_0}{2\mu_0} \cdot \frac{e^{-j\vec{k}\vec{r}}}{e^{j\vec{k}\vec{r}}} \\ &= \frac{2E_0^2}{2\mu_0} \cdot \begin{pmatrix} 12j - 12j \\ 20 + 10 \\ 15 + 15 \end{pmatrix} = \frac{2E_0^2}{2\mu_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{2E_0^2}{2\mu_0} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix} \right\} = \frac{E_0^2}{2\mu_0} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\overline{P}_W &= \iint_A \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{A} = \iint_A \langle \vec{S} \rangle \cdot \vec{e}_a dA \\ & \quad A \leftarrow \text{Einheitsfläche: Größe 1} \\ &= \frac{E_0^2}{2\mu_0} \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{5} = \frac{E_0^2}{2\mu_0} \cdot (0 + 160 + 90) \cdot \frac{1}{5}\end{aligned}$$

$$\overline{P}_W = 50 \cdot \frac{E_0^2}{2\mu_0}$$

Aufgabe 4:

4.1) VpL in einer idealen Koaxialleitung: $c = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}}$
 hier: $\mu_r = 1$ $\epsilon_r = 4 \Rightarrow c_{\text{Koax}} = \frac{1}{2} \cdot c_0$

VpL in einem idealen Dielektrikum der Brechzahl n : $c = \frac{c_0}{n}$
 hier: $n = 2 \Rightarrow c_{\text{Die}} = \frac{1}{2} \cdot c_0$

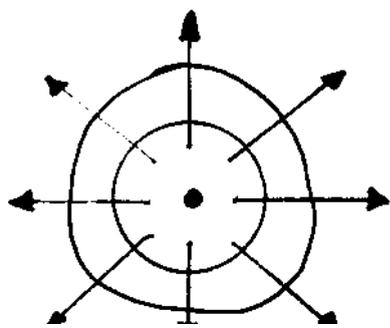
D.h. die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer EM-Welle ist in einer idealen Koaxialleitung mit $\epsilon_r = 4$ identisch zu der einer EM-Welle im "Freiraum" eines idealen Dielektrikums der Brechzahl $n = 2$ und beträgt: $c = \frac{c_0}{2}$; $c_0 \hat{=}$ Vakuumlichtgesch.

4.2) zu zeigen: $\text{rotgrad } \varphi = \vec{0}$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$
 $\text{rotgrad } \varphi = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot \varphi) = \varphi \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}}_{\leq \vec{0}} = \vec{0} \quad \text{q.e.d.}$

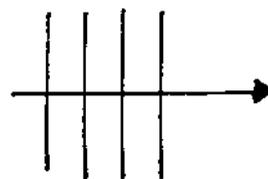
4.3) a) Punkte konstanter Phase bilden zu festen Zeitpunkten betrachtet eine Ebene. Die Amplitude in diesen Punkten ist dann auch noch konstant.

b) ∞ -ausgebreitete EM-Welle im Freiraum
 $\Rightarrow \infty$ -große Fläche $\Rightarrow \infty$ -große Energie ∇
 Dies ist physikalisch nicht möglich! Endliche Energie!

c) Quelle: Kugelwelle \rightarrow in relativ großer Entfernung von der Quelle: in guter Näherung homogene ebene EM-Welle.



...



- 4.4 | a) Transversalwelle (sonst gäbe es ja auch keine Polarisation!)
 b) Überlagerung zweier zueinander orthogonalen, linear polarisierter Wellen, allg. beliebige Phasenlage und Amplitudenverhältnis: elliptische Polarisation
 c) Überlagerung zweier zueinander orthogonalen, linear polarisierter Wellen, die dieselbe Amplitude aufweisen und einen Phasenversatz von $\pm \frac{\pi}{2}$ (oder ungeradzellig Vielfache davon) relativ zueinander besitzen.

4.5 | a) Feldwellenwiderstand: $Z_T = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}}$
 wobei im Vakuum gilt: $Z_{T0} = 120\pi \Omega \approx 377 \Omega$

- b) Widerstand, den die Welle bei Ausbreitung in dem Medium "sieht". Im Vergleich zu idealen Dielektrika ($\mu_r=1; \epsilon_r \neq 1$) besitzt das Vakuum den größten Widerstand. Unter der Annahme homogener ebener EM-Wellen kann man unter Zuhilfenahme von Z_T sehr leicht zwischen den Komponenten des elektr. und magnet. Feldes unterscheiden.

(Bsp.: $E_x = Z_T \cdot H_y$)

- c) Quader aus Glas: da großer Quader \Rightarrow Welle sieht annähernd homogenes Medium der Brechzahl $n \approx 1,6$

$$\Rightarrow Z_T = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} \Big|_{\mu_r=1} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{Z_{T0}}{1,6}$$

Zusatzaufgaben:

4.2.11 allg: $\vec{H}(x,y,z,t) = \vec{H}_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j\langle \vec{k}; \vec{r} \rangle} \cdot e^{-\alpha \cdot z}$

Ausbreitungsrichtung: $\vec{e}_a = \vec{e}_z$

Polarisation immer bzgl E-Feld: x-Richtung

\Rightarrow H-Feld in y-Richtung! $\vec{H}_0 = H_{0y} \cdot \vec{e}_y$

$$\vec{H}(x,y,z,t) = H_{0y} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j k_x \cdot z} \cdot e^{-\alpha \cdot z} \cdot \vec{e}_y$$

4.2.21 Betrachte Punkte konstante Phase zu festem Zeitpunkt!

Dann: Setze: $t = t_0 = 0$

konst. Phase $\Leftrightarrow \left. e^{j\omega t} \cdot e^{j\langle \vec{k}; \vec{r} \rangle} \right|_{t=t_0=0} = \text{konst.} \quad | \quad \text{in}$

$\Leftrightarrow j \cdot \langle \vec{k}; \vec{r} \rangle = c$

$\Leftrightarrow \vec{k} \cdot \vec{r} = c \quad \text{mit } \vec{k} = \text{const.}$

Dies entspricht genau der Ebenengleichung in Normalenform, Ebene E ist normal zu \vec{k}

\Rightarrow EBENE WELLE

Diplomhauptprüfung (Frühjahr 2004)

Theoretische Elektrotechnik III

1. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
2. Außer Schreib- und Zeichenmaterial sind keine Hilfsmittel zugelassen (auch kein Taschenrechner)!
3. Die jeweils maximal erreichbare Punktzahl pro Teilaufgabe ist in Klammern am Ende jeder Teilaufgabe angegeben.
4. Es sind alle Aufgaben zu bearbeiten! Die Zusatzaufgaben sind optional.
5. Verwenden Sie ausschließlich die Ihnen ausgeteilten Doppelbögen; nur diese werden bewertet. Trennen Sie die Doppelbögen nicht.
6. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Doppelbogen!
7. Schreiben Sie auf jeden Doppelbogen Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Aufgabe (inklusive der Teilaufgabe), die Sie bearbeiten!
8. Zeigen Sie den gewählten Lösungsweg auf. Geben Sie insbesondere Zwischenergebnisse und Begründungen an. Nur eindeutige Aussagen können bewertet werden!
9. Einige häufig gebrauchte Formeln finden Sie im Anhang.
10. **VIEL ERFOLG!!!**

Aufgabe 1: PIN-Photodiode

(12 Punkte + 4 Zusatzpunkte)

Gegeben sei eine, wie in Bild 1.1 dargestellte, sogenannte PIN-Photodiode in eindimensionaler Näherung, welche im Vergleich zu einer herkömmlichen Halbleiterdiode zwischen der p- und n-dotierten Schicht noch um eine dritte, undotierte, sogenannte intrinsische (eigenleitende) Schicht (i-Schicht) erweitert wurde. Außerdem besitzt die Photodiode eine transparente Fläche, welche es auftreffenden Photonen erlaubt in die PIN-Schichten einzudringen, um dort zu dem inneren Photoeffekt beizutragen.

Aufgrund der Zusammensetzung der PIN-Photodiode entsteht durch Wärme ($T > 0$ K) eine Raumladungszone mit den Raumladungsdichten $-qN_A$ und $+qN_D$, wobei q der Elementarladung und N_A der Akzeptorkonzentration bzw. N_D der Donatorkonzentration in Ladungsträger/cm³ entsprechen. Die Raumladungsdichten können nach der sogenannten Depletion-Näherung als rechteckförmig angenommen werden, wodurch sich eine sehr einfache Raumladungsverteilung $\rho(x)$ ergibt, wie sie in Bild 1.1 dargestellt ist.

Die Diode sei aus Silizium mit der relativen Dielektrizitätszahl $\epsilon_{si} = \text{konst.}$

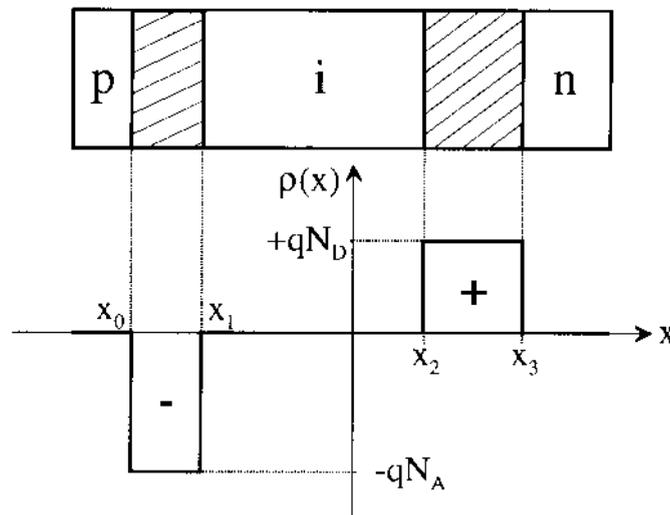


Bild 1.1: PIN-Photodiode mit Raumladungszonen

- 1.1 Wie lautet die sogenannte **Poissongleichung**? Unter welchen Bedingungen wird die Poissongleichung zur **Laplace-Gleichung**? Geben Sie die Laplace-Gleichung an. (2 Punkte)
- 1.2 Berechnen und skizzieren Sie unter Zuhilfenahme der Poissongleichung den Verlauf der **elektrischen Feldstärke** $E(x)$ in Abhängigkeit von der x -Koordinate und den gegebenen Geometrie- und Materialparametern. (5 Punkte)
Hinweis: Da außerhalb der Raumladungszonen (d.h. $x < x_0$ und $x_3 < x$) keine freien Ladungen vorhanden sein sollen, kann die elektrische Feldstärke dort zu Null angenommen werden!
- 1.3 Verifizieren Sie Ihr Ergebnis für die elektrische Feldstärke $E(x)$ aus Aufgabenteil 1.2 an der Stelle $x = x_3$ unter Verwendung des **Ladungserhaltungssatzes**. (1 Punkt)
- 1.4 Berechnen und skizzieren Sie den Verlauf des **elektrischen Potentials** $\phi(x)$ in Abhängigkeit von der x -Koordinate und den gegebenen Geometrie- und Materialparametern, wenn gilt: $\phi(x = x_0) = 0$. (4 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 1.Z.1 Welcher Unterschied fällt Ihnen zwischen den oben berechneten Ergebnissen einer PIN-Diode und einer einfachen PN-Diode auf? Inwiefern kann dieser Unterschied von Vorteil sein, wenn man berücksichtigt, daß eintreffende Photonen vorzugsweise in der I-Schicht Elektron-Loch-Paare erzeugen? *(2 Punkte)*
- 1.Z.2 Leiten Sie ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen allgemein die im Aufgabenteil 1.1 gesuchte Poisson-Gleichung her. *(2 Punkte)*

Aufgabe 2: Magnetisches Feld und Induktion (12 Punkte + 2 Zusatzpunkte)

Längs eines **unendlich langen, hohlzylinderförmigen Leiters** mit Innenradius R_i und Außenradius R_a , dessen Symmetrieachse mit der y -Achse zusammenfällt, fließt ein zeitlich veränderlicher, homogen über den Leiterquerschnitt verteilter Gesamtstrom $I(t) = I_0 \cos \omega t$ in negative y -Richtung.

In der x - y -Ebene befindet sich zusätzlich noch eine quadratische Leiterschleife. Der linke untere Eckpunkt der Schleife habe die im allgemeinen zeitabhängigen Koordinaten $x(t)$ und $y(t)$. Die Seiten der Schleife haben die Länge a und liegen stets parallel zu den Koordinatenachsen (siehe Bild 2.1). Die gesamte Anordnung befinde sich im **Vakuum**.

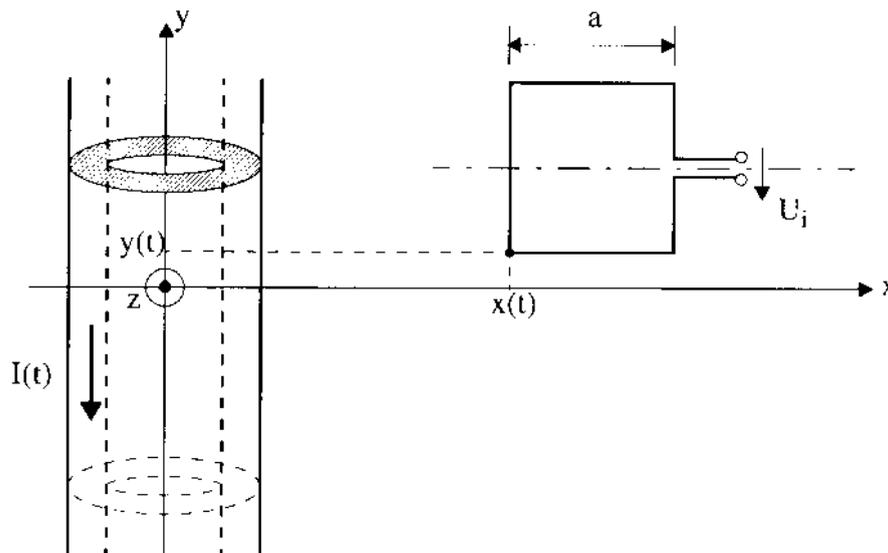


Bild 2.1: Hohlzylinder mit quadratischer Leiterschleife der Kantenlänge a

- 2.1 Berechnen Sie das vom Strom $I(t)$ erzeugte **Magnetfeld** $\vec{H}(\vec{r})$ im **ganzen** Raum. (Wählen Sie dazu ein geeignetes Koordinatensystem.) (4 Punkte)
- 2.2 Berechnen Sie den **Eigeninduktivitätsbelag** L' des hohlzylinderförmigen Leiters, wenn dieser die relative Permeabilität μ_r besitzt. (2 Punkte)
- 2.3 Berechnen Sie den magnetischen **Fluß** durch die Schleifenfläche und **vorzeichenrichtig** die **Induktionsspannung** U_i , wenn die Schleife im Punkt (x_0, y_0) liegt. (3 Punkte)
- 2.4 Vom Punkt (x_0, y_0) aus bewege sich die Schleife nun mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y$ in der x - y -Ebene. Berechnen Sie sich nun ergebende **Induktionsspannung** U_i der geänderten Anordnung. (3 Punkte)

Zusatzaufgabe:

- 2.Z.1 Zusätzlich zur translatorischen Bewegung in Aufgabenteil 2.4 **rotiere** die Leiterschleife nun noch um ihre Symmetrieachse (die in Bild 2.1 punkt-gestrichelt eingezeichnete Parallele zur x -Achse) mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 . Wie groß ist die Induktionsspannung U_i jetzt? (2 Punkte)

Aufgabe 3: Entspiegelung ebener Oberflächen (16 Punkte + 5 Zusatzpunkte)

Ein schon sehr lang bekanntes Phänomen der Optik ist das der Reflexion von Licht an Grenzschichten, welches z. B. auch an Oberflächen von optischen Bauteilen (Linse, Prisma, etc.) mehr oder weniger stark auftritt. Mit dem Auftreten von Reflexionen verliert der transmittierte Anteil automatisch an Leistung. Im allgemeinen ist man aber daran interessiert möglichst viel Leistung des auftreffenden Lichts in das optische Bauteil hinein zu leiten.

Um dies zu erreichen werden die Oberflächen der Objekte (Gebiet 3 ($z > d$) in Bild 3.1) „entspiegelt“. Das bedeutet, daß der Anteil des reflektierten Lichts idealerweise verschwindet. Dazu werden verschiedene Schichten unterschiedlicher Dicken auf das optische Bauteil aufgebracht.

Um diese **Theorie der „Entspiegelung“** mit möglichst einfachen mathematischen Mitteln beschreiben zu können, gehen wir nur von **einer einzigen Entspiegelungsschicht** (Gebiet 2 ($0 < z < d$) in Bild 3.1) der Dicke $d > 0$ aus. Alle drei Gebiete in Bild 3.1 können der Einfachheit halber als **ideale Dielektrika** angenommen werden, d.h. sie sind **homogen, linear, isotrop und nichtleitend**. Sie besitzen alle die Permeabilität $\mu = \mu_0$ und unterscheiden sich nur in ihrer Permittivität ϵ_i , bzw. der Brechzahl n_i , mit $i \in \{1, 2, 3\}$.

Gebiet 1 ($z < 0$) sei in x-, y- und in negative z-Richtung unendlich ausgedehnt, Gebiet 3 in x-, y- und in positive z-Richtung, während das Gebiet 2 lediglich in x- und y-Richtung unendlich ausgedehnt ist.

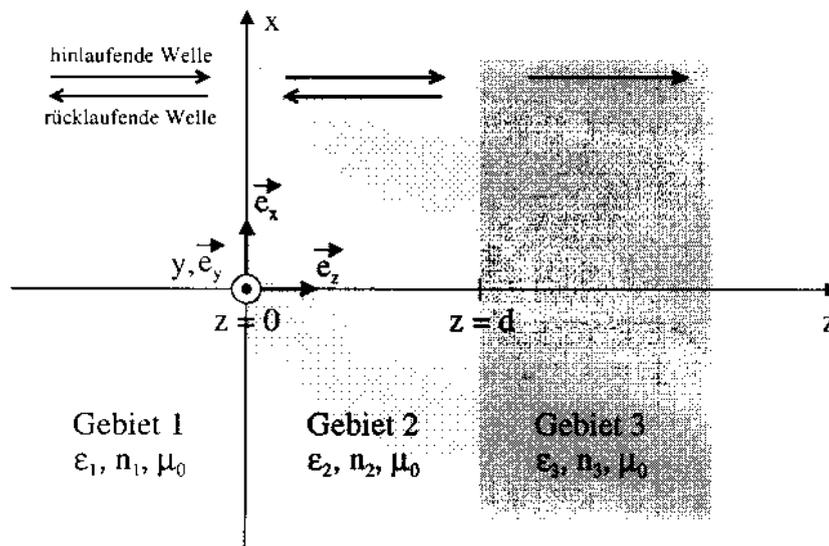


Bild 3.1: Entspiegelung an ebenen Oberflächen mit einer Entspiegelungsschicht

Im folgenden breite sich eine **ebene, in x-Richtung linear polarisierte, harmonische TEM-Welle** im Gebiet 1 in **positive z-Richtung** aus. Sie besitze einen Nullphasenwinkel identisch Null.

- 3.1 Geben Sie einen mathematischen Ausdruck für die komplexe, zeitvariante Amplitude des elektrischen Feldes $\vec{E}(x, y, z, t)$ der oben beschriebenen TEM-Welle an.

(2 Punkte)

- 3.2 Begründen Sie weshalb die Entspiegelung eines Objekts **im allgemeinen** nicht direkt, d.h ohne mindestens eine Entspiegelungsschicht (Gebiet 2) erreicht werden kann!
(2 Punkte)

Hinweis: Überlegen Sie welche Konfiguration(en) vorliegen müßte(n), damit keine rücklaufenden Wellen beim Übergang zwischen 2 Medien möglich sind.

Im folgenden wird vorausgesetzt, daß die Medien in den Gebieten 1 und 3 unterschiedliche Permittivität besitzen, also $\epsilon_1 \neq \epsilon_3$ bzw. $Z_1 \neq Z_3$ ($Z_i \in \mathfrak{R}$: Feldwellenwiderstand im Medium i , $i \in \{1, 2, 3\}$).

- 3.3 Stellen Sie die insgesamt **6 Gleichungen** der elektrischen und magnetischen Feldstärken der TEM-Wellen in den drei Gebieten als Funktion der gegebenen Geometrie- und Materialparameter auf. Beachten Sie hierbei **hin- und rücklaufende** Wellenanteile!
(3 Punkte)

Hinweis: Es genügt hier die zeitfreien Amplituden ohne die harmonische Zeitabhängigkeit zu betrachten.

- 3.4 Wie muß Z_2 in Abhängigkeit von Z_1 und Z_3 gewählt werden, damit **im Gebiet 1 keine rücklaufende Welle** mehr auftritt? Vereinfachen Sie hierzu die unter Aufgabenteil 3.3 zu bestimmenden Gleichungen unter Berücksichtigung der Grenzflächenbedingungen und der gegebenen Randbedingungen. Beachten Sie außerdem, daß der Ausdruck $\exp(2jk_2d)$ nur **2 reelle Werte** annehmen kann, welche? (k_2 entspricht der Freiraumausbreitungskonstanten im Gebiet 2)
(6 Punkte)
- 3.5 Neben der in Aufgabenteil 3.4 zu bestimmenden Abhängigkeit Z_2 von Z_1 und Z_3 , kommt es bei der Entspiegelung sehr stark auf die **Dicke** der Entspiegelungsschicht (Gebiet 2) an. Wie groß muß d gewählt werden, damit **im Gebiet 1 keine rücklaufende Welle** auftritt? Geben Sie d in Vielfachen von λ_2 , der Wellenlänge im Medium 2 an.
(3 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 3.Z.1 Für welchen Sonderfall könnte eine „Entspiegelung“ ohne eine **einzigste Entspiegelungsschicht** wie sie in Aufgabenteil 3.2 verlangt wird dennoch erreicht werden? Welche Einschränkungen müßten dafür gemacht werden?
(2 Punkte)
- 3.Z.2 Leiten Sie ausgehend von den **allgemeinen** Maxwell'schen Gleichungen und unter Verwendung des Graßmann'schen Entwicklungssatzes sukzessive die zeitbehaftete Wellengleichung für die **magnetische** Feldstärke $\vec{H}(\vec{r}, t)$ her. Gehen Sie von einem homogenen, isotropen und idealen Dielektrium der Brechzahl n aus.
(3 Punkte)

Aufgabe 4:

(14 Punkte + 5 Zusatzpunkte)

- 4.1 Was versteht man unter einer **elektrischen Feldlinie**? Nennen Sie Eigenschaften elektrischer Feldlinien! (3 Punkte)
- 4.2 Zeigen Sie anhand eines einfachen Beispiels durch sehr einfache mathematische Rechnungen, daß elektrische Feldlinien stets **orthogonal** zu Äquipotentialflächen stehen. (3 Punkte)
- 4.3 Was versteht man unter der „**quasistationären Näherung**“? Erläutern Sie diesen Begriff! (2 Punkte)
- 4.4 Gegeben sei ein ebener, homogener, dielektrischer **Schichtwellenleiter**.
- Durch welche Funktionen lassen sich die Feldverläufe in den einzelnen Bereichen charakterisieren? (1 Punkt)
 - Wie ändert sich der Feldverlauf der transversalen Feldkomponente einer **gedämpften TM-Welle** entlang ihrer Ausbreitungsrichtung näherungsweise? (1 Punkt)
 - Welche besonderen Terme sind beim Aufstellen der „**transversalen Resonanzbedingung**“ zu beachten? (1 Punkt)
- 4.5 Zylindersymmetrische optische Lichtwellenleiter (**Glasfasern**)
- Welche **Näherung** steckt in der in der Vorlesung betrachteten „Helmholtz-Gleichung“? (2 Punkte)
 - Welche Vorteile liefert bei der Ableitung der Wellenfunktion ein **Separationsansatz**? (1 Punkt)

Zusatzaufgaben:

- 4.Z.1 Welchen Sinn könnte ein **komplexwertiger Wellenvektor** $\vec{k} = \vec{k}_R + j \cdot \vec{k}_I$ machen? Diskutieren Sie am Beispiel einer einfachen TEM-Welle. (2 Punkte)
- 4.Z.2 Gegeben sei die **skalare Wellenfunktion** in Abhängigkeit vom Ort $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und der Zeit t zu $\psi(r, t) = \frac{A}{r} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{\pm jkr}$. A entspricht der sogenannten Quellstärke und wird, genauso wie der Betrag k des Wellenvektors und die Kreisfrequenz ω , als konstant angenommen. Um welche **Wellenform** handelt es sich? Beweisen Sie Ihre Aussage mathematisch! (3 Punkte)

Formelsammlung

1. Zylinderkoordinaten:

$$\vec{e}_\rho(\phi) = \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\phi \cdot \vec{e}_y$$

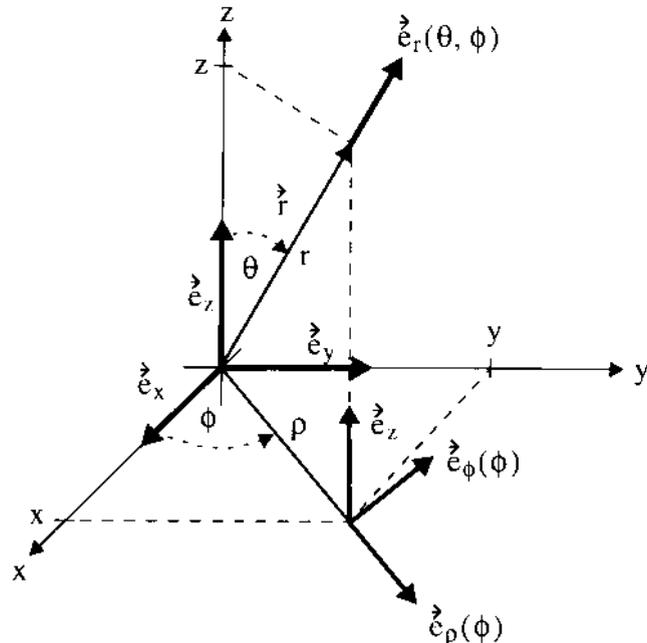
$$\vec{e}_\phi(\phi) = -\sin\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\phi \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{r}(\rho, \phi, z) = \rho \cdot \vec{e}_\rho(\phi) + z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [x\vec{e}_x + y\vec{e}_y]$$

$$\vec{e}_\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y]$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$



2. Kugelkoordinaten:

$$\vec{e}_r(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{e}_r(\theta, \phi) = \sin\theta \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\theta \sin\phi \cdot \vec{e}_y + \cos\theta \cdot \vec{e}_z$$

3. Oberflächen- und Volumenelemente:

$$d\vec{A}(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \cdot \vec{e}_r$$

$$dV(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$

$$d\vec{A}(\rho, \phi, z) = \rho d\phi dz \cdot \vec{e}_\rho$$

$$dV(\rho, \phi, z) = \rho d\rho d\phi dz$$

4. Divergenz und Rotation in Zylinderkoordinaten

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \{\rho A_\rho\} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \{A_\phi\} + \frac{\partial}{\partial z} \{A_z\}$$

$$\text{rot}\vec{A} = \vec{e}_\rho \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right] + \vec{e}_\phi \cdot \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] + \vec{e}_z \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right]$$

5. Laplace-Operator und Gradient in Zylinderkoordinaten

$$\Delta U(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \cdot \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \phi} \cdot \vec{e}_\phi + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \vec{e}_z$$

6. Laplace-Operator und Gradient in Kugelkoordinaten

$$\Delta \varphi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \right]$$

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \cdot \vec{e}_\phi$$

7. Vektoroperationen:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \quad \text{mit } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$$

8. Näherungsformeln nach Taylorentwicklung um x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

für kleine Winkel α gilt: $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$, od. $\sin \alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{3!}$, $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2!}$.

9. Integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C,$$

$$\int \frac{x dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + C,$$

$$\int \frac{dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \cdot \sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

10. Trigonometrische Funktionen:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

11. Feldtheoretische Zusammenhänge:

Biot-Savartsches Gesetz:
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Magnetisches Vektorpotential:
$$\vec{V}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{I} \cdot d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Fresnelsche Formeln mit Wellenausbreitungsrichtungen \vec{e}_e , \vec{e}_r und \vec{e}_t :

a) für S-Polarisation:

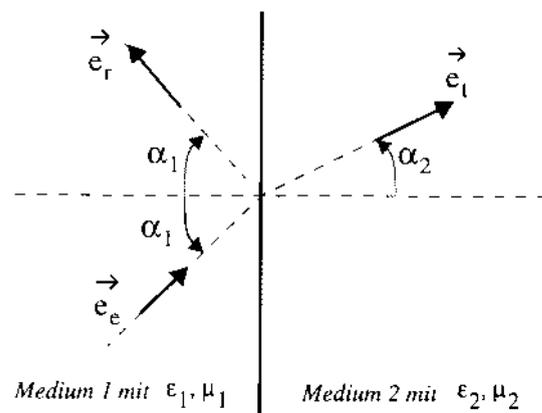
$$\frac{E_r}{E_e} = \frac{Z_2 \cos \alpha_1 - Z_1 \cos \alpha_2}{Z_2 \cos \alpha_1 + Z_1 \cos \alpha_2}$$

$$\frac{E_t}{E_e} = \frac{2Z_2 \cos \alpha_1}{Z_2 \cos \alpha_1 + Z_1 \cos \alpha_2}$$

b) für P-Polarisation:

$$\frac{E_r}{E_e} = \frac{Z_2 \cos \alpha_2 - Z_1 \cos \alpha_1}{Z_2 \cos \alpha_2 + Z_1 \cos \alpha_1}$$

$$\frac{E_t}{E_e} = \frac{2Z_2 \cos \alpha_1}{Z_1 \cos \alpha_1 + Z_2 \cos \alpha_2}$$



Brechzahl und Wellenwiderstand: $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$, $Z = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}}$.

Aufgabe 1:

1.1: Poissongleichung: $\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$

Sonderfall bei verschwindender Raumladung: $\rho = 0$:

Laplace-Gleichung: $\Delta \varphi = 0$

1.2: Gesucht: $E(x) = ?$

Klar: $\vec{E}(x) = E(x) \cdot \vec{e}_x$

Hinweis: $E(x \leq x_0) = 0$ & $E(x \geq x_1) = 0$

Poissongleichung: $\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$

hier: in 1-dimensionaler Näherung: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x) = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0 \epsilon_{si}}$ (I)

mit $\vec{E} = -\text{grad} \varphi$: hier in 1-dim. Näh.: $E(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x)$ (II)

(II) in (I): $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) \right) = -\frac{\partial}{\partial x} E(x) = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0 \epsilon_{si}}$
 $\Leftrightarrow -E(x)$

\Rightarrow $E(x) = \int \frac{\rho(x)}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} dx + C$

Fallunterscheidungen:

1. Bereich: $x_0 < x < x_1$: $\rho(x) = -q \cdot N_A$

$\Rightarrow E(x) = \frac{-q \cdot N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} \int dx + C = -\frac{q \cdot N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} \cdot x + C$

Grenzflächenbedingung: hier nur Normalkomponente

$D_{n1} - D_{n2} = \sigma = 0 \Rightarrow D_{n1} = D_{n2} \Rightarrow \epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}$

da $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_{si}$ gilt: $E_{n1} = E_{n2}$: STETIGKEIT!

$\Rightarrow E(x = x_0^-) = E(x = x_0^+) \Leftrightarrow -\frac{q \cdot N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} \cdot x_0 + C = 0$

$$\Rightarrow C = \frac{q \cdot N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{Si}} \cdot x_0$$

$$\Rightarrow \boxed{E(x) = -\frac{q \cdot N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{Si}} \cdot (x - x_0)}$$

2. Bereich: $\rho(x) = 0$ in $x_1 < x < x_2$

$$\Rightarrow E(x) = C$$

Auch hier: Grenzflächenbedingungen liefern: Stetigkeit von $E(x)$

$$\Rightarrow E(x = x_1^-) = E(x = x_1^+)$$

$$-\frac{q \cdot N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{Si}} \cdot (x_1 - x_0) = C$$

$$\Rightarrow \boxed{E(x) = -\frac{q \cdot N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{Si}} \cdot (x_1 - x_0)}$$

3. Bereich: $\rho(x) = +q \cdot N_D$ in $x_2 < x < x_3$

$$E(x) = \frac{q \cdot N_D}{\epsilon_0 \epsilon_{Si}} \cdot \int dx + c = \frac{q \cdot N_D}{\epsilon_0 \epsilon_{Si}} \cdot x + c$$

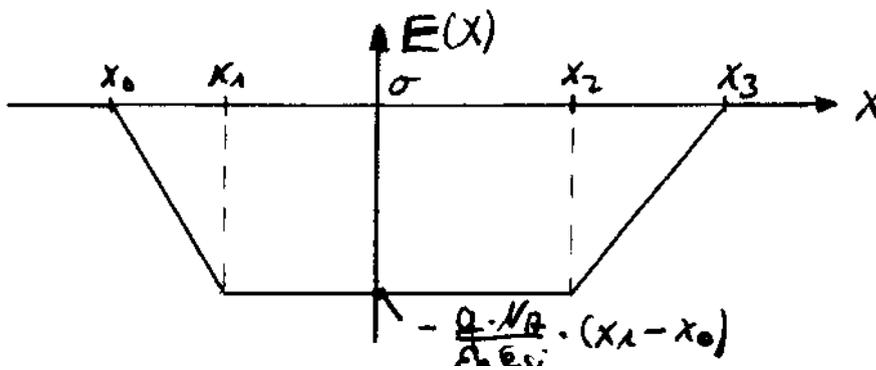
Stetigkeit von $E(x)$ liefert: $E(x = x_2^-) = E(x = x_2^+)$

$$\Leftrightarrow -\frac{q \cdot N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{Si}} \cdot (x_1 - x_0) = \frac{q \cdot N_D}{\epsilon_0 \epsilon_{Si}} \cdot x_2 + c$$

$$\Rightarrow C = -\frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_{Si}} \cdot (N_A(x_1 - x_0) + N_D \cdot x_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{E(x) = -\frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_{Si}} \cdot (N_A \cdot (x_1 - x_0) + N_D \cdot (x_2 - x))}$$

Skizze:



1.3: "Test" der Randbedingungen $E(x=x_3) \stackrel{!}{=} 0$ liefert:

$$E(x=x_3) = -\frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} \cdot \left\{ -N_D \cdot (x_3 - x_2) + N_A \cdot (x_1 - x_0) \right\}$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} \cdot \left\{ \underbrace{q \cdot N_D \cdot (x_3 - x_2)}_{\text{Ladungsmenge in n-Schicht}} - \underbrace{q \cdot N_A \cdot (x_1 - x_0)}_{\text{Ladungsmenge in p-Schicht}} \right\} = 0 \checkmark$$

bei identischer Querschnittsfläche A im Bauteil

Ladungsmenge in
n-Schicht

Ladungsmenge in
p-Schicht

Energieerhaltungssatz: Summe aller Ladungen zu jedem Zeitpunkt konstant, d.h. vor, während und nach dem Diffusionsvorgang!

1.4: gesucht: $\varphi(x) = ?$

aus 1.2: $E(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) = \dots$

$$\varphi(x) = -\int E(x) dx + C \quad \text{mit} \quad \varphi(x=x_0) = 0$$

1. Bereich: $x_0 < x < x_1$; $E(x) = -\frac{q \cdot N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} (x - x_0)$

$$\varphi(x) = +\frac{q \cdot N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} \int (x - x_0) dx + C = \frac{q \cdot N_A}{2 \epsilon_0 \epsilon_{si}} (x - x_0)^2 + C$$

Nebenbedingung: $\varphi(x=x_0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$$\varphi(x) = \frac{q \cdot N_A}{2 \epsilon_0 \epsilon_{si}} \cdot (x - x_0)^2$$

2. Bereich: $x_1 < x < x_2$; $E(x) = -\frac{q \cdot N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} (x_1 - x_0)$

$$\varphi(x) = +\frac{q \cdot N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} (x_1 - x_0) \cdot x + C$$

! STETIGKEIT DES POTENTIALS ! $\Rightarrow \varphi(x=x_1^-) = \varphi(x=x_1^+)$

$$\Rightarrow \frac{q \cdot N_A}{2 \epsilon_0 \epsilon_{si}} \cdot (x_1 - x_0)^2 \stackrel{!}{=} \frac{q \cdot N_A}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} \cdot (x_1 - x_0) \cdot x_1 + C$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow C &= \frac{q \cdot N_A}{2 \epsilon_0 \epsilon_{si}} \cdot (x_1^2 - 2x_1x_0 + x_0^2 - 2x_1^2 + 2x_1x_0) \\ &= \frac{q \cdot N_A}{2 \epsilon_0 \epsilon_{si}} \cdot (x_0^2 - x_1^2) = \frac{q \cdot N_A}{2 \epsilon_0 \epsilon_{si}} \cdot (x_0 + x_1) \cdot (x_0 - x_1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(x) = \frac{q \cdot N_A}{2 \epsilon_0 \epsilon_{si}} \cdot (x_1 - x_0) \cdot (2x - x_1 - x_0)}$$

3. Beide: $x_2 < x < x_3$; $E(x) = -\frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} \cdot (N_D(x_2 - x) + N_A(x_1 - x_0))$

$$\varphi(x) = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_{si}} \cdot \left\{ \frac{N_D}{2} (x - x_2)^2 + N_A \cdot (x_1 - x_0) \cdot x \right\} + C$$

! STETIGKEIT DES POTENTIALS: $\varphi(x = x_2^-) = \varphi(x = x_2^+)$

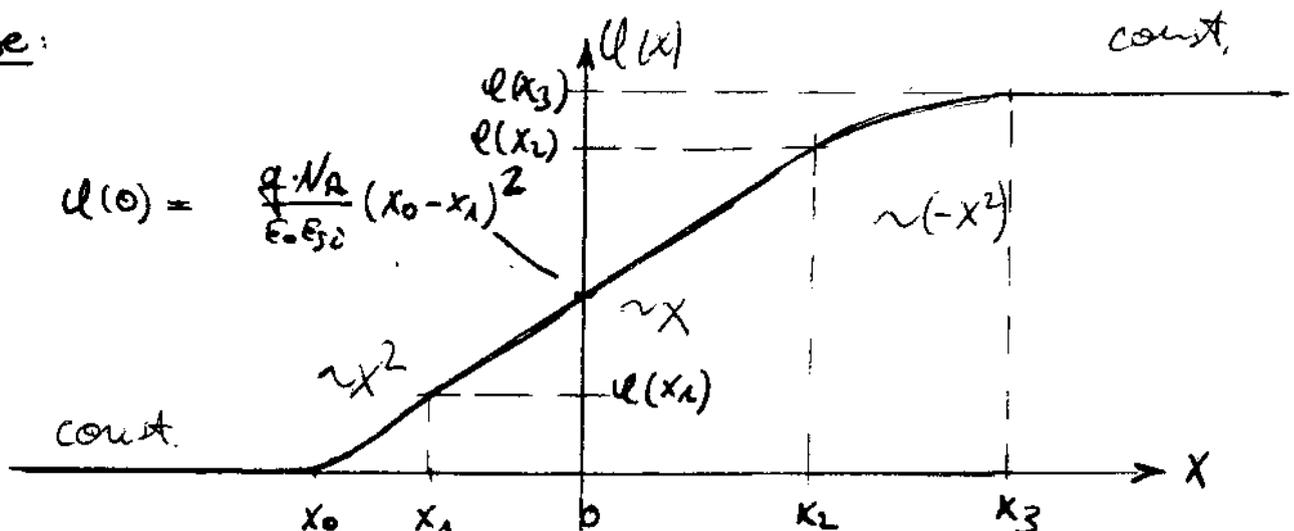
$$\Rightarrow \frac{q \cdot N_A}{2 \epsilon_0 \epsilon_{si}} \cdot (x_1 - x_0) \cdot (2x_2 - x_1 - x_0) \stackrel{!}{=} \frac{q}{2 \epsilon_0 \epsilon_{si}} \cdot (-N_D(x_2 - x_2)^2 + 2N_A(x_1 - x_0) \cdot x_2) + C$$

$$\Rightarrow C = \frac{q \cdot N_A}{2 \epsilon_0 \epsilon_{si}} \cdot \left\{ (x_1 - x_0) \cdot (2x_2 - x_1 - x_0 - 2x_2) \right\}$$

$$C = -\frac{q \cdot N_A}{2 \epsilon_0 \epsilon_{si}} \cdot (x_1 - x_0) \cdot (x_1 + x_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(x) = \frac{q}{2 \epsilon_0 \epsilon_{si}} \cdot \left\{ -N_D \cdot (x - x_2)^2 + N_A \cdot (x_1 - x_0) \cdot (2x - x_1 - x_0) \right\}}$$

Skizze:



1.8.1: Unterschied: zusätzliche i-Schicht, in der ein konstantes elektrisches Feld (vom Betrag her maximal) herrscht (bei PN-Diode nur in einem Punkt max. Feldstärke).

Vorteil: Durch Photonen in der i-Schicht ausgelöste Elektron-Lochpaare werden durch das dort starke E-Feld rasch (Beschleunigung $\sim E(x)$) abgesaugt und tragen zum äußeren Stromfluß bei.

Außerdem erhöht man durch die i-Schicht ebenfalls die "Bandbreite" innerhalb der eindringende Photonen absorbiert werden (Eindringtiefe hängt von λ ab).

1.8.2: $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$

$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \epsilon \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \varphi) = \rho$

$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} ; \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \Delta \quad \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right)$

$\Rightarrow \boxed{\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}} \quad \text{g. e. d.}$

Aufgabe 2:

2.1: Benutze Durchflutungsgesetz mit quasistationärer Näherung

$$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

1. Bereich: $\rho < R_i$: $\vec{j} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{H} = \vec{0}}$

2. Bereich: $R_i \leq \rho \leq R_a$: $\vec{j} = -\frac{I(t)}{A} \cdot \vec{e}_y$ mit $A = \pi \cdot (R_a^2 - R_i^2)$

$$\vec{j} = -\frac{I_0 \cdot \cos \omega t}{\pi (R_a^2 - R_i^2)} \cdot \vec{e}_y$$

wähle aus Symmetriegründen Zylinderkoordinaten
(Richtung! Hier entspricht die y-Achse der sonst üblichen
Symmetrieachse, der z-Achse)

$$H(\rho) \cdot 2\pi \rho = \int_{\rho'=R_i}^{\rho} \int_{\phi=0}^{2\pi} -\frac{I_0 \cdot \cos \omega t}{\pi (R_a^2 - R_i^2)} \cdot \langle \vec{e}_y | \vec{e}_\phi \rangle \cdot \rho' d\phi' d\rho'$$

$$= -\frac{I_0 \cos \omega t}{\pi (R_a^2 - R_i^2)} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \rho'^2 \Big|_{R_i}^{\rho}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H}(\rho) = -\frac{I(t)}{2\pi \rho} \cdot \frac{\rho^2 - R_i^2}{R_a^2 - R_i^2} \cdot \vec{e}_\phi(\phi)}$$

3. Bereich: $\rho > R_a$:

$$H(\rho) \cdot 2\pi \rho = -I(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H}(\rho) = -\frac{I(t)}{2\pi \rho} \cdot \vec{e}_\phi(\phi)}$$

2.2: Gesucht: $L'_i = L_i/l$; l : Leiterlänge

Dazu: Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2} \cdot L_i \cdot I^2 = \frac{1}{2} \iiint_V \langle \vec{B}_i | \vec{H} \rangle dV$

$$\frac{1}{2} \iiint_V \langle \vec{B}_i | \vec{H} \rangle dV = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r \cdot \int_{y'=0}^l \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{s=R_i}^{R_a} |\vec{H}(s)|^2 s ds d\phi dy$$

// natürlich ist $\vec{H}(s)$ für $R_i \leq s \leq R_a$ zu verwenden!

$$= \frac{\mu_0 \mu_r \cdot I^2(t)}{4\pi^2 \cdot (R_a^2 - R_i^2)^2} \int_{y'=0}^l \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{s=R_i}^{R_a} \frac{(s^2 - R_i^2)^2}{s^2} \cdot s ds d\phi dy$$

$$= \frac{\mu_0 \mu_r \cdot I^2(t)}{4\pi^2 (R_a^2 - R_i^2)^2} \cdot 2\pi \cdot l \cdot \int_{s=R_i}^{R_a} (s^3 - 2sR_i^2 + \frac{R_i^4}{s}) ds$$

$$= \frac{\mu_0 \mu_r I^2(t) \cdot l}{4\pi^2 (R_a^2 - R_i^2)^2} \cdot \left(\frac{R_a^4 - R_i^4}{4} - R_i^2 R_a^2 + R_i^4 + R_i^4 \ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right) \right)$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{1}{2} L_i \cdot I^2(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{L'_i = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi (R_a^2 - R_i^2)^2} \cdot \left(\frac{R_a^4 - R_i^4}{4} - R_i^2 R_a^2 + R_i^4 (1 + \ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)) \right)}$$

2.3: Da die Leiterschleife in der x-y-Ebene ($z=0$) liegt, empfiehlt es sich hier das Magnetfeld \vec{H} in kartesischen Koordinaten anzugeben. Koordinatensystem: siehe Bild 2.1

$$\left. \begin{array}{l} \text{d.h. } -\vec{e}_\phi(\phi) \frac{\omega}{x-y} + \vec{e}_z \\ s \quad \text{Ebene} \quad x \end{array} \right\} \vec{H}(x) = \frac{I(t)}{2\pi x} \cdot \vec{e}_z$$

$$\phi = \int_A \langle \vec{B} | d\vec{A} \rangle = \mu_0 \int_A \vec{H} d\vec{A} = \mu_0 \int_{x=x_0}^{x_0+a} \int_{y=y_0}^{y_0+a} \left| \frac{I(t)}{2\pi x} \langle \vec{e}_z | \vec{e}_z \rangle dy dx \right.$$

$$= \frac{I(t) \cdot \mu_0}{2\pi} \cdot \ln x \Big|_{x_0}^{x_0+a} \cdot y \Big|_{y_0}^{y_0+a} = \frac{I(t) \cdot \mu_0}{2\pi} \cdot \ln \left(\frac{x_0+a}{x_0} \right) \cdot (y_0+a - y_0)$$

$$\boxed{\phi(t) = \frac{I(t) \cdot \mu_0 \cdot a}{2\pi} \cdot \ln \left(\frac{x_0+a}{x_0} \right)}$$

Linkschraubensystem: $u_i = + \frac{d\phi}{dt}$

$$u_i = \frac{\mu_0 \cdot a}{2\pi} \cdot \ln \left(\frac{x_0+a}{x_0} \right) \cdot \dot{I}(t); \quad \dot{I}(t) = -I_0 \cdot \omega \cdot \sin \omega t$$

$$\boxed{u_i = - \frac{I_0 \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot a}{2\pi} \cdot \sin(\omega t) \cdot \ln \left(\frac{x_0+a}{x_0} \right)}$$

2.4: analog zu 2.3, nur aber mit geänderten Integrationsgrenzen!

$$\phi(t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \cdot \ln x \Big|_{x_0+v_x \cdot t}^{x_0+v_x \cdot t+a} \cdot y \Big|_{y_0+v_y \cdot t}^{y_0+v_y \cdot t+a}$$

$$\phi(t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \cdot \ln \left(\frac{x_0+v_x \cdot t+a}{x_0+v_x \cdot t} \right) \cdot a$$

$$\Rightarrow u_i = + \frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0 \cdot a}{2\pi} \cdot \left\{ \dot{I}(t) \cdot \ln \left(\frac{x_0+v_x \cdot t+a}{x_0+v_x \cdot t} \right) + I(t) \cdot \frac{d}{dt} \left(\ln \left(\frac{x_0+v_x \cdot t+a}{x_0+v_x \cdot t} \right) \right) \right\}$$

$$\boxed{u_i = - \frac{\mu_0 \cdot a \cdot I_0}{2\pi} \cdot \left\{ \omega \sin \omega t \cdot \ln \left(\frac{x_0+v_x \cdot t+a}{x_0+v_x \cdot t} \right) + \cos \omega t \cdot \frac{v_x \cdot a}{(x_0+v_x \cdot t) \cdot (x_0+v_x \cdot t+a)} \right\}}$$

$$\underline{2.8.1}: \phi(t) = \phi_{2.4}(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$$

hier: $\cos(\omega_0 t)$ nicht $\sin(\omega_0 t)$, da Anfangszustand der Schleife maximaler Fluss ϕ besitzt.

$$u_i = + \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt} \phi_{2.4}(t) \cdot \cos(\omega_0 t) - \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot \phi_{2.4}(t)$$

$$u_i = u_{i2.4}(t) \cdot \cos(\omega_0 t) - \omega_0 \sin(\omega_0 t) \cdot \phi_{2.4}(t)$$

Aufgabe 3:

3.1: $\underline{E}^{\rightarrow}(x, y, z, t) = E_0 \cdot \underline{e}_x \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-jk \cdot z}$

$\in \mathbb{R}$, da $\varphi_0 = 0$ lin. pol. in x-Richtung harmonisch Ausbreitung in pos z-Richtung

3.2: Entspiegelung ohne eine einzige „Entspiegelungsschicht“ würde bedeuten, daß an der Grenzschicht zwischen den beiden Medien keine Reflexion zustande kommen dürfte. Dies kann bei beliebigem Einfallswinkel nur für folgende triviale Fälle erreicht werden:

// 1.) es existiert keine einfallende Welle (rein mathematisch) //

2.) Reflexionskoeffizient $\underline{r} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow z_1 = z_2 \Rightarrow n_1 = n_2$, d.h. nur für identische Medien, also keine wirkliche Grenzfläche

\Rightarrow allgemein ist die Entspiegelungsschicht notwendig zur Entspiegelung!

// Spezialfall: siehe 3.1 //

3.3: Für folgendes betrachten wir nur die komplexe Amplitude ohne den $e^{j\omega t}$ -Anteil. In dem gebieten überlagern sich allgemein hin- und rücklaufende Wellenanteile zur Gesamtwelle.

Für den \underline{H} -Anteil der Wellen gilt:

$\underline{H}^{\rightarrow} = \frac{1}{k} \cdot \underline{e}_a \times \underline{E}^{\rightarrow}$

$\underline{H}^{\rightarrow} = |\underline{H}^{\rightarrow}| \cdot \underline{e}_y$

↑ ↑ ↗ ↘
 eine x-Richtung Ausbreitungsrichtung (hier z-Richtung)

Gebiet 1:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{1e} + \vec{E}_{1v} = \vec{e}_x \left\{ E_{1e} \cdot e^{-jk_1 z} + E_{1v} \cdot e^{+jk_1 z} \right\}$$

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_{1e} + \vec{H}_{1v} = \vec{e}_y \left\{ \frac{E_{1e}}{z_1} \cdot e^{-jk_1 z} - \frac{E_{1v}}{z_1} \cdot e^{+jk_1 z} \right\}$$

$$z_1 = \frac{z_0}{\mu_1}; \quad k_1 = k_0 \cdot \mu_1$$

Gebiet 2:

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{2e} + \vec{E}_{2v} = \vec{e}_x \left\{ E_{2e} \cdot e^{-jk_2 z} + E_{2v} \cdot e^{+jk_2 z} \right\}$$

$$\vec{H}_2 = \vec{H}_{2e} + \vec{H}_{2v} = \vec{e}_y \left\{ \frac{E_{2e}}{z_2} \cdot e^{-jk_2 z} - \frac{E_{2v}}{z_2} \cdot e^{+jk_2 z} \right\}$$

$$z_2 = \frac{z_0}{\mu_2}; \quad k_2 = k_0 \cdot \mu_2$$

Gebiet 3:

$$\vec{E}_3 = \vec{E}_{3e} = \vec{e}_x \cdot E_{3e} \cdot e^{-jk_3 z}$$

$$\vec{H}_3 = \vec{H}_{3e} = \vec{e}_y \cdot \frac{E_{3e}}{z_3} \cdot e^{-jk_3 z}$$

$$z_3 = \frac{z_0}{\mu_3}; \quad k_3 = k_0 \cdot \mu_3$$

3.4: Es interessieren nur die tangentialen Feldkomponenten
d.h. $E_{\text{tan}1} = E_{\text{tan}2}$ & $H_{\text{tan}1} = H_{\text{tan}2}$
und das einmal @ $z=0$ und einmal @ $z=d$

Grenzfläche Gebiet 1 \rightarrow Gebiet 2 ($z=0$)

$$\vec{E}_{1e} + \vec{E}_{1v} = \vec{E}_{2e} + \vec{E}_{2v} \quad (\text{I})$$

$$\vec{H}_{1e} + \vec{H}_{1v} = \vec{H}_{2e} + \vec{H}_{2v}$$

$$\left(\frac{1}{z_1} \vec{E}_{1e} - \frac{1}{z_1} \vec{E}_{1v} = \frac{1}{z_2} \vec{E}_{2e} - \frac{1}{z_2} \vec{E}_{2v} \right) \quad (\text{II}) \quad | \cdot z_2$$

keine rücklaufende Welle mehr!

Grenzfläche Gebiet 2 \rightarrow Gebiet 3 ($z=d$)

$$\underline{E}_{2e} \cdot e^{-jk_2 d} + \underline{E}_{2r} \cdot e^{+jk_2 d} = \underline{E}_{3e} \cdot e^{-jk_3 d} \quad (\text{III}) \quad | \cdot e^{jk_2 d}$$

$$\underline{H}_{2e} \cdot e^{-jk_2 d} - \underline{H}_{2r} \cdot e^{+jk_2 d} = \underline{H}_{3e} \cdot e^{-jk_3 d}$$

$$\left(\cong \frac{\underline{E}_{2e}}{z_2} \cdot e^{-jk_2 d} - \frac{\underline{E}_{2r}}{z_2} \cdot e^{+jk_2 d} = \frac{\underline{E}_{3e}}{z_3} \cdot e^{-jk_3 d} \right) \quad (\text{IV}) \quad | \cdot e^{jk_2 d} \cdot z_3$$

$$(I') \quad \underline{E}_{1e} = \underline{E}_{2e} + \underline{E}_{2r}$$

$$(II') \quad \frac{z_2}{z_1} \underline{E}_{1e} = \underline{E}_{2e} - \underline{E}_{2r}$$

$$(III') \quad \underline{E}_{2e} + \underline{E}_{2r} \cdot e^{j2k_2 d} = \underline{E}_{3e} \cdot e^{-j(k_3 - k_2)d}$$

$$(IV') \quad \underline{E}_{2e} \cdot \frac{z_3}{z_2} - \underline{E}_{2r} \cdot \frac{z_3}{z_2} e^{j2k_2 d} = \underline{E}_{3e} e^{-j(k_3 - k_2)d}$$

4 Gleichungen mit 4 Unbekannten \Rightarrow eindeutig lösbar!

$$(I') + (II') = (I'') : \underline{E}_{1e} \left(1 + \frac{z_2}{z_1} \right) = 2 \underline{E}_{2e}$$

$$(I') - (II') = (II'') : \underline{E}_{1e} \left(1 - \frac{z_2}{z_1} \right) = 2 \underline{E}_{2r}$$

$$(-II') = (IV') \rightarrow (III'') : 2 \underline{E}_{2e} + 2 \underline{E}_{2r} \cdot e^{j2k_2 d} = 2 \underline{E}_{2e} \frac{z_3}{z_2} - 2 \underline{E}_{2r} \frac{z_3}{z_2} e^{j2k_2 d}$$

da $k_2 \cdot d \in \mathbb{R}$ ($k_2 \in \mathbb{R} \wedge d \in \mathbb{R}$) gilt: $|\exp(j2k_2 d)| = 1$

\Rightarrow Setze $\alpha = \exp(j2k_2 d)$ mit $|\alpha| = 1$

$$\text{in } (III'') : 2 \underline{E}_{2e} \cdot \left(1 - \frac{z_3}{z_2} \right) + 2 \underline{E}_{2r} \cdot \left(1 + \frac{z_3}{z_2} \right) \cdot \alpha = 0$$

\Rightarrow mit (I'') und (II'') :

$$\underline{E}_{1e} \left\{ \left(1 + \frac{z_2}{z_1} \right) \cdot \left(1 - \frac{z_3}{z_2} \right) + \alpha \cdot \left(1 - \frac{z_2}{z_1} \right) \cdot \left(1 + \frac{z_3}{z_2} \right) \right\} = 0$$

triviale Fall (siehe 3.2) $\underline{E}_{1e} = 0 \stackrel{!}{=} \text{keine einfallende Welle!}$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{z_3}{z_2}\right) + d \cdot \left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{z_3}{z_2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{z_1 z_2 + z_2^2 - z_1 z_3 - z_2 z_3}_{\in \mathbb{R}} = -d \cdot \underbrace{(z_1 z_2 - z_2^2 + z_1 z_3 - z_2 z_3)}_{\in \mathbb{R}}$$

\Downarrow
 $d \in \mathbb{R} \Rightarrow d = \pm 1$

1. Fall: $d = +1$: $z_1 z_2 + z_2^2 - z_1 z_3 - z_2 z_3 = -z_1 z_2 + z_2^2 - z_1 z_3 + z_2 z_3$

$$\Leftrightarrow 2z_1 z_2 - 2z_1 z_3 = 0 \Leftrightarrow \underline{z_1 = z_3}$$

laut Voraussetzungen gilt jedoch: $z_1 \neq z_3$

2. Fall: $d = -1$: $z_1 z_2 + z_2^2 - z_1 z_3 - z_2 z_3 = z_1 z_2 - z_2^2 + z_1 z_3 - z_2 z_3$

$$\Leftrightarrow 2z_2^2 = 2z_1 z_3 \Leftrightarrow z_2 = \sqrt{z_1 z_3} \quad ; \quad \underline{z > 0}$$

$z_2 = \sqrt{z_1 z_3}$

 $\hat{=}$ geometrischem Mittel!

3.5: aus 3.4: $e^{j2k_2 d} = -1$, d.h. das Argument der e-Fkt muß ein ungeradzahliges Vielfaches von π sein:

$$2k_2 d = (2n-1) \cdot \pi \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{(2n-1) \cdot \pi}{2k_2} \quad ; \quad k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$$

$d = \frac{(2n-1) \cdot \lambda_2}{4} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$

3.8.1: Sonderfall: Totaltransmission

Voraussetzungen:

- 1.) p-polarisiertes Licht (einfallende Welle)
- 2.) Einfall unter „Brewster-Winkel“

3.8.2: siehe Skript, analog zur Herleitung für $\vec{E}^i(\vec{r}, t)$

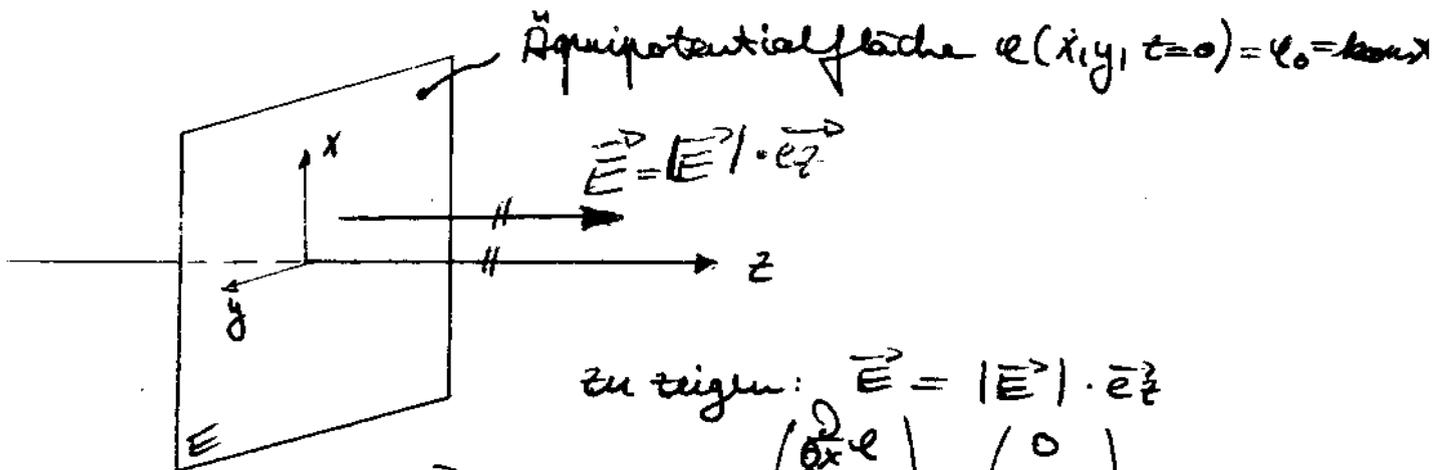
Aufgabe 4:

4.1: Eine elektrische Feldlinie ist eine mögliche Bahn eines positiv geladenen Probekörpers im elektrischen Feld.

Eigenschaften:

- Feldlinien schneiden sich nie!
- Feldlinien beginnen auf pos. Ladungen (Quellen) und enden auf negativen Ladungen (Senken)
- Feldlinien stehen stets orthogonal zu Äquipotentialflächen

4.2: Beispiel: pos. geladene Ebene E mit homogener verteilter Ladung ($\sigma = \frac{+Q_0}{A} = \text{konst.}$)



zu zeigen: $\vec{E} = |\vec{E}| \cdot \vec{e}_z$

Dann: $\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix}$ weil in diese Richtung φ ändert sich $\neq 0$

$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial \varphi(x,y,t)}{\partial z} \cdot \vec{e}_z$ q.e.d.

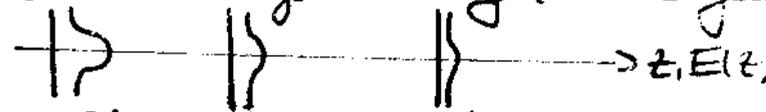
- $\sigma > 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial z} < 0 \Rightarrow \vec{E} = |\vec{E}| \cdot \vec{e}_z$ von Platte weg in pos. Richtung z
- $\sigma < 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial z} > 0 \Rightarrow \vec{E} = |\vec{E}| \cdot (-\vec{e}_z)$ zu Platte hin in neg. z -Richtung

4.3: Quasistationäre Näherung:

Bei der quasistat. Näherung approximiert man die Verschiebungsstromdichte \vec{D} als quasi konstant. Somit ist deren Ableitung nach der Zeit identisch Null: $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{0}$. Das Durchflutungsgesetz ergibt sich demnach

zu $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$. Dies ist erlaubt für den Fall, daß sich die vorhandenen Ströme zeitlich nur sehr langsam ändern.

Mit der quasist. Näherung lassen sich sehr wohl Induktionsvorgänge, jedoch keine Entstehung und Ausbreitung von EM Wellen beschreiben (siehe auch Skript).

- 4.4.1 a) im Film: trigonometrische Fktn (\sin, \cos)
 in der Deckschicht / Substrat: abklingende Exponentialfkt.
- b) Amplitudenverlauf behält seine Form/Aussehen und Schnittpunkt in Ausbreitungsrichtung (im allgemeinen exponentiell)
- 
- c) es sind die beiden Phasensprünge ϕ_A und ϕ_B an den Film-Deckschicht- und Film-Substrat-Grenzen zu beachten!

- 4.5: a) Es wird eine skalare Wellengleichung entwickelt, um das eigentlich vektorielle Problem zu beschreiben
- b) Der Separationsansatz liefert die Hoffnung, daß die radialen und azimutalen Feldfunktionen getrennt voneinander behandelt werden können.

4.8.1: $\vec{k} = \vec{k}_R + j\vec{k}_I$

Betrachte Phasenterm: $e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = e^{-j\vec{k}_R \cdot \vec{r}} \cdot e^{\vec{k}_I \cdot \vec{r}}$
 $e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = \underbrace{e^{-j\vec{k}_R \cdot \vec{r}}}_{\text{wie üblich, beschreibt die örtliche Phase}} \cdot \underbrace{e^{\vec{k}_I \cdot \vec{r}}}_{\text{beeinflusst den Betrag der i.a. Amplitude}}$

wie üblich, beschreibt die örtliche Phase $| | = 1$

beeinflusst den Betrag der i.a. Amplitude $| | \neq 1$

\Rightarrow man kann mit \vec{k}_I eine Dämpfung bzw. Verstärkung der sich ausbreitenden Welle beschreiben.

$k_I < 0$: Dämpfung $k_I > 0$: Verstärkung

4.7.2: $\psi(r, t) = \frac{A}{r} \cdot e^{j\omega t \pm jk \cdot r}$

A: Quellstärke = konst.

 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$: aktuelle Radius/AbstandFrage nach der Wellenform:Betrachte Orte konstanter Phase für einen festen Zeitpunkt $t = t_0 = c$

$$\Rightarrow e^{j\omega t} \cdot e^{\pm jk \cdot r} \Big|_{t=t_0=c} \stackrel{!}{=} c = \text{konst.}$$

$$\Rightarrow e^{\pm jk \cdot r} = c \quad | \ln$$

$$\Rightarrow \pm jk \cdot r = c$$

$$\Rightarrow k \cdot r = \text{konstant} \Rightarrow \text{mit } k = \text{konst.} \Rightarrow r = \text{konst.}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{konst.} \stackrel{!}{=} \text{Kugelgleichung}$$

Alle Orte haben gleichen Abstand von einem zentralen Ort.

⇐ KUGELWELLE !

Diplomhauptprüfung (Herbst 2003)

Theoretische Elektrotechnik III

1. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
2. Außer Schreib- und Zeichenmaterial sind keine Hilfsmittel zugelassen (auch kein Taschenrechner)!
3. Die jeweils maximal erreichbare Punktzahl pro Teilaufgabe ist in Klammern am Ende jeder Teilaufgabe angegeben.
4. Es sind alle Aufgaben zu bearbeiten! Die Zusatzaufgaben sind optional.
5. Verwenden Sie ausschließlich die Ihnen ausgeteilten Doppelbögen; nur diese werden bewertet. Trennen Sie die Doppelbögen nicht.
6. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Doppelbogen!
7. Schreiben Sie auf jeden Doppelbogen Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Aufgabe (inklusive der Teilaufgabe), die Sie bearbeiten!
8. Zeigen Sie den gewählten Lösungsweg auf. Geben Sie insbesondere Zwischenergebnisse und Begründungen an. Nur eindeutige Aussagen können bewertet werden!
9. Einige häufig gebrauchte Formeln finden Sie im Anhang.
10. VIEL ERFOLG!!!

Aufgabe 1: Kapazitätsberechnungen

(13 Punkte + 4 Zusatzpunkte)

Bild 1.1 zeigt das **Schnittbild** eines azimutalen Ausschnitts über den Winkel $\alpha > 0$ des Zylinderkondensators aus Bild 1.2. Beide Kondensatoren laufen in axialer Richtung parallel zur z-Achse und weisen die **Länge L** auf. Die beiden unendlich gut leitenden dünnen Elektroden der Zylinderkondensatoren befinden sich jeweils auf den Kreisbögen mit den Radien R_i und R_a , mit $R_i < R_a$. Zwischen den beiden Elektroden befindet sich ein **ideales Dielektrikum** der relativen Dielektrizitätszahl $\epsilon_r = \text{konst.}$.

Dabei sollen Randeffekte im folgenden vernachlässigt werden!

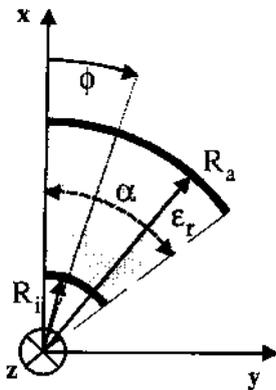


Bild 1.1: Schnittbild eines azimutalen Ausschnitts eines Zylinderkondensators der Länge L

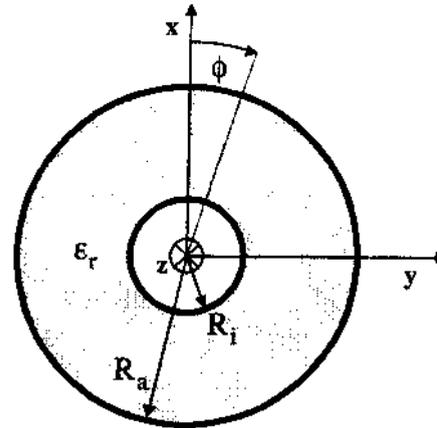


Bild 1.2: Schnittbild eines Zylinderkondensators der Länge L

- 1.1 Berechnen Sie die Kapazität C_1 des **Zylinderkondensator-Ausschnitts** nach Bild 1.1 (als Funktion der Geometrie- und Material-Parameter). (4 Punkte)
- 1.2 Berechnen Sie die Kapazität C_2 des **Zylinderkondensators** nach Bild 1.2 (als Funktion der Geometrie- und Material-Parameter). (1 Punkt)

Nun seien die beiden Elektroden des Ausschnitts nach Bild 1.1 nicht radial, sondern tangential angebracht, wie in Bild 1.3 dargestellt. Die übrigen Geometrie- und Material-Parameter bleiben unverändert.

- 1.3 Berechnen Sie die Kapazität C_3 des **Zylinderkondensator-Ausschnitts** mit den **geänderten Elektroden** nach Bild 1.3. (5 Punkte)

Hinweis: Es ist hilfreich zuerst Struktur und Verlauf des E-Feldes und der Äquipotentialflächen zu klären.

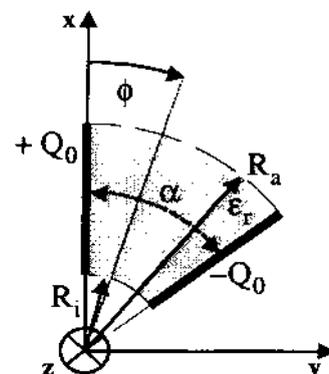


Bild 1.3: Schnittbild aus Bild 1.1 mit veränderter Lage der Elektroden

Die linke Elektrode (bei $\phi = 0$) in Bild 1.3 sei nun auf Q_0 und die rechte Elektrode (bei $\phi = \alpha$) auf $-Q_0$ aufgeladen.

- 1.4 Bestimmen Sie das **elektrostatische Potential** $\phi(\vec{r})$ zwischen den Elektroden nach Bild 1.3, wenn das Potential der linken Elektrode (bei $\phi = 0$) identisch Null ist. Skizzieren Sie den Verlauf der Feldlinien und Äquipotentialflächen. *(3 Punkte)*

Zusatzaufgaben:

- 1.Z.1 Leiten Sie ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen die sogenannte Poisson-Gleichung her. Unter bestimmten Bedingungen wird die Poisson-Gleichung auch Laplace-Gleichung genannt. Welche Bedingungen sind dies? *(2 Punkte)*
- 1.Z.2 Wie lautet das Coulombsche Gesetz in vektorieller Form und was besagt es? *(2 Punkte)*

2. Aufgabe: Feldstärke und Kräfte in Magnetfeldern von Stromfäden und Streifenleitern (14 Punkte + 3 Zusatzpunkte)

Gegeben sei ein endlich langer Stromfaden nach Bild 2.1 mit der Länge $2b$, der parallel zur y -Achse verläuft und durch den Punkt $P_0(a, 0, 0)$ tritt. Der Stromfaden wird von dem zeitabhängigen Strom $i(t) = I_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$ in positiver y -Richtung durchflossen.

Im folgenden wird immer die **quasistationäre Näherung** vorausgesetzt!

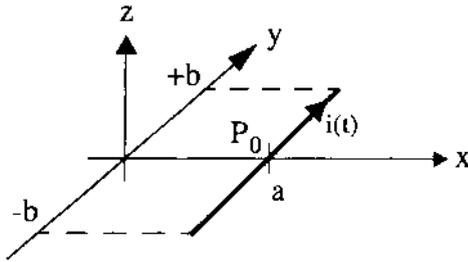


Bild 2.1: Endlich langer Stromfaden

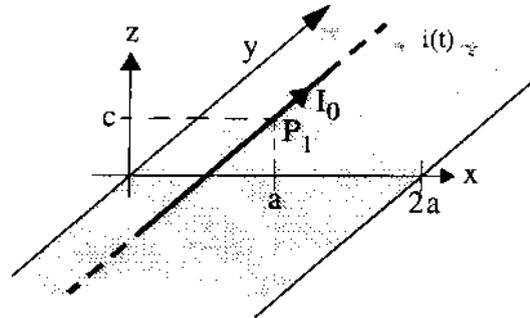


Bild 2.2: Unendlich langer Streifenleiter und Stromfaden

- 2.1 Erläutern Sie die Voraussetzungen und den Begriff der quasistationären Näherung. (1 Punkt)
- 2.2 Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{H}_1(\vec{r})$ welches entsteht, wenn der endlich lange Stromfaden gemäß Bild 2.1 vom Strom $i(t) = I_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$ durchflossen wird. (4 Punkte)
- 2.3 Berechnen Sie unter Zuhilfenahme des Ergebnisses aus 2.2 das Magnetfeld $\vec{H}_\infty(\vec{r})$ des Stromfadens für $b \rightarrow \infty$. (2 Punkte)

In Bild 2.2 ist sowohl ein **unendlich langer** Stromfaden als auch ein **unendlich langer** Streifenleiter der Breite $2a$ gegeben. Der Stromfaden verläuft wiederum parallel zur y -Achse, jedoch diesmal durch den Punkt $P_1(a, 0, c)$ und führt einen Gleichstrom der Größe I_0 in positive y -Richtung. Der vom Streifenleiter geführte Strom $i(t) = I_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$ verteile sich auf dessen Breite homogen und fließe ebenfalls in positive y -Richtung.

Auch hier wird wieder die **quasistationäre Näherung** vorausgesetzt!

- 2.4 Berechnen Sie den **Kraftbelagsvektor** $\vec{F}' = \frac{\vec{F}}{L}$ (Kraft pro Länge), der auf den Stromfaden in Bild 2.2 wirkenden Kraft \vec{F} . Dabei soll angenommen werden, daß sowohl der Stromfaden als auch der Streifenleiter für alle Zeiten ortsfest sind. (6 Punkte)
- 2.5 Bestimmen Sie den **Kraftbelagsvektor** \vec{F}'_∞ aus Aufgabenteil 2.4 für einen unendlich breiten Streifenleiter. (1 Punkt)

Zusatzaufgabe:

- 2.Z.1 Berechnen Sie unter Verwendung eines **alternativen** Lösungswegs das Magnetfeld von Teilaufgabe 2.3 in **kartesischen Koordinaten**. (3 Punkte)

Aufgabe 3: TEM-Wellen

(14 Punkte + 8 Zusatzpunkte)

Eine ebene, harmonische, zirkular polarisierte TEM-Welle mit der Kreisfrequenz ω breite sich in einem homogenen, verlustfreien Dielektrikum aus. Die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ist im Raumpunkt \vec{r} zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = \frac{T}{4}$ (T entspricht der Periodendauer) gegeben durch

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r} = \vec{0}, t = 0) &= -3 \cdot E_0 \cdot \vec{e}_y + 4 \cdot E_0 \cdot \vec{e}_z \quad \text{und} \\ \vec{E}(\vec{r} = \vec{0}, t = \frac{T}{4}) &= 5 \cdot E_0 \cdot \vec{e}_x \quad \text{mit } E_0 = \text{konst.}\end{aligned}$$

- 3.1 Was versteht man unter einer zirkular polarisierten Welle? (1 Punkt)
- 3.2 Berechnen Sie den Einheitsvektor $\vec{e}_a = e_{a,x} \cdot \vec{e}_x + e_{a,y} \cdot \vec{e}_y + e_{a,z} \cdot \vec{e}_z$ in dessen Richtung sich die Welle ausbreitet. Begründen Sie Ihre Rechenschritte! (3 Punkte)

Sollte Aufgabenteil 3.2 nicht gelöst werden können, so kann der dort gesuchte Einheitsvektor für die weiteren Rechnungen alternativ zu $\vec{e}_a = 0,8 \cdot \vec{e}_y + 0,6 \cdot \vec{e}_z$ angenommen werden.

Für die y-Komponente k_y des Wellenvektors $\vec{k} = k_x \cdot \vec{e}_x + k_y \cdot \vec{e}_y + k_z \cdot \vec{e}_z$ der oben beschriebenen TEM-Welle gelte außerdem $k_y = k_0 \cdot \frac{8}{5}$ mit $k_0 =$ Wellenzahl im freien Raum.

- 3.3 Geben Sie die relative Dielektrizitätszahl ϵ_r des Dielektrikums an, für welche die oben angegebene Beziehung zwischen k_y und k_0 erfüllt wird. Berechnen Sie damit nun explizit den Wellenvektor \vec{k} der TEM-Welle. (3 Punkte)

Die komplexwertigen Feldgrößen $\vec{E}(\vec{r})$ und $\vec{H}(\vec{r})$ seien definiert durch:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re\{\vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}\} \quad \text{und} \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \Re\{\vec{H}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}\},$$

wobei der Operator $\Re\{\vec{a}\}$ den Realteil \vec{a} der komplexen Größe \vec{a} liefert.

- 3.4 Berechnen Sie die komplexe elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$, als Funktion von E_0 , \vec{k} und \vec{r} . (4 Punkte)
- 3.5 Bestimmen Sie nun hieraus die komplexe magnetische Feldstärke $\vec{H}(\vec{r})$, als Funktion von E_0 , \vec{k} , \vec{r} und Z_0 , dem Feldwellenwiderstand im Vakuum. (3 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 3.Z.1 Berechnen Sie die Wirkleistung \bar{P}_w , die im zeitlichen Mittel in Ausbreitungsrichtung durch eine dazu senkrechte Einheitsfläche transportiert wird. (4 Punkte)
Hinweis: Es ist vorteilhaft zuerst den zeitlichen Mittelwert des Poyntingvektors der TEM-Welle zu berechnen!

- 3.Z.2 Leiten Sie ausgehend von den allgemeinen Maxwell'schen Gleichungen und unter Verwendung des Graßmann'schen Entwicklungssatzes die Helmholtzgleichung (zeitfreie Wellengleichung) für die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r}, j\omega)$ her. Gehen Sie von einem homogenen, isotropen und idealen Dielektrium der Brechzahl n aus. (4 Punkte)

Aufgabe 4: Elektromagnetische Wellen (13 Punkte + 4 Zusatzpunkte)

- 4.1 Geben Sie die allgemeine, vollvektorielle, komplexe Form des H-Feldes einer harmonischen elektromagnetischen Welle in einem Dielektrikum an und erläutern Sie die verwendeten Terme **ausführlich!** (3 Punkte)
- 4.2 Geben Sie die 1. Maxwellsche Gleichung (Durchflutungsgesetz) sowohl in **integraler** als auch in **differentieller** Form an und zeigen Sie deren Äquivalenz. (2 Punkte)
- 4.3 Welches Kriterium muß erfüllt sein, damit verteilte elektromagnetische Problemstellungen mit dem Ansatz konzentrierter netzwerktheoretischer Betrachtungen gelöst werden können? (1 Punkt)
- 4.4 Wie lauten die Maxwellschen Gleichungen in einem idealen, homogenen und raumladungsfreien Dielektrikum? Von welchem Typ sind die beiden ersten Maxwellschen Gleichungen? Welchem Typ entspricht die daraus entwickelbare Wellengleichung? (3 Punkte)
- 4.5 Erläutern Sie die Begriffe „Totaltransmission“ und „Totalreflexion“ von elektromagnetischen Wellen an Grenzschichten. Nennen Sie Voraussetzungen und Anwendungsgebiete der beiden Phänomene. (4 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 4.Z.1 Welchen Sinn könnte ein komplexwertiger Wellenvektor $\vec{k} = \vec{k}_R + j \cdot \vec{k}_I$ machen? Diskutieren Sie am Beispiel einer einfachen TEM-Welle. (2 Punkte)
- 4.Z.2 Welche **physikalische Bedeutung** hat die Ausbreitungskonstante β bei einem ebenen Schichtwellenleiter? (2 Punkte)

Formelsammlung

1. Zylinderkoordinaten:

$$\vec{e}_\rho(\phi) = \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\phi \cdot \vec{e}_y$$

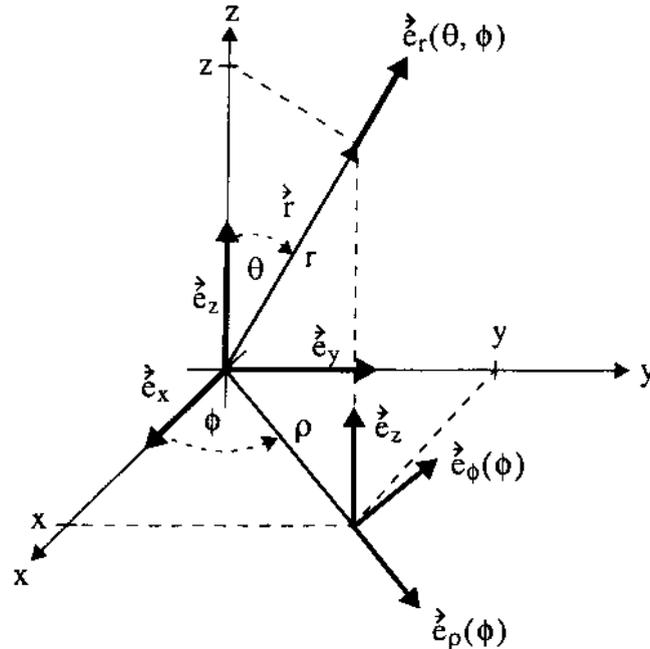
$$\vec{e}_\phi(\phi) = -\sin\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\phi \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{r}(\rho, \phi, z) = \rho \cdot \vec{e}_\rho(\phi) + z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [x\vec{e}_x + y\vec{e}_y]$$

$$\vec{e}_\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y]$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$



2. Kugelkoordinaten:

$$\vec{e}_r(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{e}_r(\theta, \phi) = \sin\theta \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\theta \sin\phi \cdot \vec{e}_y + \cos\theta \cdot \vec{e}_z$$

3. Oberflächen- und Volumenelemente:

$$d\vec{A}(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \cdot \vec{e}_r \quad dV(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$

$$d\vec{A}(\rho, \phi, z) = \rho d\phi dz \cdot \vec{e}_\rho \quad dV(\rho, \phi, z) = \rho d\rho d\phi dz$$

4. Divergenz und Rotation in Zylinderkoordinaten

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \{\rho A_\rho\} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \{A_\phi\} + \frac{\partial}{\partial z} \{A_z\}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{e}_\rho \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right] + \vec{e}_\phi \cdot \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] + \vec{e}_z \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right]$$

5. Laplace-Operator und Gradient in Zylinderkoordinaten

$$\Delta U(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \cdot \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \phi} \cdot \vec{e}_\phi + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \vec{e}_z$$

6. Laplace-Operator und Gradient in Kugelkoordinaten

$$\Delta\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \right]$$

$$\text{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \cdot \hat{e}_\phi$$

7. Vektoroperationen:

$$\hat{a} \times (\hat{b} \times \hat{c}) = (\hat{a} \cdot \hat{c}) \hat{b} - (\hat{a} \cdot \hat{b}) \hat{c} \quad \text{mit } \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbb{R}^3$$

8. Näherungsformeln nach Taylorentwicklung um x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

für kleine Winkel α gilt: $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$, od. $\sin \alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{3!}$, $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2!}$.

9. Integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C,$$

$$\int \frac{x dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + C,$$

$$\int \frac{dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \cdot \sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

10. Trigonometrische Funktionen:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

11. Feldtheoretische Zusammenhänge:

Biot-Savartsches Gesetz:
$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Magnetisches Vektorpotential:
$$\vec{V}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int \frac{I \cdot ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Aufgabe 1:

$$\underline{1.1:} \quad C = \frac{\Delta Q}{\Delta U} = \frac{Q}{\Delta U}$$

id. Diel.
 $\epsilon = 0$

Symmetrie: $\vec{E}(s, \phi) = E(s) \cdot \vec{e}_s(\phi)$ unter Vernachlässigung der Randeffekte

Gauß: $\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}' = Q$

hier: $d\vec{A}' = dz \cdot s d\phi \cdot \vec{e}_s(\phi)$: Mantelfläche des Zylinders

$$\Rightarrow \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}' = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \int_{z=0}^L \int_{\phi=0}^{\alpha} \langle \vec{e}_s(\phi) | \vec{e}_s(\phi) \rangle E(s) s d\phi dz = Q$$

kein Vollwinkel!

$$\Leftrightarrow \vec{E}(s) = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r \cdot L \cdot \alpha \cdot s} \cdot \vec{e}_s(\phi)$$

$$\Delta U = \int_{R_i}^{R_o} \langle \vec{E}(s) | ds \cdot \vec{e}_s(\phi) \rangle = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r L \alpha} \int_{R_i}^{R_o} \frac{1}{s} ds$$

$$= \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r L \cdot \alpha} \cdot \ln(R_o/R_i)$$

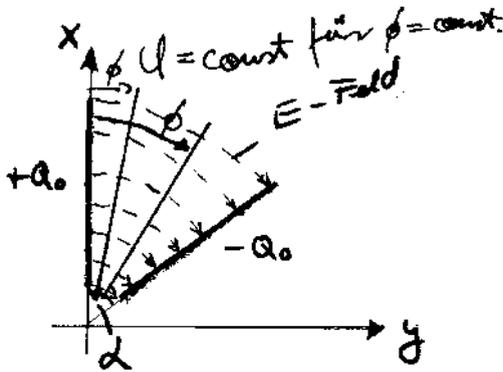
$$C_1 = \frac{Q}{\Delta U} \Rightarrow$$

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \cdot L \cdot \alpha}{\ln(R_o/R_i)}$$

1.2: hier: Verwende Ergebnis aus 1.1 mit $\alpha = 2\pi$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r \cdot L}{\ln(R_o/R_i)}$$

1.3: $C_3 = ?$



E-Feld und Äquipotentiallinien
unter Vernachlässigung von Randeffekten

E-Feld näherungsweise auf
konzentrischen Bahnen

$$\vec{E} = |\vec{E}| \cdot \vec{e}_\rho(\phi)$$

\Rightarrow Äquipotentialflächen $U = \text{const.}$ für
 $\phi = \text{const.}$

Anmerkung: Exakte Lösung unter Anwendung der
Funktionentheorie und konformer Abbildungen

Hier: Näherungslösung: allg. $C = \frac{\Delta Q}{\Delta u} = \frac{Q}{\Delta u}$

Annahme: $\vec{D} = |\vec{D}| \cdot \vec{e}_\rho(\phi) = D(s) \cdot \vec{e}_\rho(\phi)$

analog: $\vec{E} = E(s) \cdot \vec{e}_\rho(\phi) = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \cdot D(s) \cdot \vec{e}_\rho(\phi)$

Gauß: $\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}' = \int_{z=0}^L \int_{\rho=R_i}^{\rho=R_a} D(s) \cdot ds \cdot dz \cdot \langle \vec{e}_\rho(\phi); \vec{e}_\rho(\phi) \rangle = Q$

(1) $\Rightarrow Q = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot L \cdot \int_{s=R_i}^{\rho=R_a} E(s) ds \Rightarrow E(s) = ?$

$\Delta u = \int_{\phi=0}^{\alpha} \langle \vec{E}; d\vec{s} \rangle = \int_{\phi=0}^{\alpha} E(s) \cdot s d\phi = E(s) \cdot \alpha \cdot s$

(2) $\Rightarrow E(s) = \frac{\Delta u}{\alpha \cdot s}$

$$\Rightarrow (2) \text{ in (1)}: Q = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot L \int_{r=R_i}^{R_a} \frac{\Delta U}{r \cdot d} dS = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot L \cdot \Delta U \cdot \frac{1}{d} \ln(R_a/R_i)$$

$$\Leftrightarrow \Delta U = \frac{Q \cdot d}{\epsilon_0 \epsilon_r \cdot L \cdot \ln(R_a/R_i)}$$

$$\Rightarrow C_3 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \cdot L \cdot \ln(R_a/R_i)}{d}$$

1.4: $\varphi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' + \varphi_{\text{ref}}$ mit $d\vec{r}' = r \cdot d\phi' \cdot \vec{e}_\phi(\phi')$

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{\phi'=0}^{\phi} E(r, \phi', z) \cdot r \cdot d\phi' + \varphi_{\text{ref}}$$

$$E(r, \phi, z) = \frac{\Delta U}{r \cdot d} = \frac{Q_0 \cdot d}{\epsilon_0 \epsilon_r \cdot L \cdot \ln(R_a/R_i) \cdot r \cdot d}$$

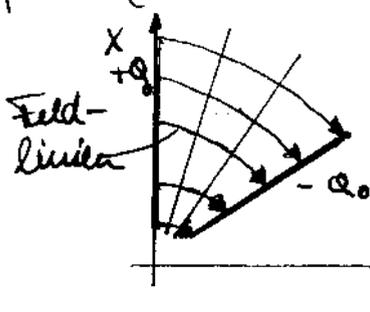
$$\varphi(\vec{r}) = - r \cdot \frac{Q_0}{\epsilon_0 \epsilon_r \cdot L \cdot \ln(R_a/R_i) \cdot r} \cdot \int_{\phi'=0}^{\phi} d\phi' + \varphi_{\text{ref}}$$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = - \frac{Q_0}{\epsilon_0 \epsilon_r \cdot L \cdot \ln(R_a/R_i)} \cdot \phi + \varphi_{\text{ref}}$$

$$\varphi(\vec{r}_1, 0, z) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \varphi(r_1, 0, z) = 0 + \varphi_{\text{ref}} \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow \varphi_{\text{ref}} = 0$$

Äquipotential-
flächen:

$$\varphi = \text{const} \Rightarrow$$



$$\varphi(r, \phi, z) = - \frac{Q_0}{\epsilon_0 \epsilon_r \cdot L \cdot \ln(R_a/R_i)} \cdot \phi$$

1. Z. 1:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\vec{\nabla} \varphi \quad (1)$$

$$\text{div } \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \text{div } \vec{E} = \rho \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (2)$$

$$(1) \text{ in } (2): \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

Sonderfall: Laplace, verschwindende Raumladung: $\rho = 0$

$$\Rightarrow \Delta \varphi = 0$$

1. Z. 2:

$$\vec{F}_{12} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

Das Coulombsche Gesetz gibt das gegenseitige Verhalten zweier Punktladungen (Q_1 und Q_2) im Raum an.

Dabei Verhalten sich die Ladungen abhängig vom V^2 ihrer Ladungen folgendermaßen:

- gleichnamige Ladungen stoßen sich ab
- ungleichnamige Ladungen ziehen sich an

Außerdem nimmt deren Kraftwirkung mit zunehmendem Abstand mit $\frac{1}{r^2}$ ab.

$$|\vec{F}_{12}| \sim \frac{1}{r^2} \quad ; \quad r = \text{Abstand der Punktladungen}$$

Aufgabe 2:2.1: Quasistationäre Näherung

Bei der quasistationären Näherung approximiert man die Verschiebungsdichte \vec{D} als quasi konstant. Somit ist deren Ableitung nach der Zeit identisch Null: $\frac{\partial}{\partial t} \vec{D} = \vec{0}$. Das Durchflutungsgesetz ergibt sich demnach zu: $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$.

Dies ist erlaubt für den Fall, daß sich die vorhandenen Ströme zeitlich nur sehr langsam ändern.

Mit der quasistationären Näherung lassen sich sehr wohl Induktionsvorgänge, jedoch keine Entstehung und Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen beschreiben. (siehe auch Skript)

2.2: „endlich langer Stromfaden“ \rightarrow Biot-Savart!

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{i(t)}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

„Fahrplan“:

- Berechne H-Feld für Leiter auf y-Achse in Zyl.-Koordinaten
- Berechne H-Feld für Leiter auf y-Achse in kartes. Koordinaten
- Berechne H-Feld für Leiter auf Parallele zur y-Achse

a) Symmetrie: zyl. - Koord.

Achtung: „unübliche“ Koordinatenachsenbezeichnungen

$$\vec{r} = \rho \cdot \vec{e}_\rho(\phi) + z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = \rho \cdot \vec{e}_\rho(\phi) + (y - y') \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{r}' = y' \cdot \vec{e}_y \quad ; \quad |y'| \leq b$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = \rho^2 + (y - y')^2$$

$$d\vec{s} = dy' \cdot \vec{e}_y$$

$$d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}') = \rho \cdot dy' \cdot \vec{e}_\phi(\phi)$$

$$\vec{H}(\rho, \phi, y) = \frac{i(t)}{4\pi} \int_{y'=-b}^b \frac{\rho \cdot dy' \cdot \vec{e}_\phi(\phi)}{[\rho^2 + (y - y')^2]^{3/2}}$$

Substitution: $u = y - y' \rightarrow du = -dy'$

$$y' = -b \rightarrow u = y + b$$

$$y' = b \rightarrow u = y - b$$

$$\vec{H}(\rho, \phi, y) = \frac{i(t)}{4\pi} \rho \cdot \vec{e}_\phi(\phi) \cdot \int_{u=y-b}^{y+b} \frac{du}{[u^2 + \rho^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{i(t) \cdot \vec{e}_\phi(\phi) \cdot \rho}{4\pi \cdot \rho^2} \cdot \frac{u}{[u^2 + \rho^2]^{1/2}} \Bigg|_{y-b}^{y+b}$$

$$\vec{H}(\rho, \phi, y) = \frac{i(t) \cdot \vec{e}_\phi(\phi)}{4\pi \rho} \cdot \left(\frac{y+b}{[(y+b)^2 + \rho^2]^{1/2}} - \frac{y-b}{[(y-b)^2 + \rho^2]^{1/2}} \right)$$

b) in kart. Koord.: $\rho^2 = x^2 + z^2$

$$\vec{e}_\phi(\phi) = \vec{e}_\phi'(t, x) = \frac{1}{[z^2 + x^2]^{1/2}} \cdot [-x \cdot \vec{e}_z' + z \cdot \vec{e}_x']$$

$$\Rightarrow \vec{H}(x, y, z) = \frac{i(t) \cdot [z \cdot \vec{e}_x' - x \cdot \vec{e}_z']}{4\pi \cdot ([x^2 + z^2]^{1/2})^2} \cdot \left(\frac{y+b}{[(y+b)^2 + x^2 + z^2]^{1/2}} - \frac{y-b}{[(y-b)^2 + x^2 + z^2]^{1/2}} \right)$$

c) Verschiebung: $x \rightarrow x - a$

$$i(t) = I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\Rightarrow \vec{H}_1(x, y, z) = \frac{I_0 \cdot \cos(\omega t)}{4\pi \cdot [(x-a)^2 + z^2]} \cdot (z \cdot \vec{e}_x - (x-a) \cdot \vec{e}_z) \times \dots$$

$$\dots \times \left\{ \frac{y+b}{[(y+b)^2 + (x-a)^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{y-b}{[(y-b)^2 + (x-a)^2 + z^2]^{3/2}} \right\}$$

z.3: $\vec{H}_\infty(\vec{r}) = \lim_{b \rightarrow \infty} \vec{H}_1(\vec{r})$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{y+b}{[(y+b)^2 + \dots]^{3/2}} = +1 ; \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{y-b}{[(y-b)^2 + \dots]^{3/2}} = -1$$

$$\Rightarrow \vec{H}_\infty(\vec{r}) = \frac{I_0 \cdot \cos(\omega t)}{2L} \cdot \frac{z \cdot \vec{e}_x - (x-a) \cdot \vec{e}_z}{(x-a)^2 + z^2}$$

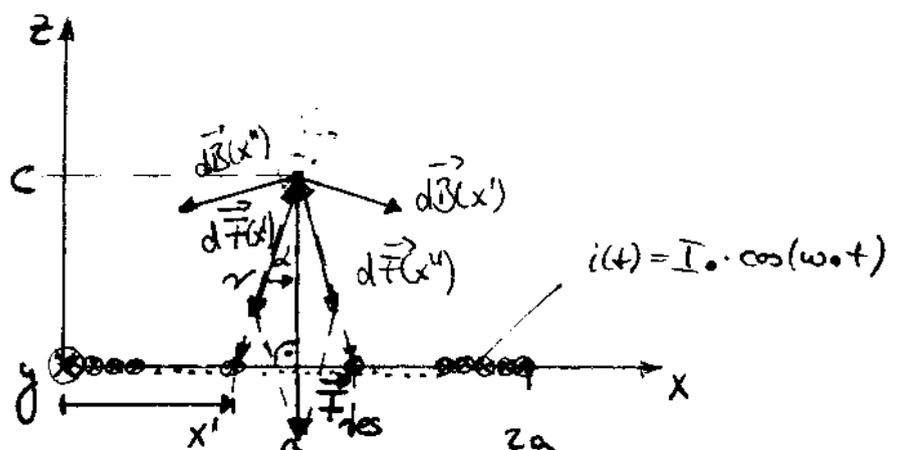
z.4: Lösung kann nun formal über

$$\vec{H} = \vec{I} \cdot \vec{e} \times \vec{B}$$

bestimmt werden.

ODER: alternativ: durch Symmetrieüberlegungen!

$$\vec{H}' = \frac{\vec{H}}{L} \quad \text{Schnittbild:}$$



Annahmen zur Skizze:

Man denke sich den Strifenleiter aus diff. kleinen Stromfäden, auf der x -Achse zwischen 0 und $2a$ verschoben und einen diff. kleinen Strom dI führend, zusammengesetzt vor. Es gilt bei homogen verteiltem Strombelag:

$$i(t) = \int_{x'=0}^{2a} K_0(x') dx' = \int_{x'=0}^{2a} K_0 dx' = K_0 \cdot 2a = I_0 \cdot \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \text{Strombelag: } K_0 = \frac{dI}{dx'} = \frac{I_0 \cdot \cos \omega t}{2a}$$

$$\Rightarrow dI = K_0 \cdot dx' = \frac{I_0 \cdot \cos \omega t}{2a} dx'$$

Man gibt es aufgrund der symmetrischen Anordnung zu jedem um x' verschobenen Stromfaden ($0 \leq x' \leq a$) einen um x'' verschobenen Stromfaden ($a \leq x'' \leq 2a$) dem beiden Anteile an dem Kraftvektor \vec{F}_{res} sich in x -Richtung kompensieren (vgl. Skizze). Resultierend bleibt also nur eine in neg. z -Richtung weisende Komponente übrig

$$\Rightarrow \vec{F} = |\vec{F}| \cdot (-1) \cdot \vec{e}_z$$

Es genügt also nur die z -Komponente von \vec{F}_{res} zu bestimmen, die durch die versch. Stromfäden $0 \leq x' \leq a$ erzeugt wird und diese anschließend zu verdoppeln.

$$|\vec{F}_{res}| = L \cdot I_0 \cdot 2 \int_{x'=0}^a dB(x')$$

$$dB(x') = \mu_0 \cdot dH(x') = \mu_0 \cdot \frac{dI(x')}{2\pi \cdot r(x')} \cdot \left[\frac{c}{v(x')} \right]$$

mit $r(x') =$ Abstand zwischen um x' verschobenem Stromfaden und dem zentralen Stromfaden durch $P(a, 0, c)$.

$$r(x') = \sqrt{(a-x')^2 + c^2} \quad ; \quad 0 \leq x' \leq a$$

$$\Rightarrow dB(x') = \mu_0 \cdot \frac{K_0 \cdot c}{2\pi (c^2 + (a-x')^2)} \cdot dx'$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_{res}| = 2 \cdot L \cdot I_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{K_0 \cdot c}{2\pi} \int_{x'=0}^a \frac{1}{c^2 + (a-x')^2} dx'$$

Substitution: $u = a - x' \rightarrow du = -dx'$

$$x' = 0 \rightarrow u = a$$

$$x' = a \rightarrow u = 0$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_{res}| = \frac{L \cdot I_0 \cdot \mu_0 \cdot K_0 \cdot c}{\pi} \cdot \int_{u=0}^a \frac{du}{u^2 + c^2}$$

$$= \frac{L \cdot I_0 \cdot \mu_0 \cdot K_0 \cdot c}{\pi} \cdot \frac{1}{c} \arctan\left(\frac{u}{c}\right) \Big|_0^a$$

$$\vec{F} = -\frac{I_0^2 \cdot \cos \omega t}{2\pi a} \cdot \arctan\left(\frac{a}{c}\right) \cdot \vec{e}_z$$

$$\underline{25:} \quad \vec{F}_{\infty} = \lim_{a \rightarrow \infty} \vec{F} = -\frac{I_0^2 \cdot \cos \omega t}{2\pi a} \cdot \lim_{a \rightarrow \infty} \arctan\left(\frac{a}{c}\right) \cdot \vec{e}_z$$

const bzgl. a ,
da $K_0 = \frac{I_0 \cdot \cos \omega t}{2a}$

const. wegen hom. verteiltem Strom

$$\frac{\pi}{2}$$

$$\vec{F}_{\infty} = -\frac{I_0^2 \cdot \cos \omega t}{4a} \cdot \vec{e}_z$$

2. z. 1: Benutze Durchflutungsgesetz!

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \underbrace{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{=0} \text{ wegen quasistat. Näherung}$$

$$\Rightarrow \oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = I = i(t) = I_0 \cdot \cos \omega_0 t$$

$$\Rightarrow \vec{H}(s) = \frac{I_0 \cdot \cos \omega_0 t}{2\pi s} \cdot \vec{e}_\phi(\phi)$$

$$\text{hier: } s^2 = x^2 + z^2 \quad \wedge \quad \vec{e}_\phi(\phi) = \vec{e}_\phi(z, x) = \frac{-x \cdot \vec{e}_z + z \cdot \vec{e}_x}{[x^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Verschiebung: $x \rightarrow x - a$

$$\Rightarrow \vec{H}_1(x, y, z) = \frac{I_0 \cdot \cos \omega_0 t}{2\pi \sqrt{(x-a)^2 + z^2}} \cdot [z \cdot \vec{e}_x - (x-a) \cdot \vec{e}_z]$$

q.e.d.

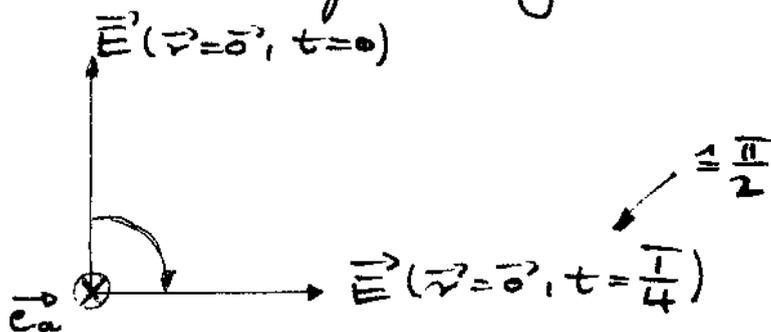
Aufgabe 3:

3.1: Zirkular polarisierte Welle:

Der \vec{E} -Feld-Vektor einer sich in pos. z -Richtung ausbreitenden EM-Welle rotiert in einer Ebene normal zur Ausbreitungsrichtung ($z = \text{konst}$) mit konst. Winkelgeschwindigkeit ω und dessen Spitze beschreibt dabei eine Kreisbahn.

Dafür gelte: $|\vec{E}_{x0}| = |\vec{E}_{y0}| = E_0$ und $\Delta\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ bzw. ungeradzahlige Vielfache von $\frac{\pi}{2}$

3.2: Wissen: \vec{E} rotiert an einem festen Ort (hier $\vec{r} = \vec{0}$) mit der zeitlichen Periodendauer T ($\omega = \frac{2\pi}{T}$) (bzw. $T = \frac{2\pi}{\omega}$) in einer Ebene normal zur Ausbreitungsrichtung



RECHTSCHRAUBENSYSTEM

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{e}_a &= \frac{\vec{E}(\vec{r}=\vec{0}, t=0) \times \vec{E}(\vec{r}=\vec{0}, t=\frac{T}{4})}{\|\vec{E}(\vec{r}=\vec{0}, t=0) \times \vec{E}(\vec{r}=\vec{0}, t=\frac{T}{4})\|} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} E_0^2}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| E_0^2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 20-0 \\ 0-(-15) \end{pmatrix}}{[0^2+20^2+15^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{20\vec{e}_y + 15\vec{e}_z}{25} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{e}_a = \frac{4}{5} \cdot \vec{e}_y + \frac{3}{5} \cdot \vec{e}_z}$$

3.3: $\epsilon_r = ?$

$$k_y = k_0 \cdot \frac{8}{5} \quad \text{mit} \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{2\pi f_0}{c_0} = \frac{\omega_0}{c_0}$$

$$k_x = 0$$

$$\frac{k_y}{k_{\text{med}}} = \frac{4}{5}$$

$$k_{\text{med}} = \frac{\omega_0}{c_0} \cdot n \quad \text{mit} \quad n = \sqrt{\epsilon_r}$$

$$\frac{k_z}{k_{\text{med}}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{mit} \quad \frac{k_y}{k_{\text{med}}} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow k_y = \frac{4}{5} k_{\text{med}} = \frac{4}{5} k_0 \cdot n \stackrel{!}{=} \frac{8}{5} \cdot k_0$$

$$\Rightarrow n = 2$$

$$\Rightarrow \epsilon_r = 4$$

$$k_z = \frac{3}{5} k_{\text{med}} = \frac{3}{5} \cdot k_0 \cdot n = \frac{6}{5} k_0$$

$$\Rightarrow \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \frac{k_0}{5} \quad \text{mit} \quad k_0 = \frac{\omega_0}{c_0}$$

3.4: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ \underline{\vec{E}}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t} \}$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ \underline{\vec{H}}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t} \}$$

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}) = \underline{\vec{E}}_0 \cdot e^{-j \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle} \quad \text{mit} \quad \underline{\vec{E}}_0 = \begin{pmatrix} \underline{E}_{0x} \\ \underline{E}_{0y} \\ \underline{E}_{0z} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{E}}(\vec{r} = \vec{0}, t = 0) = \text{Re} \left\{ \begin{pmatrix} \underline{E}_{0x} \\ \underline{E}_{0y} \\ \underline{E}_{0z} \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3E_0 \\ 4E_0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r} = \vec{0}, t = \frac{T}{4}) = \text{Re} \left\{ \begin{pmatrix} \underline{E}_{0x} \\ \underline{E}_{0y} \\ \underline{E}_{0z} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}}}_{\leftarrow j} \right\} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 5E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{E}_{0x} \in \mathbb{C} \Rightarrow \text{aus} \text{Re} \{ \underline{E}_{0x} \cdot j \} = 5E_0 \text{ folgt: } \underline{E}_{0x} = -j5E_0$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \underline{E}_x &= -j5 \cdot E_0 \\ \underline{E}_y &= -3E_0 \\ \underline{E}_z &= 4 \cdot E_0 \end{aligned}$$

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -j5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot E_0 \cdot e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

3.5: H-Feld?

TEM-Welle im homogenen isotropen Medium

$$\underline{\vec{H}}(\vec{r}) = \frac{1}{z_T} \cdot \vec{e}_z \times \underline{\vec{E}}(\vec{r}), \text{ da } \underline{\vec{E}}, \underline{\vec{H}} \text{ und } \vec{e}_z \text{ ein RECHTSYSTEM bilden}$$

$$z_T = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = z_{T0} \cdot \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} = z_{T0} / \mu = \frac{z_{T0}}{2};$$

$$z_{T0} = z_0 \approx 377 \Omega$$

$$\vec{e}_z \times \underline{\vec{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -j5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot E_0 \cdot e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$= \frac{E_0}{5} \cdot e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \cdot \begin{pmatrix} 16 - (-9) \\ -j15 - 0 \\ 0 - (-20j) \end{pmatrix} = E_0 \cdot e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \begin{pmatrix} 5 \\ -3j \\ 4j \end{pmatrix}$$

$$\underline{\vec{H}}(\vec{r}) = \frac{2 \cdot E_0}{z_0} \cdot e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3j \\ 4j \end{pmatrix}$$

3.6.1: $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^* \}$

$$\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^* = \begin{pmatrix} -j5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ +3j \\ -4j \end{pmatrix} \cdot E_0 \cdot \frac{2E_0}{z_0} \cdot e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \cdot e^{+j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$= \frac{2E_0^2}{z_0} \cdot \begin{pmatrix} 12j - 12j \\ 20 + 20 \\ 15 + 15 \end{pmatrix} = \frac{2E_0^2}{z_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Musterlösung

Seite 14/19

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{2E_0^2}{z_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix} \right\} = \frac{E_0^2}{z_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\overline{P}_W = \iint_A \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{A} = \iint_A \langle \vec{S} \rangle \cdot \vec{e}_z dA$$

$$= \frac{E_0^2}{z_0} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \right\rangle = \frac{E_0^2}{z_0} (0 + 160 + 90) \cdot \frac{1}{5}$$

$$\boxed{\overline{P}_W = 50 \cdot \frac{E_0^2}{z_0}}$$

4.2.2 Siehe ältere Klausuren bzw. Übungen

Aufgabe 4:

$$4.1: \underline{H}(\vec{r}, t) = \underbrace{\begin{pmatrix} H_{0x} \cdot e^{j\varphi_{0x}} \\ H_{0y} \cdot e^{j\varphi_{0y}} \\ H_{0z} \cdot e^{j\varphi_{0z}} \end{pmatrix}}_{\text{komplexe Amplitude in 3-kart. Koordinaten- richtungen, mit zeitl. + ortl. period. Prozess}}$$

$$\cdot \underbrace{e^{-j\langle \vec{k} | \vec{r} \rangle}}_{\vec{k}: \text{Wellenvektor harmonische}} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\vec{r}: \text{Ortsvektor Anteil}}$$

- H_{0x}, H_{0y}, H_{0z} : Amplituden je Pol.-Richtg.
- $\varphi_{0x}, \varphi_{0y}, \varphi_{0z}$: Nullphasenwinkel je Pol.-Richtg.

4.2: diff. Form:

$$\boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{g} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}}$$

integr. Form:

$$\boxed{\oint_{\partial A} \vec{H} d\vec{s} = \iint_A (\vec{g} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}) d\vec{A}}$$

Überführung mit dem Satz von STOKES:

$$\int_{\partial A} \vec{f} d\vec{s} = \iint_A \text{rot } \vec{f} d\vec{A}$$

$$\int_{\partial A} \vec{H} d\vec{s} = \iint_A \text{rot } \vec{H} d\vec{A} = \iint_A (\vec{g} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}) d\vec{A}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{g} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \quad \text{g.e.d.}$$

Musterlösung

Seite 16/19

4.3: Die Wellenlängen der betrachteten Signale müssen sehr viel größer als die Abmessungen des Netzwerks sein!

4.4: Durchflutungsgesetz:

$$\text{I.) rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \quad \text{mit } \rho = 0: \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$$

Induktionsgesetz:

$$\text{II.) rot } \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

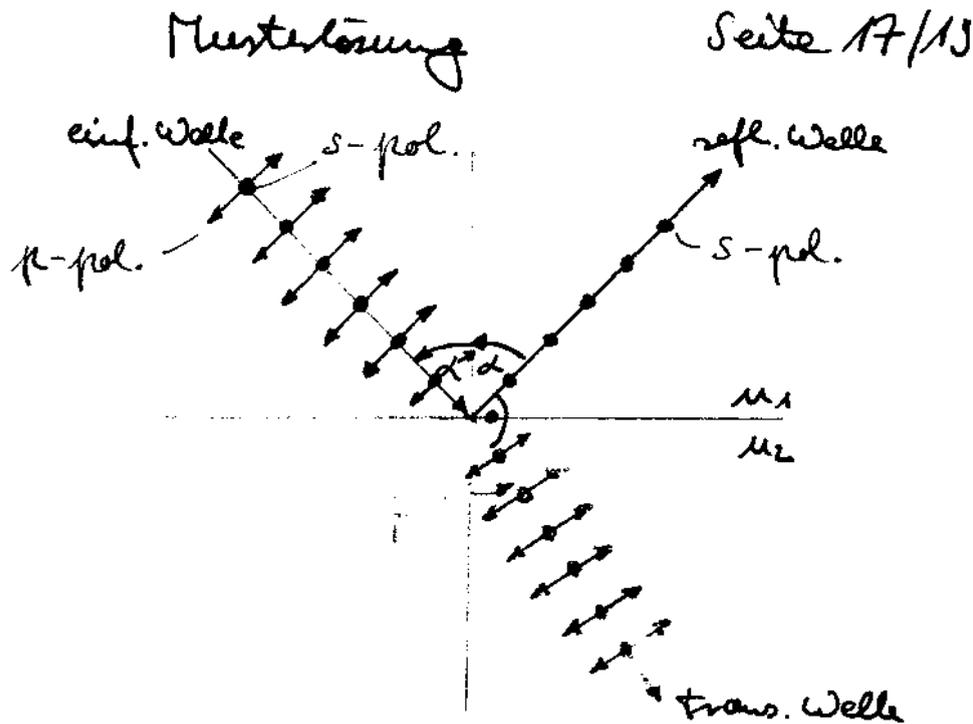
$$\text{III.) div } \vec{D} = \rho \quad \text{mit } \rho = 0: \quad \text{div } \vec{D} = 0$$

$$\text{IV.) div } \vec{B} = 0$$

Die beiden ersten MG sind gekoppelte DGLs 1. Ordnung.
Im Gegensatz dazu ist die WG eine entkoppelte DGL 2. Ordnung.

4.5: "Totaltransmission":

Der p-polarisierte Anteil einer EM-Welle wird beim Auftreffen auf eine Grenzschicht dann total transmittiert, wenn der Einfallswinkel gleich dem Brewster-Winkel ist. Bei diesem Brewster-Winkel α_B stehen die transmittierte Anteil in einem rechten Winkel zu den reflektierten (s-polarisiert).



$$\alpha + 90^\circ + \beta = 180 \rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

Snellius: $n_1 \cdot \sin \alpha = n_2 \cdot \sin \beta$ mit $\beta = 90^\circ - \alpha$

$$n_1 \cdot \sin \alpha = n_2 \cdot \cos \alpha$$

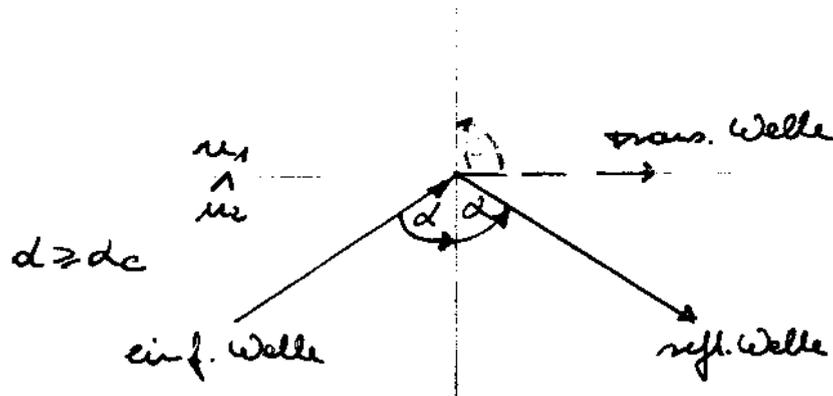
$$\Leftrightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \alpha_B : \text{ Brewster-Winkel}$$

- Anwendung:
- Quasi reflektionsfreie Einkopplung unter dem Brewster-Winkel für EM-Wellen in optische Medien
 - Polarisation des unter dem Brewster-Winkel eintreffenden Lichtes (vertikalbehaftet!)

"Totalreflexion:"

Voraussetzung: $n_2 > n_1$, d.h. das Licht dringt von einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium ein und wird dabei vom Lot weggebrochen ($\beta > \alpha$). Man existiert ein Grenzwinkel α_c ab diesem kein Licht mehr in die

angrenzende Schicht übergeht ($\beta = 90^\circ$): Fall der Totalreflexion. Dieses Phänomen ist polarisationsunabhängig.



Snellius: $n_2 \cdot \sin \alpha = n_1 \cdot \sin \beta \quad | \quad \beta = 90^\circ$

$$\Rightarrow n_2 \cdot \sin \alpha = n_1$$

$$\Rightarrow \alpha_c = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right) \quad \checkmark \quad | \quad \text{mit } \frac{n_1}{n_2} < 1 \quad \checkmark$$

Anwendung: • dauerhafte, quasi verlustfreie Wellen- bzw. „Strahlenführung“ in optischen Schichtwellenleitern oder Glasfasern (i.a. Lichtwellenleiter).

4.2.1: $\underline{\vec{k}} = \underline{\vec{k}}_R + j \cdot \underline{\vec{k}}_I$

Betrachte Phasenterm: $e^{-j \underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{r}}} = e^{-j \cdot (\underline{\vec{k}}_R + j \cdot \underline{\vec{k}}_I) \cdot \underline{\vec{r}}}$

$$\Rightarrow e^{-j \underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{r}}} = \underbrace{e^{-j \underline{\vec{k}}_R \cdot \underline{\vec{r}}}}_{\text{wie üblich, beschreibt die orth. Phase}} \cdot \underbrace{e^{\underline{\vec{k}}_I \cdot \underline{\vec{r}}}}_{\text{beeinflusst den Betrag}}$$

wie üblich, beschreibt die orth. Phase

$$| | = 1$$

beeinflusst den Betrag

$$| | \neq 1 \text{ (i.a.)}$$

\Rightarrow Man kann mit dem Imaginärteil von $\underline{\vec{k}}_I$ eine Verstärkung bzw. Dämpfung der sich ausbreitenden

Welle beschreiben: $b_I < 0$: Dämpfung
 $b_I > 0$: Verstärkung

4.2.2: Siehe vorangegangene Klausur!

Diplomhauptprüfung (Frühjahr 2003)

Theoretische Elektrotechnik III

1. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
2. Außer Schreib- und Zeichenmaterial sind keine Hilfsmittel zugelassen (auch kein Taschenrechner)!
3. Die jeweils maximal erreichbare Punktzahl pro Teilaufgabe ist in Klammern am Ende jeder Teilaufgabe angegeben.
4. Es sind alle Aufgaben zu bearbeiten! Die Zusatzaufgaben sind optional.
5. Verwenden Sie ausschließlich die Ihnen ausgeteilten Doppelbögen; nur diese werden bewertet. Trennen Sie die Doppelbögen nicht.
6. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Doppelbogen!
7. Schreiben Sie auf jeden Doppelbogen Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Aufgabe (inklusive der Teilaufgabe), die Sie bearbeiten!
8. Zeigen Sie den gewählten Lösungsweg auf. Geben Sie insbesondere Zwischenergebnisse und Begründungen an. Nur eindeutige Aussagen können bewertet werden!
9. Einige häufig gebrauchte Formeln finden Sie im Anhang.
10. **VIEL ERFOLG!!!**

Aufgabe 1: Kapazität von Kugelkondensatoren (13 Punkte + 4 Zusatzpunkte)

Bild 1.1 zeigt einen Kugelkondensator, dessen innere ($r = R_i$) und äußere ($r = R_a$) Elektrode auf die Ladungen $+Q_0$ (bzw. $-Q_0$) aufgeladen werden. Zwischen beiden unendlich gut leitenden Elektroden befindet sich ein Dielektrikum mit der relativen Dielektrizitätszahl $\epsilon_r = \text{konst.}$

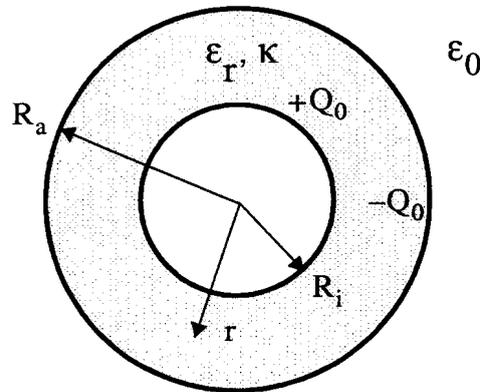


Bild 1.1: Kugelkondensator, Querschnittszeichnung

- 1.1 Berechnen sie die Kapazität des **idealen** Kugelkondensators nach Bild 1.1 (als Funktion der Geometrie- und Material-Parameter). (3 Punkte)
- 1.2 Das Dielektrikum sei nun **inhomogen** und es gelte: $\epsilon_r(r) = k \cdot r$; $k = \text{konst.}$ für $r \in [R_i, R_a]$. Welche Einheit hat die Konstante k sinnvollerweise? Berechnen Sie nun die neue Kapazität des Kugelkondensators nach Bild 1.1 (als Funktion der Geometrie- und den geänderten Material-Parameter). (2 Punkte)

Zwar gelte wieder $\epsilon_r = \text{konst.}$, jedoch sei das Dielektrikum nun **verlustbehaftet**, d. h. es besitzt die Leitfähigkeit $\kappa = \text{konst} > 0$. Zur Zeit $t = 0$ ist der Kugelkondensator wieder auf die Ladungen $+Q_0$ (bzw. $-Q_0$) aufgeladen. Es schließt sich ein Ausgleichsvorgang an.

- 1.3 Ermitteln Sie den **zeitlichen** Verlauf der Ladungen separat für beide Elektroden für **alle Zeiten** $t \geq 0$ (ohne Induktionsterme der Maxwell'schen Gleichungen). Skizzieren Sie die ermittelten zeitlichen Verläufe und stellen Sie dabei speziell den **Ladungserhaltungssatz** anschaulich in der Skizze dar. (5 Punkte)
- 1.4 Berechnen Sie weiterhin die elektrische Feldstärke, den Strom und die Spannung zwischen den beiden Elektroden als **Funktionen von t**. Berechnen Sie damit die **Kapazität C** und den **Widerstand R** der Anordnung. (3 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 1.Z.1 Zeigen Sie einen **alternativen** Lösungsweg zur Berechnung der Kapazität C und des Widerstandes R in Teilaufgabe 1.4 auf. (*nur prinzipieller Lösungsweg erforderlich!*) (2 Punkte)
- 1.Z.2 Welchen Wert hat das **Produkt** $R \cdot C$ von Teilaufgabe 1.4 ? Welche **Bedeutung** hat diese Größe? (2 Punkte)

Aufgabe 2: Magnetfeld einer stromdurchflossenen Ringspule

(8 Punkte + 5 Zusatzpunkte)

In Bild 2.1 ist eine vom **Gleichstrom I homogen** durchflossene Ringspule der Länge L zu sehen. Die Spule besteht aus N Windungen und sei so dicht gewickelt, daß man sie sich aus sehr vielen **Kreisströmen** (siehe Bild 2.2) zusammengesetzt vorstellen kann. Das gesamte Magnetfeld der Ringspule ergibt sich somit durch **Überlagerung** der Felder aller Kreisströme. Die Spule und der Kreisring haben beide den Radius R und sind symmetrisch zur z -Achse.

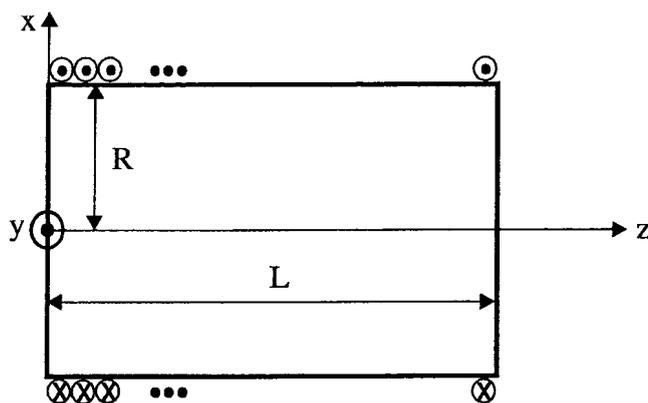


Bild 2.1 Stromdurchflossene Ringspule

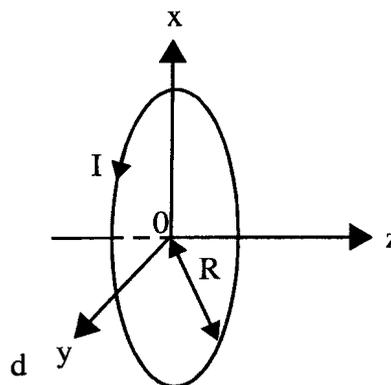


Bild 2.2 Geometrie des Kreisstromes bei $z = 0$

- 2.1 Zeigen Sie, daß das Magnetfeld $\vec{H}(z)$ des Kreisstromes nach Bild 2.2 auf der z -Achse gegeben ist durch:

$$\vec{H}(z) = \frac{I}{2} \cdot \frac{R^2}{[R^2 + z^2]^{3/2}} \cdot \hat{e}_z. \quad (3 \text{ Punkte})$$

- 2.2 Berechnen Sie nun den Strombelag K_0 , der zur Berechnung der Ringspule nach Bild 2.1 benötigt wird. (1 Punkt)

- 2.3 Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{H}(z)$ der Ringspule nach Bild 2.1 auf der z -Achse mit Hilfe des Ergebnisses aus 2.1 und 2.2. (2 Punkte)

- 2.4 Berechnen Sie näherungsweise das Magnetfeld $\vec{H}(z)$ einer schlanken Spule (d. h. es gilt: $L \gg R$) in der Spulenmitte. (2 Punkte)

Zusatzaufgabe:

- 2.Z.1 Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{H}(\vec{r})$ des Kreisstromes nach Bild 2.2 im gesamten Raum! Begründen Sie Ihre Schritte (eventuell durch Skizzen)! (5 Punkte)

Aufgabe 3: Holographie

(14 Punkte + 6 Zusatzpunkte)

Photographische Verfahren gibt es schon lange und wir haben uns mittlerweile daran gewöhnt, die dreidimensionale Welt in eine Papierebene gepreßt zu sehen. Das Problem liegt darin, daß man mit traditionellen Mitteln nicht das Lichtfeld abbilden kann, welches das Objekt ursprünglich umgab, sondern nur punktweise das Quadrat der Feldamplitude aufzeichnet. Licht, das von einem Photo reflektiert wird, informiert den Betrachter zwar über die Intensitätsverteilung $[I(\vec{r})]$, aber nicht über die Phase der vom Gegenstand ausgehenden Welle [Gegenstandswelle (Index: G)].

Die sogenannte Holographie (*grch.*: holos = vollständig, *grch.*: graphein = schreiben) dagegen konserviert sowohl die Phasen- als auch die Betragsinformation durch die Aufnahme eines Interferenzmusters, das aus der Überlagerung einer Referenzwelle (Index: R) mit der Gegenstandswelle entsteht, auf einer Photoplatte (siehe Bild 3.1). Dabei entspricht die Gegenstandswelle der Reflexion der Referenzwelle an dem beobachteten Objekt. Die Wellenlängen der beiden Wellen sind also identisch $\lambda_R = \lambda_G = \lambda$. Die vektoriellen komplexen elektrischen Felder der beiden Wellen werden dabei allgemein durch die Gleichung (3.1) beschrieben.

$$\vec{E}_{R,G}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{0R,G} \cdot e^{j\varphi_{R,G}} \cdot e^{j\omega_{R,G}t} \cdot e^{-jk_{R,G} \cdot \vec{r}} \quad (3.1)$$

- 3.1 Charakterisieren Sie die durch die E-Felder in (3.1) gegebenen elektromagnetischen Wellen (mit **Begründungen!**). (1,5 Punkte)

Die beiden Wellen treffen nun jeweils um 45° gegen das Lot (siehe Bild 3.1) zur Photoplatte auf diese auf. Dabei absorbiere die Photoplatte das auftreffende Licht vollständig.

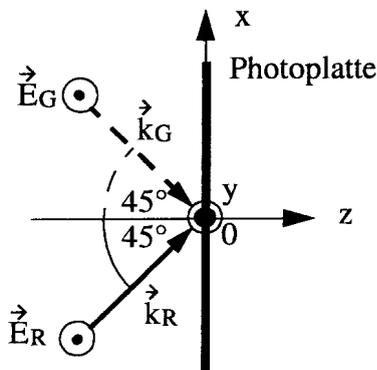


Bild 3.1 Aufnahme des Hologramms auf die Photoplatte

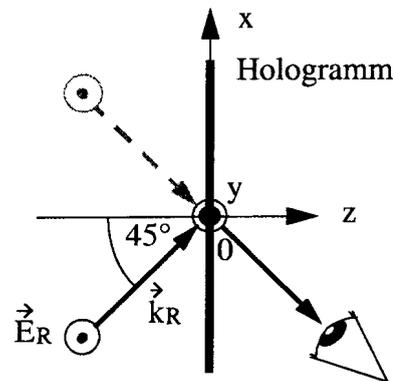


Bild 3.2 Rekonstruktion des aufgenommenen Bildes

- 3.2 Wie sind die durch (3.1) gegebenen Wellen bezüglich der Einfallsebene nach Bild 3.1 polarisiert? Geben Sie deren vollständige mathematische **vektorielle** Beschreibung ($\vec{E}_R(\vec{r}, t)$ und $\vec{E}_G(\vec{r}, t)$) explizit an. (2,5 Punkte)

Durch die Superposition der Referenz- und der Gegenstandswelle entsteht auf der Photoplatte (bei $z = 0$) ein sogenanntes Interferenzmuster, welches als ortsabhängige Intensitätsverteilung $I(x, y)$ auf der Platte erkennbar ist. $I(x, y)$ entspricht bis auf einen konstanten Faktor dem Betragsquadrat der superponierten Wellen ($\vec{E}_H(\vec{r}, t)$). Es gilt:

$$I(x, y) \sim \left| \vec{E}_H(\vec{r}, t) \Big|_{z=0} \right|^2 \quad (3.2)$$

- 3.3 Bestimmen Sie $I(x, y)$ als Funktion von $E_{0R,G}$, $\omega_{R,G}$, $\varphi_{R,G}$ und λ . In welcher Beziehung müssen ω_R und ω_G stehen, damit die Intensitätsverteilung stationär wird? Wie lautet dann $I(x, y)$? (4 Punkte)

Im folgenden werde die Intensitätsverteilung $I(x, y)$ auf der Photoplatte als stationär angenommen. Je nach Grad der Belichtung wird die Photoplatte nach der Entwicklung unterschiedlich stark geschwärzt. Diese „Schwärzung“ wird durch die Amplitudentransmission $T(x, y)$ gekennzeichnet und kann als näherungsweise proportional zur Intensitätsverteilung $I(x, y)$ angenommen werden.

- 3.4 Bestimmen Sie $T(x, y)$ als Funktion von $I(x, y)$ unter der Bedingung $0 \leq T(x, y) \leq 1$. (2 Punkte)

Nachdem die Photoplatte nun entwickelt worden ist, wird sie gemäß Bild 3.2 wieder mit der Referenzwelle beleuchtet. Dabei entstehen verschiedene Wellenanteile, deren Summe sich in $\vec{E}(\vec{r}, t)$ vereinen. Diese Summe bestimmt sich nach Gleichung (3.3):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = T(x, y) \cdot \vec{E}_R(\vec{r}, t) \quad (3.3)$$

- 3.5 Charakterisieren Sie die einzelnen in $\vec{E}(\vec{r}, t)$ enthaltenen Wellenanteile, indem Sie ihnen eine bestimmte Bedeutung zuordnen. (4 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 3.Z.1 Leiten Sie ausgehend von den **allgemeinen** Maxwell'schen Gleichungen und unter Verwendung des Graßmann'schen Entwicklungssatzes sukzessive die sogenannte **Helmholtzgleichung** (zeitfreie Wellengleichung) für die **magnetische** Feldstärke $\vec{H}(\vec{r}, j\omega)$ her. Gehen Sie von einem homogenen, isotropen und idealen Dielektrium der Brechzahl n aus. (4 Punkte)

- 3.Z.2 Zeigen Sie anhand der Wellengleichungen in kartesischen Koordinaten die Existenz zweier unabhängiger Polarisationsrichtungen bei elektromagnetischen Wellen. (2 Punkte)

Aufgabe 4: Asymmetrischer Dielektrischer Wellenleiter

(14 Punkte + 5 Zusatzpunkte)

Bild 4.1 zeigt den schematischen Aufbau eines **asymmetrischen** dielektrischen Filmwellenleiters der Filmdicke $h = 2 \cdot a$. In dem Wellenleiter breite sich eine **harmonische**, elektromagnetische **TM-Welle** stationär in **positiver y-Richtung** aus.

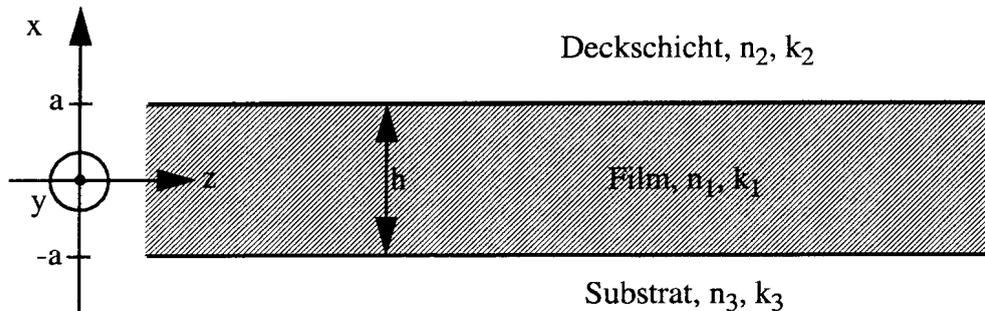


Bild 4.1 Schematischer Aufbau eines asymmetrischen dielektrischen Filmwellenleiters der Filmdicke h

- 4.1 Was kann über die **Komponenten** der **magnetischen Feldstärke** (H-Feld) der sich ausbreitenden elektromagnetischen Welle unter den obigen Randbedingungen ausgesagt werden? Was bedeutet dies für die Komponenten der **elektrischen Feldstärke** (E-Feld)? **Begründung!** (3 Punkte)
- 4.2 Beschreiben Sie zuerst den **prinzipiellen** Aufbau der **Differentialgleichungen** (DGLs) zur Berechnung der Feldgrößen der geführten elektromagnetischen Welle in den 3 Teilbereichen. (1 Punkt)
- 4.3 Stellen Sie nun **explizit** die **DGLs** für das **H-Feld** in den 3 einzelnen Teilbereichen auf. Verwenden Sie hierbei die durch die Gleichungen (4.1a) bis (4.1c) gegebenen Substitutionen. (4 Punkte)

Hinweis: Zur Lösung der Aufgabe wählen Sie einen passenden Ansatz für das H-Feld, setzen diesen in die Wellengleichung (4.2) ein und vereinfachen das Ergebnis unter Verwendung der gegebenen Substitutionen.

Substitutionen:

$$q_1 = \sqrt{k_1^2 - \beta^2} \quad \text{für } -a < x < a \quad (4.1a)$$

$$\kappa_2 = \sqrt{\beta^2 - k_2^2} \quad \text{für } a < x < \infty \quad (4.1b)$$

$$\kappa_3 = \sqrt{\beta^2 - k_3^2} \quad \text{für } -\infty < x < -a \quad (4.1c)$$

Wobei β der Ausbreitungskonstanten der geführten Welle und $k_{1,2,3}$ den Freiraumausbreitungskonstanten in den entsprechenden Schichten entsprechen.

$$\Delta \vec{H}(\vec{r}, t) - \epsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (4.2)$$

- 4.4 Welche Lösungsansätze ergeben sich für das H-Feld rein **mathematisch** in den 3 Teilbereichen? Welche zusätzlichen Folgerungen für diese Lösungsansätze lassen sich aus den **physikalischen** Randbedingungen ermitteln? (4 Punkte)
- 4.5 Zeigen Sie warum und wie die **Stetigkeit** der Tangentialkomponente des H-Feldes an den Grenzflächen durch eine weitere Bedingung and das E-Feld ersetzt werden kann. (2 Punkte)

Zusatzaufgaben:

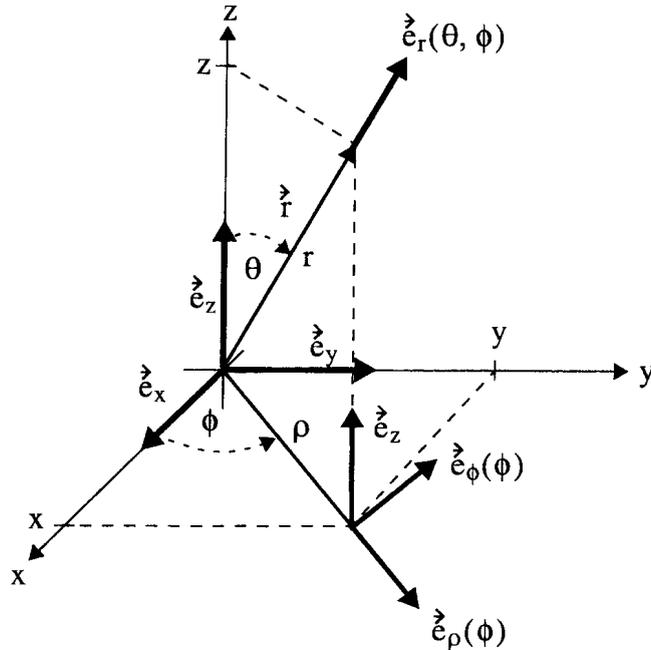
Nun breite sich in dem in Bild 4.1 dargestellten Schichtwellenleiter anstelle der TM-Welle eine **TE-Welle** in **positive z-Richtung** aus.

- 4.Z.1 Zeigen Sie qualitativ den Feldverlauf der E_y -Komponente im Grundmodus längs der z-Richtung für die Fälle **verlustloser** (*Fall a*) und **verlustbehafteter** (*Fall b*) Wellenleiter mit der Brechzahl n_1 auf. (2 Punkte)
- 4.Z.2 Welche Aussagen können Sie über die Phasenfronten in der x-y-Ebene in beiden Fällen (siehe *Fall a* und *Fall b* Aufgabenteil 4.Z.1) mit **guter Näherung** machen? (1 Punkt)
- 4.Z.3 Welche **physikalische Bedeutung** hat die Ausbreitungskonstante β bei einem ebenen Schichtwellenleiter? (2 Punkte)

Formelsammlung

1. Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} \vec{e}_\rho(\phi) &= \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\phi \cdot \vec{e}_y \\ \vec{e}_\phi(\phi) &= -\sin\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\phi \cdot \vec{e}_y \\ \vec{r}(\rho, \phi, z) &= \rho \cdot \vec{e}_\rho(\phi) + z \cdot \vec{e}_z \\ \vec{e}_\rho(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [x\vec{e}_x + y\vec{e}_y] \\ \vec{e}_\phi(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y] \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$



2. Kugelkoordinaten:

$$\vec{e}_r(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{e}_r(\theta, \phi) = \sin\theta \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\theta \sin\phi \cdot \vec{e}_y + \cos\theta \cdot \vec{e}_z$$

3. Oberflächen- und Volumenelemente:

$$d\vec{A}(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \cdot \vec{e}_r \quad dV(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$

$$d\vec{A}(\rho, \phi, z) = \rho d\phi dz \cdot \vec{e}_\rho \quad dV(\rho, \phi, z) = \rho d\rho d\phi dz$$

4. Divergenz und Rotation in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{A} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \{ \rho A_\rho \} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \{ A_\phi \} + \frac{\partial}{\partial z} \{ A_z \} \\ \text{rot} \vec{A} &= \vec{e}_\rho \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right] + \vec{e}_\phi \cdot \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] + \vec{e}_z \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \end{aligned}$$

5. Laplace-Operator und Gradient in Zylinderkoordinaten

$$\Delta U(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\text{grad} U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \cdot \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \phi} \cdot \vec{e}_\phi + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \vec{e}_z$$

6. Laplace-Operator und Gradient in Kugelkoordinaten

$$\Delta\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \right]$$

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \cdot \vec{e}_\phi$$

7. Vektoroperationen:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \quad \text{mit } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$$

8. Näherungsformeln nach Taylorentwicklung um x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

für kleine Winkel α gilt: $\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1$, od. $\sin\alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{3!}$, $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2!}$.

9. Integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C,$$

$$\int \frac{x dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + C,$$

$$\int \frac{dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \cdot \sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

10. Trigonometrische Funktionen:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$$

11. Feldtheoretische Zusammenhänge:

Biot-Savartsches Gesetz:
$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Magnetisches Vektorpotential:
$$\vec{V}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int \frac{I \cdot ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Aufgabe 1:

1.1:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta U}$$

hier: $C = \frac{\Delta Q}{\Delta U} = \frac{Q}{\Delta U}$, da ideales Dielektrikum: $\epsilon = \text{konst.} \neq \epsilon$

$\Rightarrow \Delta U = ?$

$$\Delta U = \int_{R_i}^{R_e} \langle \vec{E}; d\vec{s} \rangle$$

$\Rightarrow \vec{E}, \vec{D}$ innerhalb des Kondensators ($R_i \leq r \leq R_e$) = ?

Satz vom Hüllenfluß (Gauß): $\oint \vec{D} d\vec{A} = Q$

SYMMETRIE: $\vec{D} = D(r) \cdot \vec{e}_r \sim$ skalar Behandlung!

$\Rightarrow D(r) = 4\pi r^2 = Q$

$\hookrightarrow D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \rightsquigarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r \cdot r^2}$

bzw. $\vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r$

$\Delta U = \int_{R_i}^{R_e} \vec{E} d\vec{s}$ mit $d\vec{s} = dr \cdot \vec{e}_r$

$$= \int_{R_i}^{R_e} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \underbrace{\langle \vec{e}_r; \vec{e}_r \rangle}_{=1} \cdot dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{R_i}^{R_e}$$

$$= \frac{Q \cdot (R_e - R_i)}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r \cdot R_e \cdot R_i}$$

$\Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r \cdot R_e \cdot R_i \cdot Q}{Q \cdot (R_e - R_i)}$

$$C = \frac{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r \cdot R_e \cdot R_i}{(R_e - R_i)}$$

1.2: Da ϵ_r einheitenlos ist, muß k folgendermaßen die Einheit $\frac{1}{m}$ haben. $[k] = \frac{1}{m}$

Da \vec{D} unabhängig von ϵ ist, kann das Zwischenergebnis von 1.1 verwendet werden:

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \text{mit } \epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r = \epsilon_0 \cdot k \cdot r$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \cdot k} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

$$\begin{aligned} \Delta U &= \int_{R_i}^{R_a} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 k} \cdot \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 k} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \right) \Big|_{R_i}^{R_a} \\ &= \frac{Q}{8\pi \epsilon_0 k} \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_a^2} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C = 8\pi \epsilon_0 \cdot k \cdot \frac{R_a^2 \cdot R_i^2}{R_a^2 - R_i^2}$$

1.3: Dazu: Durchflutungsgesetz:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \quad | \text{div}$$

$\text{div rot } \vec{H} = \text{div} \left(\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \right) = 0$: Quellfreiheit des Wirbelfeldes

$$\Leftrightarrow \text{div } \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{D} = 0 \quad ; \quad \text{diff. Ohm's. Gesetz: } \vec{j} = \alpha \cdot \vec{E}$$

$$\Leftrightarrow \text{div } \alpha \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{D} = 0 \quad ; \quad \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \vec{E}$$

$$\frac{\alpha}{\epsilon_0 \epsilon_r} \cdot \text{div } \vec{D} + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{D} = 0 \quad ; \quad \text{div } \vec{D} = j$$

da keine
Elt von Ort!

$$\dot{j}(\vec{r}, t) + \frac{\alpha}{\epsilon_0 \epsilon_r} j(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

Separationsansatz: $j(\vec{r}, t) = f_1(\vec{r}) \cdot f_2(t)$ mit $f_1, f_2 \neq 0$

$$\Rightarrow \text{kürzen mit } f_1(\vec{r}): \quad \dot{f}_2(t) + \frac{\alpha}{\epsilon_0 \epsilon_r} \cdot f_2(t) = 0$$

Hier: betrachte Ladungen auf ortsfesten Elektroden: $f_2(t) = Q(t)$

$$\rightarrow \dot{Q}(t) + \frac{\alpha}{\epsilon_0 \epsilon_r} \cdot Q(t) = 0$$

homogene, lineare DGL 1. Ordnung

Lösungsweg: $Q(t) = A \cdot \exp(s \cdot t)$

char. Polynom: $s = -\frac{\alpha}{\epsilon_0 \epsilon_r}$; $\frac{\epsilon}{\alpha} \hat{=} \text{Relaxationszeit}$

$$\Rightarrow Q(t) = A \cdot \exp\left(-\frac{\alpha}{\epsilon_0 \epsilon_r} \cdot t\right)$$

Anfangsbedingung: $Q_i(t=0) = +Q_0$

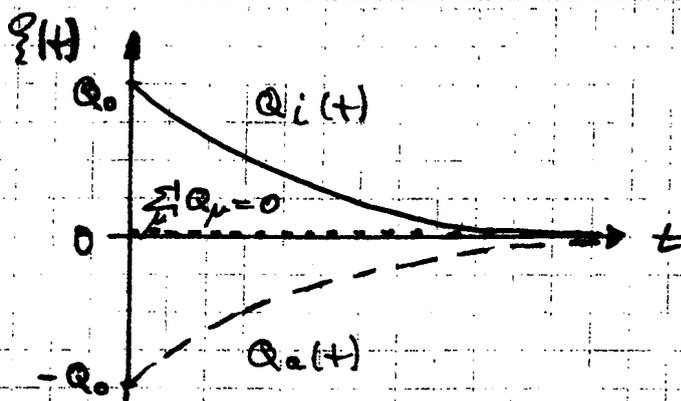
$$\rightarrow Q_i(t=0) = A \cdot \exp(0) = A = +Q_0$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_i(t) = Q_0 \cdot \exp\left(-\frac{\alpha}{\epsilon_0 \epsilon_r} \cdot t\right)}$$

Erhaltungssatz: $\sum_{\mu} Q_{\mu} = \text{const.} \forall t$

$$\rightarrow Q_i(t) + Q_a(t) = +Q_0 + (-Q_0) = 0 \quad \forall t$$

$$\rightarrow \boxed{Q_a(t) = -Q_0 \cdot \exp\left(-\frac{\alpha}{\epsilon_0 \epsilon_r} \cdot t\right)}$$



1.4: Gesetz: $\oint_A \vec{D} d\vec{A} = Q$ gilt $\forall t$

$$\rightarrow \vec{D}(\vec{r}|t) = \frac{Q(t)}{4\pi r^2} \cdot \vec{e}_r \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{Q_0 \cdot \vec{e}_r}{4\pi r^2 \epsilon_0 \epsilon_r} \cdot e^{-\frac{\alpha}{\epsilon} \cdot t}}$$

$$I = \oint_A \vec{g} d\vec{A} = \alpha \cdot E \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow \boxed{I = \frac{\alpha \cdot Q_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} \cdot e^{-\frac{\alpha}{\epsilon} \cdot t}}$$

$$\Delta U = \int_{R_i}^{R_a} E dr = \frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \cdot e^{-\frac{\alpha}{\epsilon} \cdot t} \int_{R_i}^{R_a} \frac{1}{r^2} dr$$

$$\Delta U = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \exp\left(-\frac{\tau}{\epsilon} t\right) \cdot \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}\right)$$

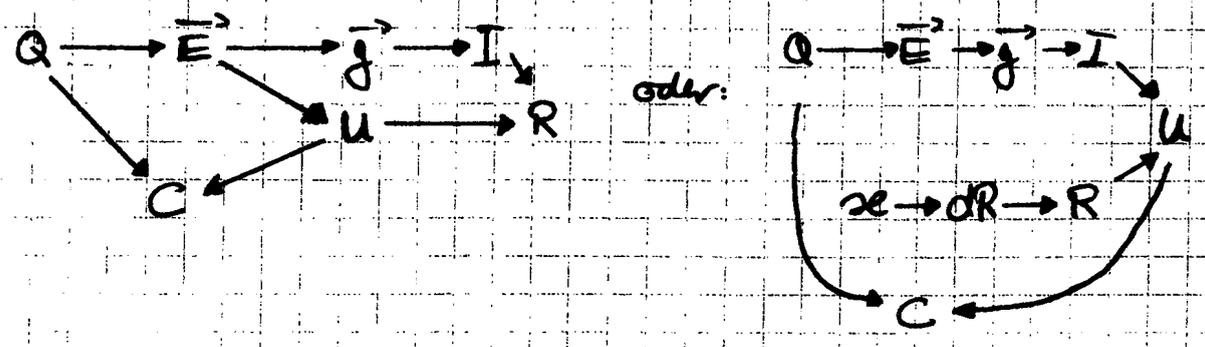
Kapazität: $C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{Q_0 \cdot \exp\left(-\frac{\tau}{\epsilon} t\right) \cdot 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \cdot R_a R_i}{Q_0 \cdot \exp\left(-\frac{\tau}{\epsilon} t\right) \cdot (R_a - R_i)}$

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R_a R_i}{R_a - R_i}$$

Widerstand: $R = \frac{\Delta U}{I} = \frac{Q_0 \cdot \exp\left(-\frac{\tau}{\epsilon} t\right) \cdot (R_a - R_i) \cdot \epsilon_0 \epsilon_r}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r \cdot R_a \cdot R_i \cdot 2 \cdot Q_0 \cdot \exp\left(-\frac{\tau}{\epsilon} t\right)}$

$$R = \frac{R_a - R_i}{4\pi\epsilon_0 \cdot R_a \cdot R_i}$$

1.3.1: Alternative Lösungswege für R und C
 Q sei die Ladung auf der inneren Elektrode,
 Q ist die Ausgangsgröße



1.3.2: $R \cdot C = \frac{R_a - R_i}{4\pi\epsilon_0 R_a R_i} \cdot \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R_a R_i}{R_a - R_i} = \frac{\epsilon_0\epsilon_r}{\epsilon} = \tau_R$

τ_R heißt Relaxationszeit, nach Potenzen
 diese Zeit ist die Duplekte auf $\frac{1}{e}$ ihres Anfangs-
 wertes abgefallen! Dies ist eine materialspezifische
 Größe, von der Geometrie unabhängig

Aufgabe 2:

- 2.1 - 2.2.1 - siehe Musterlösung Klausur H 98/SS 98)
oder 16.10.98; 3. Aufgabe
- siehe Übungen Band 3, Aufgaben 30 und 32

Aufgabe 3:

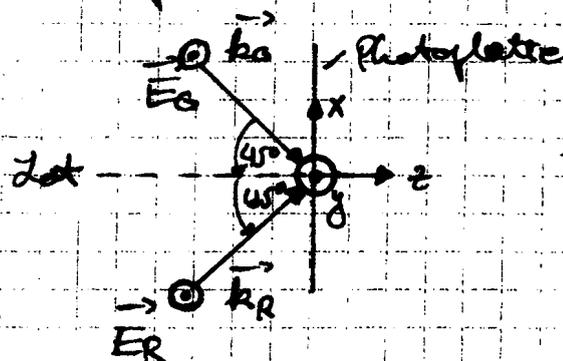
3.1: $\vec{E}_{R,G}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{0R,G} \cdot e^{j\omega_R t} \cdot e^{j\omega_R t} \cdot e^{-j \vec{k}_{R,G} \cdot \vec{r}}$

Charakterisierung:

- homogene Wellen, da $\vec{E}_{0R,G}$ - konst + $f(x,y,z,t)$
- ebene Wellen, da $\vec{k}_{R,G} \cdot \vec{r} = \text{konst.}$ (Punkte konstante Phase) eine Ebene beschreibt
- harmonische Wellen, da $e^{j\omega_R t}$ - Term

3.2: Photoplatte $\hat{=}$ Grenzschicht

hier: \vec{E} ist senkrecht zur Einfallsebene (Einfallsebene $\hat{=}$ Ebene durch Lot und Wellenvektor der einfallenden Welle aufgespannt)



\rightarrow S-polarisiert bzw. TE-polarisiert!

Bestimmung von $\vec{k}_{R,G} = ?$

$\vec{k}_R = ? \quad |\vec{k}_R| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\vec{k}_R = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \vec{k}_R = \frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{E}_R(\vec{r}, t) = E_{0R} \cdot \vec{e}_y \cdot \exp\left[j\left\{\omega_R t - \frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda} \cdot (-x+z)\right\}\right]$

analog: $\vec{k}_G = \frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{E}_G(\vec{r}, t) = E_{0G} \cdot \vec{e}_y \cdot \exp\left[j\left\{\omega_G t - \frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda} \cdot (-x+z)\right\}\right]$

3.3:

$$I(x,y) \sim \left| \underline{\vec{E}}_H(\vec{r},t) \Big|_{z=0} \right|^2$$

$$\Rightarrow I(x,y) = c_1 \cdot \left| \underline{\vec{E}}_H(\vec{r},t) \Big|_{z=0} \right|^2 \text{ mit } c_1 = \text{konst}$$

$$= c_1 \cdot \left[\underline{\vec{E}}_H(\vec{r},t) \cdot \underline{\vec{E}}_H^*(\vec{r},t) \right] \Big|_{z=0}$$

$$\underline{\vec{E}}_H(\vec{r},t) = \underline{\vec{E}}_R(\vec{r},t) + \underline{\vec{E}}_G(\vec{r},t)$$

$$\underline{\vec{E}}_H(\vec{r},t) \Big|_{z=0} = E_{0R} \cdot e^{j\omega_R t} \cdot e^{-jx\sqrt{2}\pi/\lambda} \cdot e^{j\varphi_R} \cdot \vec{e}_y + \dots$$

$$\dots + E_{0G} \cdot e^{j\omega_G t} \cdot e^{jx\sqrt{2}\pi/\lambda} \cdot e^{j\varphi_G} \cdot \vec{e}_y$$

$$\underline{\vec{E}}_H^*(\vec{r},t) \Big|_{z=0} = E_{0R} \cdot e^{-j\omega_R t} \cdot e^{jx\sqrt{2}\pi/\lambda} \cdot e^{-j\varphi_R} \cdot \vec{e}_y + \dots$$

$$\dots + E_{0G} \cdot e^{-j\omega_G t} \cdot e^{-jx\sqrt{2}\pi/\lambda} \cdot e^{-j\varphi_G} \cdot \vec{e}_y$$

$$I(x,y) = c_1 \cdot [E_{0R}^2 + E_{0G}^2 + \dots$$

$$\dots + E_{0R} E_{0G} \cdot \exp\{j\{(\omega_R - \omega_G) \cdot t + (\varphi_R - \varphi_G) - 2x\sqrt{2}\pi/\lambda\}\} + \dots$$

$$\dots + E_{0R} E_{0G} \cdot \exp\{j\{(\omega_R - \omega_G) \cdot t + (\varphi_R - \varphi_G) - 2x\sqrt{2}\pi/\lambda\}\}]$$

$$I(x,y) = c_1 \cdot \{ E_{0R}^2 + E_{0G}^2 + 2 \cdot E_{0R} \cdot E_{0G} \cdot \cos[(\omega_R - \omega_G)t + \varphi_R - \varphi_G - 2x\sqrt{2}\pi/\lambda] \}$$

Stationarität: $\frac{\partial}{\partial t} I(x,y) = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_R = \omega_G}$

$$\Rightarrow \boxed{I_s(x,y) = c_1 \cdot \{ E_{0R}^2 + E_{0G}^2 + 2 E_{0R} E_{0G} \cdot \cos(2x\sqrt{2}\pi/\lambda + \varphi_G - \varphi_R) \}}$$

3u: $0 \leq T(x,y) \leq 1$

$$\min [I_s(x,y)] = c_1 \cdot \{ E_{0R}^2 + E_{0G}^2 + 2 E_{0R} E_{0G} \cdot \min(\cos(\dots)) \}$$

$$= c_1 \cdot \{ E_{0R}^2 - 2 E_{0R} E_{0G} + E_{0G}^2 \} \quad \leftarrow -1$$

$$= c_1 \cdot \{ E_{0R} - E_{0G} \}^2$$

$\min [I_s(x,y)] = 0$ für $E_{0R} = E_{0G}$ macht Sinn!

$$\begin{aligned} \max [I_s(x,y)] &= c_1 \cdot \{ E_{0R}^2 + E_{0G}^2 + 2E_{0R} \cdot E_{0G} \cdot \underbrace{\max |\cos(\dots)|}_{\leq 1} \} \\ &= c_1 \cdot \{ E_{0R} + E_{0G} \}^2 \end{aligned}$$

$$\rightarrow T(x,y) = \frac{I(x,y)}{(E_{0R} + E_{0G})^2}$$

$$\begin{aligned} \underline{3.5:} \quad \vec{E}(\vec{r}, t) &= T(x,y) \cdot \vec{E}_R(\vec{r}, t) - \dots \\ &= \frac{E_{0R}^2 + E_{0G}^2 + 2E_{0R} \cdot E_{0G} \cdot \cos(2x\sqrt{z} \cdot \pi/\lambda + \varphi_G - \varphi_R)}{E_{0G}^2 + 2E_{0R}E_{0G} + E_{0R}^2} \cdot \vec{E}_R(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

mit $\vec{E}_R = E_{0R} \cdot \exp\{j(\omega t + \varphi_R - (x+z)\sqrt{z} \cdot \pi/\lambda)\} \cdot \vec{e}_y$

und $\cos\left(\frac{\sqrt{z} \cdot x \cdot 2\pi}{\lambda} + \varphi_G - \varphi_R\right) = \frac{1}{2} \left[\exp\left\{j\left\{\frac{\sqrt{z} \cdot x \cdot 2\pi}{\lambda} + \varphi_G - \varphi_R\right\}\right\} + \dots \right. \\ \left. \dots + \exp\left\{j\left\{\frac{\sqrt{z} \cdot x \cdot 2\pi}{\lambda} + \varphi_G - \varphi_R\right\}\right\} \right]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t) &= \dots \\ &= \frac{E_{0R}^2 + E_{0G}^2}{[E_{0R} + E_{0G}]^2} \cdot E_{0R} \cdot e_j[\omega t - (x+z) \cdot \sqrt{z} \cdot \pi/\lambda + \varphi_R] \cdot \vec{e}_y + \dots \\ &+ \frac{E_{0R} \cdot E_{0G}}{[E_{0R} + E_{0G}]^2} \cdot E_{0R} \cdot e_j[\omega t - (x+z) \cdot \sqrt{z} \cdot \pi/\lambda + \varphi_G] \cdot \vec{e}_y + \dots \\ &+ \frac{E_{0R} \cdot E_{0G}}{[E_{0R} + E_{0G}]^2} \cdot E_{0R} \cdot e_j[\omega t - (3x+z) \cdot \sqrt{z} \cdot \pi/\lambda + 2\varphi_R - \varphi_G] \cdot \vec{e}_y \end{aligned}$$

Interpretation:

1. Summand entspricht der gedämpften Referenzwelle
2. Summand entspricht der wiedergestellten gedämpften Gegenstandswelle
3. Summand entspricht dem sogenannten „reellen“ Bild,

(d.h. vielmehr zwischen dem Beobachter und dem Hologramm). Dieses reale Bild fehlt zwar auch alle objektbeschreibenden Größen mit sich, jedoch die geänderte Phase hat einen "tiefenverändernden" Effekt zur Folge.

- 3.2.1 :
- siehe Musterlösung Klausur FJ 2002, Aufgabe 3.2.1, mit Änderung $n \pm 1$,
 - siehe Übungen Blatt II, Aufgabe 40

3.2.2: Wellengleichung: $\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = \epsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\vec{r}, t)$

TEM - Welle: keine Komponente in Ausbreitungsrichtung (z -homogen)
 richtung (z): $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$

in Wellengleichung liefert:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x = \epsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x \\ \text{b) } \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_y = \epsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_y \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{2 unabhängige DGL's} \\ \rightarrow E_x \text{ und } E_y \text{ sind} \\ \text{unabhängig voneinander} \\ \text{der} \\ \Rightarrow \text{2 unabhängige} \\ \text{Polarisationsrichtungen} \end{array} \right\}$$

Aufgabe 4:

4.1: Gegeben: harmonische, elektromagnetische TM-Welle
mit positiver y-Ausbreitungsrichtung

TM-Welle: rein transversale magnetische Feld-
komponente! (longitudinale Feld-
komponente $\equiv 0$), d.h.:

$$\boxed{H_y \equiv 0}$$

außerdem: Medium ist bezüglich Störungen in z-Richtung
invariant (egal bei welchem z man beobachtet)

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \vec{A} = \vec{0} \quad (\vec{A}: \text{beliebiger Vektor})$$

2. Maxwellgleichung:

$$\text{rot } \vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y \right) \cdot \vec{e}_x + \left(\frac{\partial}{\partial z} E_x - \frac{\partial}{\partial x} E_z \right) \cdot \vec{e}_y + \left(\frac{\partial}{\partial x} E_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x \right) \cdot \vec{e}_z$$

$$\sim \vec{H} = H_x \cdot \vec{e}_x + H_y \cdot \vec{e}_y + H_z \cdot \vec{e}_z$$

$$\rightarrow H_y \sim \frac{\partial}{\partial z} E_x - \frac{\partial}{\partial x} E_z = 0 \Rightarrow E_z(x) = \text{const.}; \text{ für } x \rightarrow \infty \text{ muß } E_z = 0 \text{ werden für geführte Modus!}$$

$$\boxed{E_z \equiv 0}$$

$$H_x \sim \frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y = 0$$

$$\boxed{H_x \equiv 0}$$

4.2: Die DGLs sind homogene, lineare DGLs 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten (Schwingungs-DGL)

4.3: Ausatz: $\vec{H}(\vec{r}, t) = H_z(x) \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j\beta y} \cdot \vec{e}_z$

(4.2) $\Delta \vec{H}(\vec{r}, t) = \epsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{H}(\vec{r}, t)$ mit $\epsilon \mu = \left(\frac{1}{c_0}\right)^2$

c_0 : Vakuumlichtgeschwindigkeit

da nur z-Komponente betrachtet wird: skalar!

$$\Delta \vec{H}(\vec{r}, t) \Big|_{z\text{-Komp.}} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_z(x) - \beta^2 \cdot H_z(x) \right] \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j\beta y}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{H}(\vec{r}, t) \Big|_{z\text{-Komp.}} = -\omega^2 \cdot H_z(x) \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j\beta y}$$

in (4.2): $\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_z(x) = \left(\beta^2 - \omega^2 \cdot \frac{\mu^2}{c_0^2} \right) \cdot H_z(x) \quad | \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega \cdot \mu}{c_0}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_z(x) = (\beta^2 - k^2) \cdot H_z(x)$$

3 Teilbereiche: Film: $-a < x < a$: $\beta < k_1 \Rightarrow k_1^2 - \beta^2 > 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_z(x) = -q_1^2 \cdot H_z(x)$$

Deckschicht: $a < x$: $\beta > k_2 \Rightarrow \beta^2 - k_2^2 > 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_z(x) = \alpha_2^2 \cdot H_z(x)$$

Substrat: $-a > x$: $\beta > k_3 \Rightarrow \beta^2 - k_3^2 > 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_z(x) = \alpha_3^2 \cdot H_z(x)$$

4.4: Lösungsausätze: mathematisch

Film: char. Polynom: $s^2 = -q_1^2 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j q_1$

\rightarrow ungedämpfte Schwingungen

$$H_z(x) = B \cos(q_1 x) + A \sin(q_1 x)$$

Deckschicht: $s^2 = \alpha_2^2 \Rightarrow s_{1/2} = \pm \alpha_2$

\rightarrow e-Funktionaler Abfall / Aufstieg

$$H_z(x) = A_{21} \cdot \exp(\alpha_2 \cdot x) + A_{22} \cdot \exp(-\alpha_2 \cdot x)$$

Substrat: $s^2 = \alpha_3^2 \Rightarrow s_{1/2} = \pm \alpha_3$

$$H_z(x) = A_{31} \cdot \exp(\alpha_3 \cdot x) + A_{32} \cdot \exp(-\alpha_3 \cdot x)$$

$$H_z(x) = \begin{cases} A_{21} \cdot \exp(\alpha_2 \cdot x) + A_{22} \cdot \exp(-\alpha_2 \cdot x) & ; x > a \\ A_{11} \cdot \cos(q_1 \cdot x) + A_{12} \cdot \sin(q_1 \cdot x) & ; -a < x < a \\ A_{31} \cdot \exp(\alpha_3 \cdot x) + A_{32} \cdot \exp(-\alpha_3 \cdot x) & ; -a > x \end{cases}$$

physikalisch sinnvoll: $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} H_z(x) = 0$

$$\Rightarrow A_{21} = 0 \quad \text{und} \quad A_{32} = 0$$

Grenzflächenbedingungen an das H-Feld: Stetigkeit der

Tangentialkomponente! $H_{tan1} = H_{tan2}$

$$\lim_{x \rightarrow -a} H_z(x) = \lim_{x \rightarrow -a} H_z(x) : \text{Substrat-Eilm-Grenze}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} H_z(x) = \lim_{x \rightarrow a} H_z(x) : \text{Eilm-Deckschicht-Grenze}$$

$$H_z(x) = A \cdot \begin{cases} \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix} (q_1 a) \cdot \exp[-\alpha_2 \cdot (x-a)] & ; x \geq a \\ \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix} (q_1 \cdot x) & ; -a \leq x < a \\ \begin{bmatrix} \cos \\ -\sin \end{bmatrix} (q_1 a) \cdot \exp[+\alpha_3 \cdot (x+a)] & ; x \leq -a \end{cases}$$

4.5: Stetigkeit der tang. H-Feld-Komponente:

$$H_z^-(x)|_{x=a} \stackrel{!}{=} H_z^+(x)|_{x=a}$$

2. Maxwell-Gleichung: $\text{rot } \vec{E} = -j\omega \mu_0 \cdot \vec{H}$
↑
harmonisch

betrachte nur z-Komponente:

$$-j\omega\mu_0 \cdot H_z(x) = \frac{\partial}{\partial x} E_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x$$

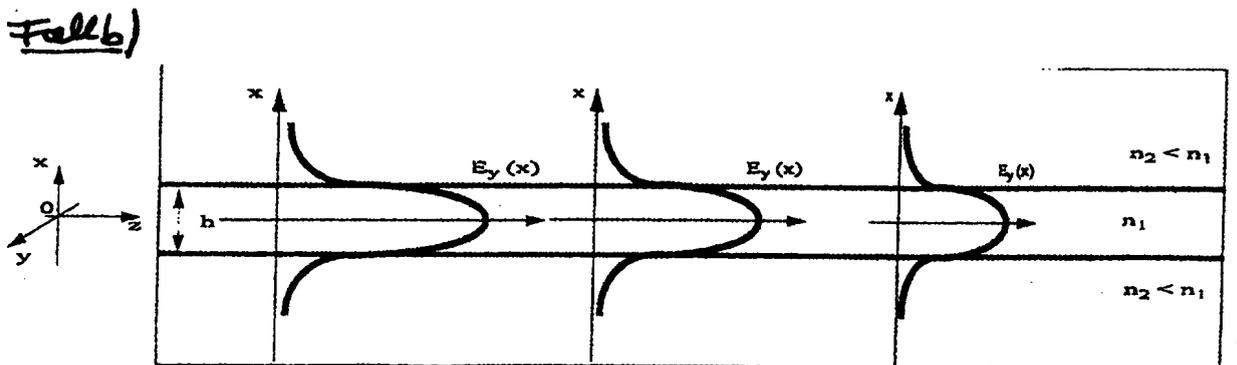
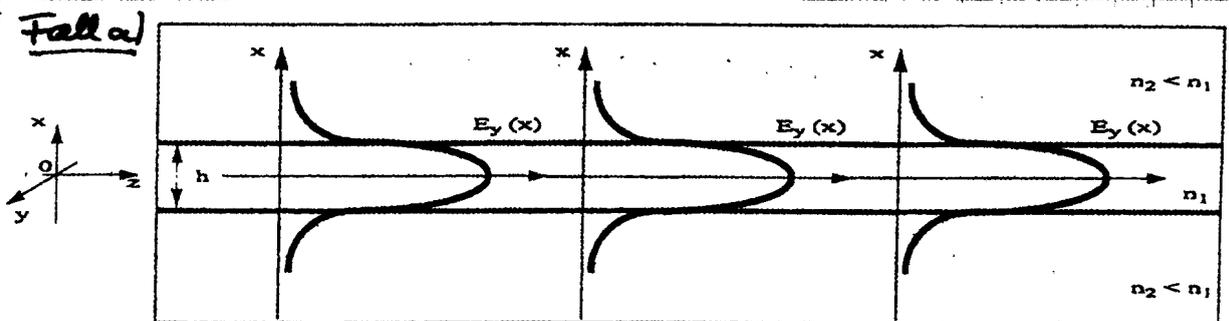
nur Änderungen bzgl. x-Richtung interessant:

$$\Rightarrow \text{mit } H_z^-(x)|_{x=\pm a} = H_z^+(x)|_{x=\pm a}$$

$$\text{folgt: } \frac{\partial}{\partial x} E_y^-|_{x=\pm a} = -\frac{\partial}{\partial x} E_y^+|_{x=\pm a}$$

→ Bedingung der Diffbarheit an die E-Feld-Komponente

4.2.1:



4.2.2: Die Phasenfronten sind in beiden Fällen mit guter Näherung eben. (Bei sehr starker Dämpfung gilt dies nicht mehr!)

4.2.3: β_1 , das sogenannte Phasenmaß, entspricht dem Betrag des Wellenausbreitungsvektors mit dem sich die Wellenformation in der inhomogenen

„Sonderwellenstruktur“ dauerhaft ausbreitet. β kann man als „Querschnittsausbreitungskonstante“ auffassen, die die im Schichtenwellenleiter geführte Welle sieht. β ist demnach von n_1 , n_2 und n_3 abhängig und existiert so auch nur in Ausbreitungsrichtung der Welle.

Diplomhauptprüfung (Frühjahr 2002)

Theoretische Elektrotechnik III

1. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
2. Außer Schreib- und Zeichenmaterial sind keine Hilfsmittel zugelassen (auch kein Taschenrechner)!
3. Die jeweils maximal erreichbare Punktzahl pro Teilaufgabe ist in Klammern am Ende jeder Teilaufgabe angegeben.
4. Es sind alle Aufgaben zu bearbeiten! Die Zusatzaufgaben sind optional.
5. Verwenden Sie ausschließlich die Ihnen ausgeteilten Doppelbögen; nur diese werden bewertet. Trennen Sie die Doppelbögen nicht.
6. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Doppelbogen!
7. Schreiben Sie auf jeden Doppelbogen Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Aufgabe (inklusive der Teilaufgabe), die Sie bearbeiten!
8. Zeigen Sie den gewählten Lösungsweg auf. Geben Sie insbesondere Zwischenergebnisse und Begründungen an. Nur eindeutige Aussagen können bewertet werden!
9. Einige häufig gebrauchte Formeln finden Sie im Anhang.
10. **VIEL ERFOLG!!!**

1. Aufgabe: Homogen geladene dielektrische Kugel

(13 Punkte + 5 Zusatzpunkte)

Gegeben sei eine Kugel aus dielektrischem Material mit $\epsilon_r > 1$. Die Kugel befinde sich im Vakuum und in deren Innenraum sei die Gesamtladung Q **homogen** und **zeitinvariant** verteilt.

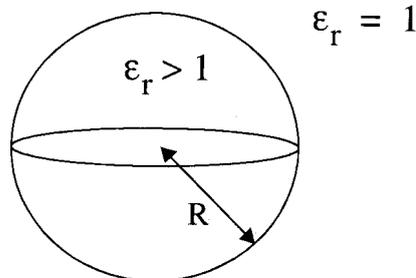


Bild 1: Homogen geladene Kugel aus dielektrischem Material

- 1.1 Berechnen Sie mit Hilfe der **Poissongleichung** in einem geeigneten Koordinatensystem und unter Ausnutzung der vorhandenen Symmetrie die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ im **gesamten Raum**. (4 Punkte)
- 1.2 Verifizieren Sie Ihr Ergebnis unter 1.1 in Hinsicht auf die geltenden Grenzflächenbedingungen. (1 Punkt)
- 1.3 Berechnen Sie das elektrostatische Potential $\varphi(\vec{r})$ im **gesamten Raum** mit dem Bezugspotential $\varphi_0 = \varphi(\vec{r} \rightarrow \infty) = 0$. (3 Punkte)

Gegeben Sei nun eine Probeladung $+q_0$, die sich im elektrostatischen Feld $\vec{E}(\vec{r})$, der in Bild 1 gegebenen geladenen (und ortsfesten!) Kugel, im Raum $r > R$ befindet. Diese Probeladung soll nun auf einer schraubenförmigen Bahn mit dem Radius $\sqrt[3]{2} \cdot R$ und einem im mathematischen Sinne positiven Umlaufsinn von einem Startpunkt P zu einem Zielpunkt Q überführt werden.

Die beiden Punkte P und Q seien in kartesischen Koordinaten gegeben zu:

$$P = [\sqrt{2} \cdot R ; (-\sqrt{7}) \cdot R ; 4 \cdot R] \quad Q = [\sqrt{10} \cdot R ; (-2 \cdot \sqrt{22}) \cdot R ; \sqrt{2} \cdot R]$$

- 1.4 Bestimmen Sie die zu verrichtende Überführungsarbeit als Funktion von q_0 , Q und R und verifizieren Sie das Vorzeichen des Ergebnisses durch einfache Überlegungen. (Begründen Sie „makroskopische“ Schritte!) (5 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 1.Z.1 Leiten Sie ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen allgemein die unter 1.1 verwendete Poissongleichung her. Welche Voraussetzung muß erfüllt sein, damit sich daraus die sogenannte Laplace-Gleichung ergibt und wie lautet diese dann? (3 Punkte)
- 1.Z.2 Beschreiben Sie einen **alternativen** Lösungsweg um die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ aus Aufgabenteil 1.1 und das elektrostatische Potential $\varphi(\vec{r})$ aus Aufgabenteil 1.3 im gesamten Raum zu berechnen. (Es genügt hier nur den prinzipiellen Lösungsweg zu skizzieren!) (2 Punkte)

Aufgabe 2: Gegeninduktivität und Kraft auf eine Leiterschleife im magnetostatischen Feld (13 Punkte + 5 Zusatzpunkte)

Längs der z-Achse verläuft ein vom **Gleichstrom** I_2 durchflossener, **unendlich** langer Linienleiter, der als unendlich große Leiterschleife 2 aufgefaßt wird. Die quadratische, vom **Gleichstrom** I_1 durchflossene Linienleiterschleife 1 liegt gemäß Bild 2.1 in einer zur x-y-Ebene parallelen Ebene. Beide Schleifen sind starr und befinden sich im Vakuum.

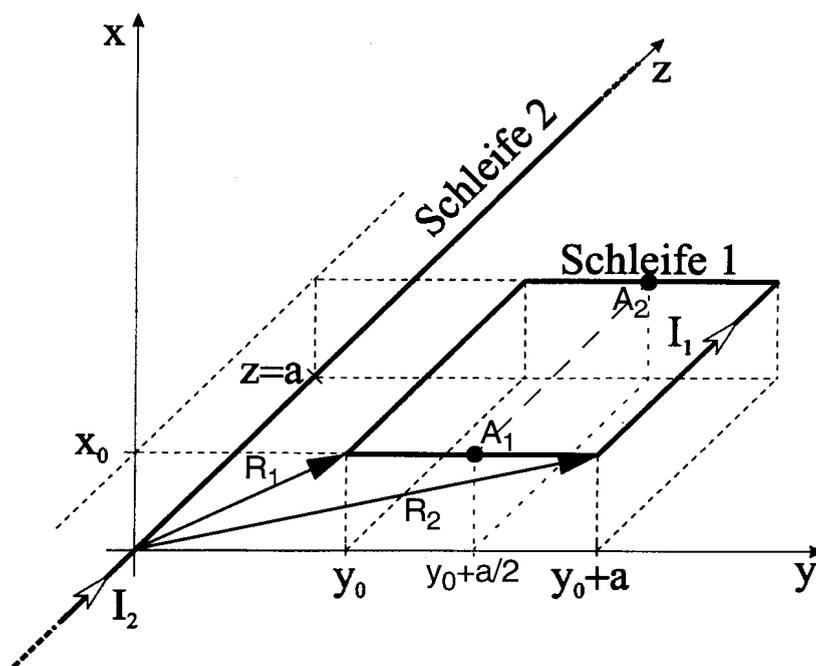


Bild 2.1: Zwei von verschiedenen Gleichströmen durchflossene, starre Leiterschleifen im Raum

- 2.1 Berechnen Sie auf möglichst einfache Art und Weise die von dem unendlich langen Linienleiter erzeugte magnetische Feldstärke $\vec{H}_2(\vec{r})$ im gesamten Raum. (2 Punkte)
- 2.2 Berechnen Sie zunächst den magnetischen Fluß ϕ_{12} in der Schleife 1 aufgrund des durch den Strom I_2 hervorgerufenen Magnetfeldes $\vec{H}_2(\vec{r})$ und zeigen Sie dann mit Hilfe dieses Ergebnisses, daß sich die Gegeninduktivität der Anordnung ergibt zu:

$$L_{12} = \frac{\mu_0 \cdot a}{2\pi} \cdot \ln \left[\frac{R_2}{R_1} \right]. \quad (4 \text{ Punkte})$$

$$\text{mit } R_1^2 = x_0^2 + y_0^2 \text{ und } R_2^2 = x_0^2 + (y_0 + a)^2 \text{ (siehe Bild 2.1).}$$

Auf bewegte Ladungen in einem Magnetfeld wirken Kräfte. Im folgenden werden nur die auf die **Leiterschleife 1** einwirkenden Kräfte betrachtet.

- 2.3 Begründen Sie zunächst, weshalb die auf die Schleife 1 wirkende resultierende Kraft keine Komponente in z-Richtung besitzen kann. (1 Punkt)

Die Schleife 1 sei nun in den beiden Punkten $A_1 = [x_0 ; (y_0 + a/2) ; 0]$ und $A_2 = [x_0 ; (y_0 + a/2) ; a]$ drehbar gelagert.

- 2.4 Berechnen Sie den **Betrag** und die **Richtung** des auf die Leiterschleife 1 einwirkenden Drehmoments \vec{M} . (6 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 2.Z.1 Um welchen Winkel α_{end} dreht sich die drehbar gelagerte Leiterschleife 1 aus der in Bild 2.1 gezeigten Lage, bis sie ihre stabile Endlage erreicht? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 Punkte)
- 2.Z.2 Berechnen Sie unter Verwendung des **Gesetzes von Biot-Savart** die in Aufgabenteil 2.1 zu bestimmende magnetische Feldstärke $\vec{H}_2(\vec{r})$ des unendlich langen Linienleiters (Scheife 2) im Raum. (3 Punkte)

Aufgabe 3: Elektromagnetische Wellen (13 Punkte + 4 Zusatzpunkte)

Gegeben sei das magnetische Feld $\vec{H}(x, y, z, t)$ einer **harmonischen** elektromagnetischen Welle, welche sich im **Vakuum** vom Ursprung aus ausbreitet als:

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \underline{H}_0(x, y) \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{jkz} \cdot \vec{e}_x; \quad \omega, k = \text{konst} > 0.$$

3.1 Um welche Wellenform handelt es sich? Leiten Sie Ihre Aussage mathematisch her. (2 Punkte)

3.2 In welche Richtung und mit welcher Geschwindigkeit breitet sich die Welle aus? Leiten Sie auch hier Ihre Aussage mathematisch her. (3 Punkte)

Im folgenden sei die komplexe Amplitude $\underline{H}_0(x, y)$ des gegebenen magnetischen Feldes $\vec{H}(x, y, z, t)$ unabhängig von den Koordinaten in x- und y-Richtung. Es gilt also: $\underline{H}_0(x, y) = \underline{H}_0 = \text{const}$

3.3 Berechnen Sie unter Verwendung der Maxwell'schen Gleichungen das mit dem magnetischen Feld $\vec{H}(z, t)$ verknüpfte elektrische Feld $\vec{E}(z, t)$. (4 Punkte)

3.4 Wie muß das elektrische Feld einer zweiten Welle beschaffen sein, damit sich der resultierende Feldvektor, der durch Überlagerung der beiden elektrischen Feldanteile entsteht, in einer Ebene $z = \text{const}$ im Uhrzeigersinn auf einer Kreisbahn dreht (bei Blickrichtung in negative z-Richtung)? Beweisen Sie Ihre Aussage mathematisch. (4 Punkte)

Zusatzaufgabe:

3.Z.1 Leiten Sie ausgehend von den **allgemeinen** Maxwell'schen Gleichungen die **zeitfreie Wellengleichung** (Helmholtzgleichung) für die **magnetische** Feldstärke \vec{H} einer sich im Vakuum ausbreitenden harmonischen elektromagnetischen Welle her. (4 Punkte)

4. Aufgabe: Leitungstheorie

(14 Punkte + 4 Zusatzpunkte)

Gegeben sei das in Bild 4.1 dargestellte Netzwerk, das durch einen Generator G , der eine hochfrequente sinusförmige Spannung der Frequenz $f = 10\text{MHz}$ erzeugt, gespeist wird. Weiterhin sei der Generator mit einem Innenwiderstand Z_i behaftet, der identisch zum Wellenwiderstand Z_L der angeschlossenen Leitung der Länge z_1 ist. Die Leitung sei durch ihren Widerstandsbelag von $R' = 600\Omega/\text{km}$, einen Induktivitätsbelag von $L' = 0,25\mu\text{H}/\text{m}$, dem Kapazitätsbelag von $C' = 100\text{pF}/\text{m}$ und einem vernachlässigbar kleinen Leitwertbelag $G' = 0$ charakterisiert. Die Abschlußimpedanz ist rein reell und beträgt $Z_E = 150\Omega$.

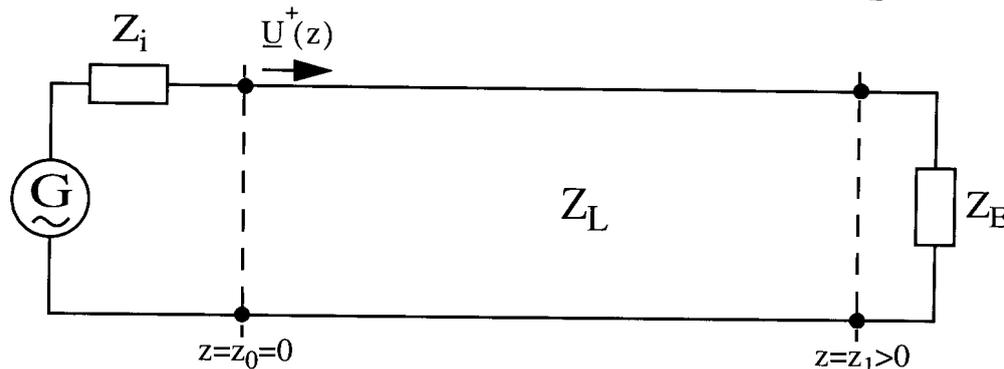


Bild 4.1: Übertragungsleitung gespeist durch einen Generator mit Innenwiderstand Z_i und Abschlußwiderstand Z_E

- 4.1 Berechnen Sie unter der Voraussetzung $R' \ll \omega \cdot L'$ (d.h. für hohe Frequenzen)
 - 4.1.1 den Wellenwiderstand Z_L der Leitung, (1 Punkt)
 - 4.1.2 die komplexe Fortpflanzungskonstante γ , sowie die sich ergebende Dämpfungskonstante α und Phasenkonstante β , (2 Punkte)
 - 4.1.3 die Wellenlänge λ der sich entlang der Leitung ausbreitenden Welle, (1 Punkt)
 - 4.1.4 die Ausbreitungsgeschwindigkeit v_c der Welle. (1 Punkt)

Der Generator erzeugt eine in positive z -Richtung laufende zeitharmonische Spannungswelle der komplexen Amplitude $\underline{U}^+(z) = U_0 \cdot e^{-\gamma \cdot z}$.

- 4.2 Beschreiben Sie anschaulich den weiteren qualitativen Verlauf der Spannungswelle. (3 Punkte)
- 4.3 Bestimmen Sie die den Amplitudenreflexionsfaktor und die komplexe Amplitude der zurücklaufenden Welle zuerst am Ort $z = z_1$ und danach für beliebige Orte $0 \leq z \leq z_1$. (4 Punkte)
- 4.4 Berechnen Sie die komplexe Amplitude der Gesamtspannungswelle $\underline{U}(z)$ auf der Leitung. Wie kann man daraus den Verlauf der Stromwellenamplitude $\underline{I}(z)$ in der Leitung bestimmen? (2 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 4.Z.1 Skizzieren Sie die Momentanbilder der hinlaufenden Spannungswelle auf der Leitung für etwa zwei Wellenlängen für: $t \in \{0, T/4\}$, wobei T der Periodendauer einer Schwingung entspricht. (2 Punkte)
- 4.Z.2 Skizzieren Sie die zeitlichen Verläufe der hinlaufenden Spannungswelle auf der Leitung im Intervall $0 \leq t \leq 2T$ an den Stellen: $z/\lambda \in \{0, 21/4\}$ (2 Punkte)

Formelsammlung

1. Zylinderkoordinaten:

$$\vec{e}_\rho(\phi) = \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\phi \cdot \vec{e}_y$$

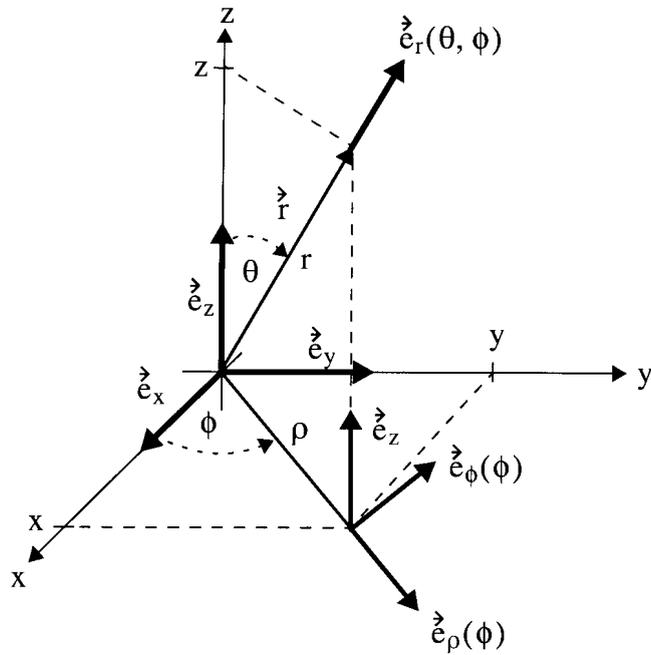
$$\vec{e}_\phi(\phi) = -\sin\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\phi \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{r}(\rho, \phi, z) = \rho \cdot \vec{e}_\rho(\phi) + z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [x\vec{e}_x + y\vec{e}_y]$$

$$\vec{e}_\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y]$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$



2. Kugelkoordinaten:

$$\vec{e}_r(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{e}_r(\theta, \phi) = \sin\theta \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\theta \sin\phi \cdot \vec{e}_y + \cos\theta \cdot \vec{e}_z$$

3. Oberflächen- und Volumenelemente:

$$d\vec{A}(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \cdot \vec{e}_r$$

$$dV(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$

$$d\vec{A}(\rho, \phi, z) = \rho d\phi dz \cdot \vec{e}_\rho$$

$$dV(\rho, \phi, z) = \rho d\rho d\phi dz$$

4. Divergenz und Rotation in Zylinderkoordinaten

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \{\rho A_\rho\} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \{A_\phi\} + \frac{\partial}{\partial z} \{A_z\}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{e}_\rho \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right] + \vec{e}_\phi \cdot \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] + \vec{e}_z \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right]$$

5. Laplace-Operator und Gradient in Kugelkoordinaten

$$\Delta\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \right]$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \cdot \vec{e}_\phi$$

6. Vektoroperationen:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \text{ mit } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$$

7. Näherungsformeln nach Taylorentwicklung um x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

für kleine Winkel α gilt: $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$, od. $\sin \alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{3!}$, $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2!}$.

8. Integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C,$$

$$\int \frac{x dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + C,$$

$$\int \frac{dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \cdot \sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

9. Trigonometrische Funktionen:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

10. Feldtheoretische Zusammenhänge:

Biot-Savartsches Gesetz:
$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Fresnelsche Formeln mit Wellenausbreitungsrichtungen \vec{e}_e , \vec{e}_r und \vec{e}_t :

a) für S-Polarisation:

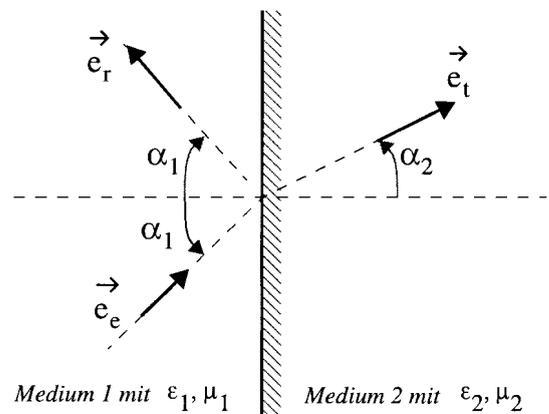
$$\frac{E_r}{E_e} = \frac{Z_2 \cos \alpha_1 - Z_1 \cos \alpha_2}{Z_2 \cos \alpha_1 + Z_1 \cos \alpha_2}$$

$$\frac{E_t}{E_e} = \frac{2Z_2 \cos \alpha_1}{Z_2 \cos \alpha_1 + Z_1 \cos \alpha_2}$$

b) für P-Polarisation:

$$\frac{E_r}{E_e} = \frac{Z_2 \cos \alpha_2 - Z_1 \cos \alpha_1}{Z_2 \cos \alpha_2 + Z_1 \cos \alpha_1}$$

$$\frac{E_t}{E_e} = \frac{2Z_2 \cos \alpha_1}{Z_1 \cos \alpha_1 + Z_2 \cos \alpha_2}$$



Brechzahl und Wellenwiderstand: $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$, $Z = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}}$.

Aufgabe 1:

1.1: Poisson Gleichung: $\Delta \varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho}{\epsilon}$

Raumladungverteilung: $\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 = \text{const.}; & 0 \leq r \leq R \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$

mit $\rho_0 = \frac{3Q}{4\pi R^3}$ und $\epsilon(r) = \begin{cases} \epsilon_0 \cdot \epsilon_r & ; 0 \leq r \leq R \\ \epsilon_0 & ; \text{sonst} \end{cases}$

Symmetrie: Kugelkoordinaten!

Formelsammlung: $\Delta \varphi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \right]$

Symmetrie: $\varphi(\vec{r})$ und $\vec{E}(\vec{r})$ nur von r abhängig!

$$\Rightarrow \Delta \varphi(\vec{r}) = \Delta \varphi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon} \cdot r^2 \quad | \int$$

$$\Leftrightarrow r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = - \int \frac{\rho}{\epsilon} r^2 dr + c_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} \int \frac{\rho}{\epsilon} r^2 dr + c_1/r^2$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi \quad \text{hier: } \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \vec{e}_r$$

$$\rightarrow E(r) = \frac{1}{r^2} \int \frac{\rho}{\epsilon} r^2 dr - c_1/r^2$$

$$\left[\varphi(r) = \int -\frac{1}{r^2} \left(\int \frac{\rho}{\epsilon} r^2 dr \right) dr + \int \frac{c_1}{r^2} dr + c_2 \right]$$

Hier: Einteilung in 2 Bereiche:

1. Bereich: $0 \leq r < R$: $E = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$; $\rho(r) = \frac{3Q}{4\pi R^3} = \text{const.}$

$$E(r) = \frac{1}{r^2} \frac{3Q}{4\pi R^3} \cdot \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \cdot \frac{1}{3} r^3 - \frac{c_1}{r^2}$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r R^3} \cdot r - \frac{c_1}{r^2}$$

Symmetrie: aufhebende Wirkung der Ladungen / Ladungsverteilung

im Ursprung: $E(r=0) = 0 \rightarrow c_1 \stackrel{!}{=} 0$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3} \cdot r$$

2. Bereich: $r > R$: $\epsilon = \epsilon_0$; $\rho(r) = 0$

$$E(r) = \frac{1}{r^2} \int 0 \, dr - \frac{C_1}{r^2} = \frac{C_1'}{r^2}$$

Grenzflächenbedingung: $D_{n1} - D_{n2} = \rho = 0$

$$D_{n1} = \epsilon_0 \epsilon_r E_{n1} \stackrel{!}{=} \epsilon_0 \cdot E_{n2} = D_{n2}$$

$$\Rightarrow D(r=R^-) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3} R \cdot \epsilon_0 \epsilon_r \stackrel{!}{=} \frac{C_1'}{R^2} \cdot \epsilon_0 = D(r=R^+)$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_r R^3} \cdot r & ; 0 \leq r \leq R \\ \frac{1}{r^2} & ; r > R \end{cases}$$

1.2: In der Lösung zu 1.1 hier schon verwendet, da Vollständigkeit wegen:

▷ Tangentialkomponente: $E_{t1} = E_{t2}$

hier sowieso erfüllt, da diese identisch Null für alle r

▷ Normalkomponente: $D_{n1} - D_{n2} = \rho$

da verlustlose Dielektrika: Ladung bleibt ortsfest \rightarrow Flächenladungsdichte ist konstant Null

$$\Rightarrow D_{n1} = D_{n2}$$

$$\Rightarrow E(r=R^-) \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r = E(r=R^+) \cdot \epsilon_0$$

$$\frac{Q \cdot R}{4\pi\epsilon_0 \cdot \epsilon_r R^3} \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot R^2} \cdot \epsilon_0 \quad \checkmark \quad \text{g.e.d.}$$

1.3: elektrostatistisches Potential $\varphi(\vec{r})$

es gilt: $\varphi(r) = - \int E(r) dr + \varphi_B$

Beginne mit äußeren Potential

1. Bruch: $r > R$: $\varphi(r) = - \int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} dr + \varphi_B$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \varphi_B$$

Nebenbedingung: $\varphi(r \rightarrow \infty) \stackrel{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \varphi(r \rightarrow \infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \varphi_B$

$\Rightarrow \varphi_B = 0$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

2. Bruch: $0 \leq r < R$ $\varphi(r) = - \int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r R^3} \cdot r dr + \varphi_B$

$$= - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 \epsilon_r R^3} \cdot r^2 + \varphi_B$$

Stetigkeit des Potentials: $\varphi(r=R^-) \stackrel{!}{=} \varphi(r=R^+)$

$\Rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \stackrel{!}{=} - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 \epsilon_r R^3} \cdot R^2 + \varphi_B$

$\Rightarrow \varphi_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\epsilon_r}\right) - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \cdot \frac{1+2\epsilon_r}{2\epsilon_r}$

$$\varphi_B = \frac{Q \cdot (1+2\epsilon_r)}{8\pi\epsilon_0 \epsilon_r \cdot R}$$

$$\varphi(r) = - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 \epsilon_r R^3} \cdot r^2 + \frac{Q \cdot (1+\epsilon_r)}{8\pi\epsilon_0 \epsilon_r \cdot R}$$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \begin{cases} \frac{1}{r} & ; r > R \\ -\frac{r^2}{2\epsilon_r R^3} + \frac{2\epsilon_r+1}{2\epsilon_r R} & ; 0 \leq r \leq R \end{cases}$$

1.4: Elektrostatik: $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$

\Rightarrow E-Feld ist Gradientenfeld (konservatives Kraftfeld)

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi$$

\Rightarrow Potential beschreibt das Feld eindeutig

\Rightarrow Parametrisierung des Weges unnötig, Überführungsarbeit ist wegenabhängig!

$$W_{\vec{u}}(P \rightarrow Q) = \int_P^Q \vec{F} d\vec{s} = q_0 \cdot \int_P^Q \vec{E} d\vec{s} = q_0 \cdot \{ \varphi(Q) - \varphi(P) \}$$

aus 1.3: $\varphi = \varphi(r)$: $r_Q = \|\vec{r}_Q\| = [10R^2 + 4 \cdot 22 \cdot R^2 + 2 \cdot R^2]^{\frac{1}{2}} = 10R$

$$r_P = \|\vec{r}_P\| = [2 \cdot R^2 + 7 \cdot R^2 + 16R^2]^{\frac{1}{2}} = 5R$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow W_{\vec{u}}(P \rightarrow Q) &= q_0 \cdot \{ \varphi(10R) - \varphi(5R) \} = q_0 \cdot \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{10R} - \frac{1}{5R} \right) \\ &= -q_0 \cdot \frac{Q \cdot 5R}{4\pi \epsilon_0 \cdot 50R^2} = \frac{-q_0 \cdot Q}{40\pi \epsilon_0 R} \end{aligned}$$

$$W_{\vec{u}}(P \rightarrow Q) = -\frac{q_0 \cdot Q}{40\pi \epsilon_0 R}$$

Vorzeichen von $W_{\vec{u}}(P \rightarrow Q)$: $\text{sgn}(W_{\vec{u}}(P \rightarrow Q)) = -1$, da q_0 und Q je positive Ladungen darstellen!

Begründung: Da sich gleichnamige Ladungen abstoßen wird beim Überführen der Probeladung Energie gewonnen und muss nicht dafür aufgebracht werden $\hat{=}$ Aufbringen negativer Energie!

1.2.2: alternativer Weg: Satz von Gauß!

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}' = \iiint_V \rho \, dV (= \sum_i Q_i)$$

Durch Symmetrie $\vec{D} = D \cdot \vec{e}_r$ bzw. $\vec{E} = E \cdot \vec{e}_r$

$$\rightarrow E(r) \cdot \epsilon \cdot 4\pi r^2 = \iiint_V \rho \, dV$$

Trenne in 2 Fälle: 1) $0 \leq r \leq R$: $\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}' = \iiint_V \rho \, dV$

2) $r > R$: $\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}' = Q$

$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r})$ bestimmen

mit $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ bzw. $\varphi(r) = -\int E \, ds + \varphi_B$

$\varphi(r)$ bestimmen

1.2.1: Herleitung der Poisson Gleichung:

2. Maxwell'sche Gleichung: $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} (= \vec{0})$

\Rightarrow Def. des elektrost. Potentials: $\varphi(\vec{r}) = \varphi_0 - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}' \cdot d\vec{s}'$

$\Rightarrow \vec{E} = -\text{grad}\varphi$ (1)

4. Maxwell'sche Gleichung: $\text{div } \vec{D} = \rho$ (2)

aus (1): $\text{div } \vec{D} = \text{div}(\epsilon \cdot \vec{E}) = \epsilon \cdot \text{div } \vec{E} = \rho \quad | \quad \epsilon \neq \epsilon(\vec{r})$

mit (1): $\text{div } \vec{E} = \text{div}(-\text{grad}\varphi) = \frac{\rho}{\epsilon}$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\boxed{\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}}$$

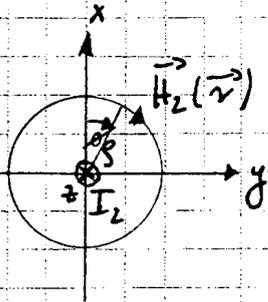
Poisson-Gleichung

Poisson Gleichung $\hat{=}$ Laplace Gleichung bei verschwindender Raumladung

$\rho = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\Delta \varphi = 0}$$

Laplace Gleichung

Aufgabe 2:2.1: Stichwort: Durchflussgesetz!

$$\text{DFG: } \oint_L \vec{H} d\vec{s} = \iint_A \vec{j} d\vec{A} = I_2$$

$$\text{Symmetrie: } \vec{H}_2(\vec{r}) = H_2(\rho) \cdot \vec{e}_\phi(\phi)$$

(Rechtsschraube / Rechte-Hand-Regel)

$$\Rightarrow H_2(\rho) \cdot 2\pi\rho = I_2 \quad \Leftrightarrow \quad H_2(\rho) = \frac{I_2}{2\pi\rho}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H}_2(\vec{r}) = \frac{I_2}{2\pi\rho} \cdot \vec{e}_\phi(\phi)}$$

2.2: Geometrie: magn. Fluss ϕ_{12} (\equiv Fluss in Schleife 1, hervorgerufen durch das Magnetfeld der Schleife 2)

$$\text{allg.: } \phi_{12} = \iint_{A_1} \vec{B}_2 d\vec{A}_1$$

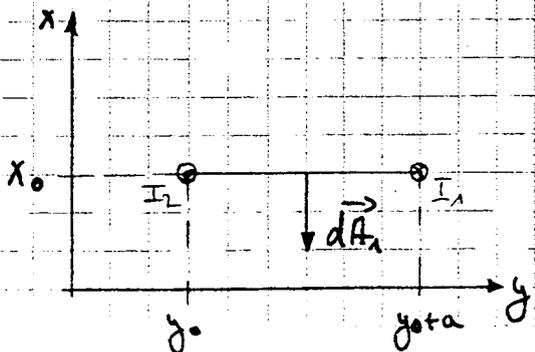
$$\text{aus 2.1: } \vec{B}_2(\vec{r}) = \mu_0 \cdot \vec{H}_2(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi\rho} \cdot \vec{e}_\phi(\phi)$$

in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{e}_\phi = -\sin\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\phi \cdot \vec{e}_y \quad \text{und} \quad \rho^2 = x^2 + y^2$$

$$= \frac{-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y}{[x^2 + y^2]^{1/2}}$$

$$\vec{B}_2(x, y) = \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$



$$d\vec{A}_1 = dy dz \cdot (-\vec{e}_x)$$

$$\text{mit } y_0 \leq y \leq y_0 + a, \quad 0 \leq z \leq a$$

$$\Phi_{12} = \iint_{A_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{A}_1 = \int_{y=y_0}^{y_0+a} \int_{z=0}^a \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi} \cdot \frac{x}{x_0^2 + y^2} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} dz dy$$

|| $x \rightarrow x_0$, da \vec{B} nur in der Ebene x_0 (Schleifenebene) interessiert!

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi} \cdot a \cdot \int_{y=y_0}^{y_0+a} \frac{y}{x_0^2 + y^2} dy = \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \ln \left[\frac{x_0^2 + (y_0+a)^2}{x_0^2 + y_0^2} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi} \cdot a \cdot \ln \left[\frac{R_2^2}{R_1^2} \right] = \frac{\mu_0 \cdot I_2 \cdot a}{4\pi} \cdot 2 \cdot \ln(R_2/R_1)$$

$$\boxed{\Phi_{12} = \frac{\mu_0 \cdot I_2 \cdot a}{2\pi} \cdot \ln(R_2/R_1)}$$

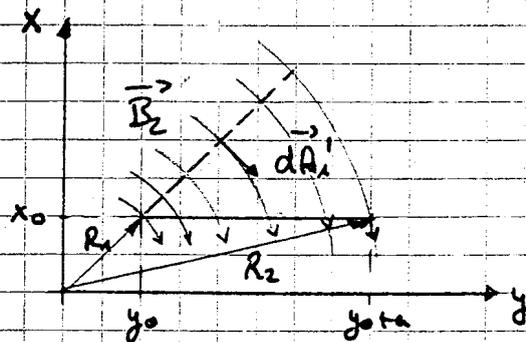
$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2}$$

$$\boxed{L_{12} = \frac{\mu_0 \cdot a}{2\pi} \cdot \ln(R_2/R_1)} \quad \text{q.e.d.}$$

alternativ:

$$\Phi_{12} = \iint_{A_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{A}_1$$

Da alle \vec{B}_2 -Feldlinien, die die Fläche A_1 durchtreten und dort



den Fluss Φ_{12} erzeugen, auch alle

durch die Fläche A_1 hindurch gehen, wird auch dort der Fluss Φ_{12}

feststellbar sein. Der Vorteil der Fläche A_1 ist derjenige, daß das Skalarprodukt $\vec{B}_2 \cdot d\vec{A}_1$ bzw. $\vec{B}_2 \cdot d\vec{A}_1'$ nun ganz einfach bestimmt werden kann:

$$d\vec{A}_1' = dz ds \cdot \vec{e}_\phi \quad ; \quad 0 \leq z \leq a; R_1 \leq s \leq R_2$$

$$\Rightarrow \Phi_{12} = \int_{s=R_1}^{R_2} \int_{z=0}^a \frac{I_2 \cdot \mu_0}{2\pi s} \cdot \vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_\phi \cdot dz ds$$

$$\phi_{12} = \frac{I_2 \cdot \mu_0 \cdot a}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

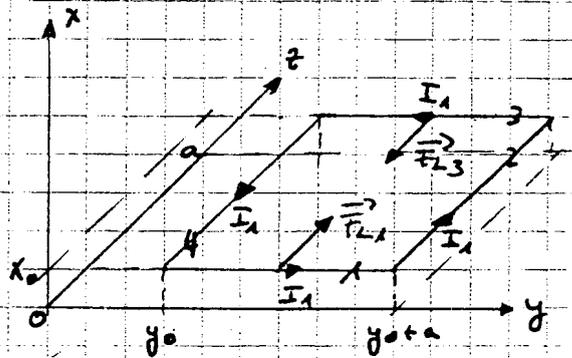
$$L_{12} = \phi_{12} / I_2$$

$$L_{12} = \frac{\mu_0 \cdot a}{2\pi} \cdot \ln(R_2/R_1) \quad \text{g.e.d.}$$

2.3: Betrachte die einzelnen Kräfte auf die 4 Leiterstücke der Schleife 1

nach 2.1 liegt \vec{B}_2 bzw \vec{H}_2 in der x-y-Ebene, es wirkt die Lorentzkraft folgendermaßen:

$$\vec{F}_L = I_1 \cdot \vec{l} \times \vec{B}_2$$



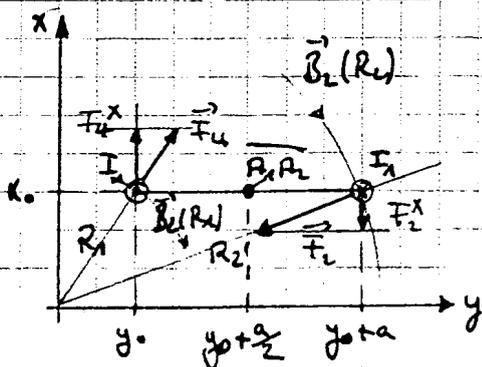
es gilt:

- Stücke 2,4; \vec{l} in $\pm z$ -Richtung $\Rightarrow \vec{F}_L$ in x-y-Ebene
- Stücke 1,3; \vec{l} in $\pm y$ -Richtung $\Rightarrow \vec{F}_L$ in z-Richtung

jedoch kompensieren sich die Beiträge der Stücke 1 und 3, da sie von entgegengesetzten und dem Betrage nach gleich großen Strömen durchflossen werden!

\Leftrightarrow resultierende Kraft auf die Leiterschleife in z-Richtung = $\vec{0}$

2.4: Die Kräfte auf die Leiterstücke 2 und 4 (nach 2.3) erzeugen ein Drehmoment \vec{M} mit dem Hebelarm $\frac{a}{2}$ um die Achse $A_1 A_2$.



Die Kräfte \vec{F}_2 und \vec{F}_4 bewirken eine Rechtsschraubendrehung der Schleife um die Achse $A_1 A_2$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{M} = M \cdot \vec{e}_z}}$$

Für den Betrag von \vec{M} gilt: $M = \frac{a}{2} \cdot (|F_2^x| + |F_4^x|)$

D.h. es genügt lediglich die x -Komponenten von \vec{F}_2 und \vec{F}_4 zu bestimmen!

$$\text{es gilt: } |\vec{F}_2| = I_1 \cdot a \cdot B_2 (\rho = R_2) = \frac{a \cdot \mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi R_2}$$

$$|\vec{F}_4| = I_1 \cdot a \cdot B_2 (\rho = R_1) = \frac{a \cdot \mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi R_1}$$

„Richtungsanpassung“:

$$\frac{F_4^x}{F_4} = \frac{x_0}{R_1}$$

und

$$\frac{F_2^x}{F_2} = \frac{x_0}{R_2}$$

$$\Rightarrow F_4^x = \frac{x_0}{R_1} \cdot F_4 = \frac{a \cdot x_0 \cdot \mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi R_1^2}$$

$$F_2^x = \frac{x_0}{R_2} \cdot F_2 = \frac{a \cdot x_0 \cdot \mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi R_2^2}$$

$$\Rightarrow M = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{x_0 \mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) = \frac{x_0 \mu_0 I_1 I_2 a^2}{4\pi} \cdot \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2 \cdot R_2^2} \cdot \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \frac{x_0 \cdot a^2 \cdot \mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{4\pi} \cdot \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2 \cdot R_2^2} \cdot \vec{e}_z$$

alternativ („dünne“ Rechnung)

$$\vec{M} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_4 \times \vec{F}_4 (= \vec{M}_2 + \vec{M}_4)$$

$$\text{wobei: } \left. \begin{array}{l} \vec{r}_2 = \frac{a}{2} \cdot \vec{e}_y \\ \vec{r}_4 = -\frac{a}{2} \cdot \vec{e}_y \end{array} \right\} \text{Hebelarme!}$$

$$\vec{F}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{B}_2 \cdot I_1 = I_1 \cdot (+a) \cdot \vec{e}_z \times \left[\frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi R_2} \cdot \vec{e}_\phi(\phi) \right] \quad | \vec{e}_z \times \vec{e}_\phi = -\vec{e}_\rho$$

$$\vec{F}_2 = -\frac{I_1 I_2 \cdot a \cdot \mu_0}{2\pi R_2} \cdot \vec{e}_\rho = -\frac{I_1 I_2 \cdot a \cdot \mu_0}{2\pi R_2^2} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 + a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_4 = \vec{r}_4 \times \vec{B}_2 \cdot I_1 = I_1 \cdot (-a) \cdot \vec{e}_z \times \left[\frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi R_1} \cdot \vec{e}_\phi(\phi) \right] \quad | -\vec{e}_z \times \vec{e}_\phi = \vec{e}_\rho$$

$$\vec{F}_4 = \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot a \cdot \mu_0}{2\pi R_1} \cdot \vec{e}_\rho = \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot a \cdot \mu_0}{2\pi R_1^2} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = -\frac{a^2 I_1 I_2 \mu_0}{4\pi R_2^2} \cdot \underbrace{(\vec{e}_y \times (x_0 \vec{e}_x + (y_0 + a) \vec{e}_y))}_{-x_0 \vec{e}_z}$$

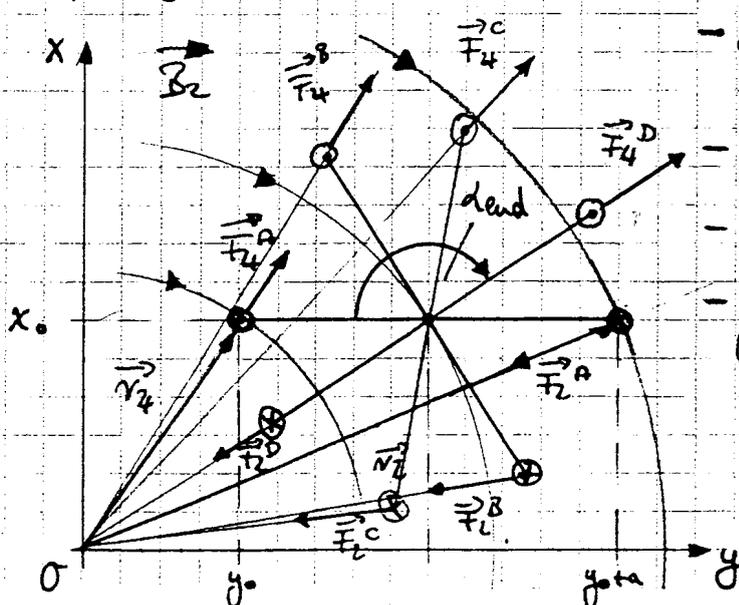
$$\vec{M}_2 = \frac{a^2 I_1 I_2 \mu_0 x_0}{4\pi R_2^2} \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{M}_4 = \vec{r}_4 \times \vec{F}_4 = \frac{a^2 I_1 I_2 \mu_0}{4\pi R_4^2} \cdot \underbrace{(-\vec{e}_y \times (x_0 \vec{e}_x + y_0 \vec{e}_y))}_{+x_0 \vec{e}_z}$$

$$\vec{M}_4 = \frac{a^2 I_1 I_2 \mu_0 x_0}{4\pi R_4^2} \cdot \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \frac{x_0 a^2 I_1 I_2 \mu_0}{4\pi} \cdot \frac{R_2^2 + R_4^2}{R_2^2 \cdot R_4^2} \cdot \vec{e}_z$$

2.7.1: Auch aus 2.3 und 2.4 ersichtlich: \vec{F}_2 bzw. \vec{F}_4 zeigen immer parallel bzw. antiparallel zum Ortsvektor \vec{r}_2 bzw. \vec{r}_4 (klar: laut Lorentzversuch der Kraftvektor senkrecht auf der von \vec{E} und \vec{B} aufgespannten Fläche stehen. Hier: Fläche $\hat{=}$ Mantel eines Zylinders mit Sehne = z-Sehne \rightarrow alle Ortsvektoren vom Ursprung aus \perp dazu!)



- Ausgangslage (siehe 2.4), \vec{F}_2^A, \vec{F}_4^A
Moment $M > 0$ (\rightarrow Rechtsdrehung)

- Moment $M > 0$ (\vec{F}_2^B, \vec{F}_4^B)

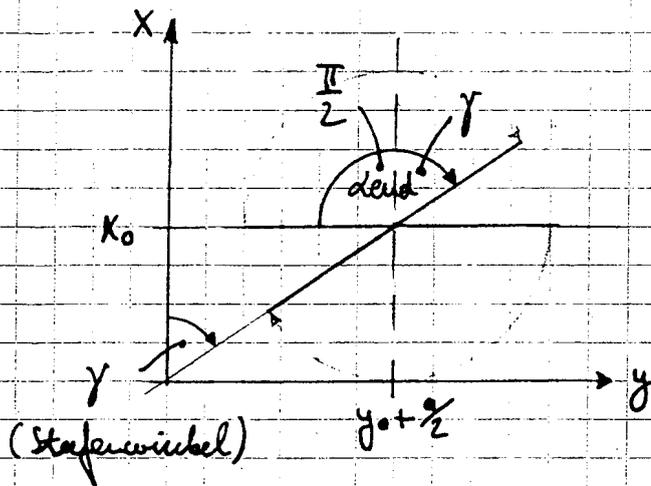
- Moment $M > 0$ (\vec{F}_2^C, \vec{F}_4^C)

- Moment $M = 0$ (\vec{F}_2^D, \vec{F}_4^D)
(keine Komponenten \perp zur Fläche der Schleife mehr!)

\hookrightarrow RUHELAGE!

Bemerkung: Sollte sich die Schleife ev. aus Trägheitsgründen ($M > 0$) über die Ruhelage hinaus drehen, so stellen sich Kräfte ein, die die Schleife wieder zurückdrehen!

(Vgl.: Ausgangslage mit umgekehrtem Stromfluss I_1)



$$\text{deud} = \frac{\pi}{2} + \gamma$$

$$\tan \gamma = \frac{y_0 + \frac{a}{2}}{x_0}$$

$$\Rightarrow \gamma = \arctan\left(\frac{y_0 + \frac{a}{2}}{x_0}\right)$$

$$\text{deud} = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{y_0 + \frac{a}{2}}{x_0}\right)$$

2.2.2: Siehe 7. Übung TEI III Aufgabe 26

Aufgabe 3:

3.1: Gegeben: magn. Feldstärke einer elektromagnetischen Welle zu

$$\underline{H}^{\rightarrow}(x, y, z, t) = \underline{H}_0(x, y) \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{jkz} \cdot \underline{e}_x \quad ; \quad \omega, k > 0$$

Da $\underline{H}_0(x, y)$ abhängig von den Koordinaten x und y ist, handelt es sich hierbei schon einmal um eine inhomogene Welle

Betrachte nun die Form der Phasenfunkt., d.h. die Verteilung der Punkte konstanter Phase zu einem festen Zeitpunkt,

$$\text{d.h.: } e^{j(\omega t + kz)} \Big|_{t = (\text{konst.}) = t_0} = (\text{konst.}) = c_1$$

$$\Leftrightarrow j(\omega t_0 + kz) = c_2$$

$$\Leftrightarrow \omega t_0 + kz = c_3$$

$$\Leftrightarrow k \cdot z = c_3 - \underbrace{\omega t_0}_{\text{konst.}}$$

$$\Leftrightarrow z = \text{konst.}$$

Dieser Ausdruck $z = \text{konst.}$ beschreibt eine Ebene (in x -und y -Richtung).
Es handelt sich also um eine inhomogene ebene Welle.

3.2: Betrachte nun die Ausbreitung der Phase konstanter Phase, d.h. deren zeitlicher Verlauf

$$\Rightarrow e^{j(\omega t + kz)} = (\text{konst.}) = c_1$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{\omega \cdot t}{k} + c_2 \quad \Rightarrow \text{für } t \uparrow \rightarrow z \downarrow : \text{Ausbreitung in neg. } z\text{-Richtung}$$

$$v = \frac{dz}{dt} = -\frac{\omega}{k} = -\frac{2\pi f}{\frac{2\pi}{\lambda}} \cdot \lambda = -\lambda \cdot f = -c_0 : \text{Vakuumlichtgeschwindigkeit}$$

Die elektromagnetische Welle breitet sich also in neg. z -Richtung mit einer Geschwindigkeit von $v = c_0$ aus.

3.3: Es gilt: $H_0(x, y) = H_0$

$$\Rightarrow \vec{H}(x, y, z, t) = \vec{H}(z, t) = H_0 \cdot e^{j(\omega t + kz)} \cdot \vec{e}_x$$

Benutze Durchflutungsgesetz:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \quad ; \quad \text{da } \alpha = 0 \rightarrow \vec{j} = \vec{0}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} \quad \text{da Vakuum}$$

$$\text{harmonisch: } \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{H} = j\omega \epsilon_0 \cdot \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{j\omega \epsilon_0} \cdot \text{rot } \vec{H}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} H_0 \cdot e^{j(\omega t + kz)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_y \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left\{ H_0 \cdot e^{j(\omega t + kz)} \right\} - \vec{e}_z \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left\{ H_0 \cdot e^{j(\omega t + kz)} \right\}$$

$$\text{rot } \vec{H} = H_0 \cdot j \cdot k \cdot e^{j(\omega t + kz)} \cdot \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z, t) = \frac{j \cdot k}{j\omega \cdot \epsilon_0} H_0 e^{j(\omega t + kz)} \cdot \vec{e}_y \quad ; \quad \frac{k}{\omega \epsilon_0} = \frac{2\pi}{\lambda \cdot 2\pi f \cdot \epsilon_0} = \frac{1}{c \cdot \epsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = Z_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(z, t) = H_0 Z_0 \cdot e^{j(\omega t + kz)} \cdot \vec{e}_y}$$

3.4: Gegebenes Feld: $\vec{E}_1(z, t) = \underbrace{E_{01}}_{Z_0 \cdot H_0} \cdot e^{j(\omega t + kz)} \cdot \vec{e}_y$

gesuchtes Feld: $\vec{E}_2(z, t) = E_{02} \cdot e^{j(\omega t + kz + \Delta\varphi)} \cdot \vec{e}_z$

Überlagerung: $\vec{E}_{\text{ges}}(z, t) = \vec{E}_1(z, t) + \vec{E}_2(z, t)$

▷ Betrachte Ebene $z = \text{konst.}$, o.B.d.A.: $z = 0$

▷ „Kreisbahn“ heißt zirkulare Polarisation!

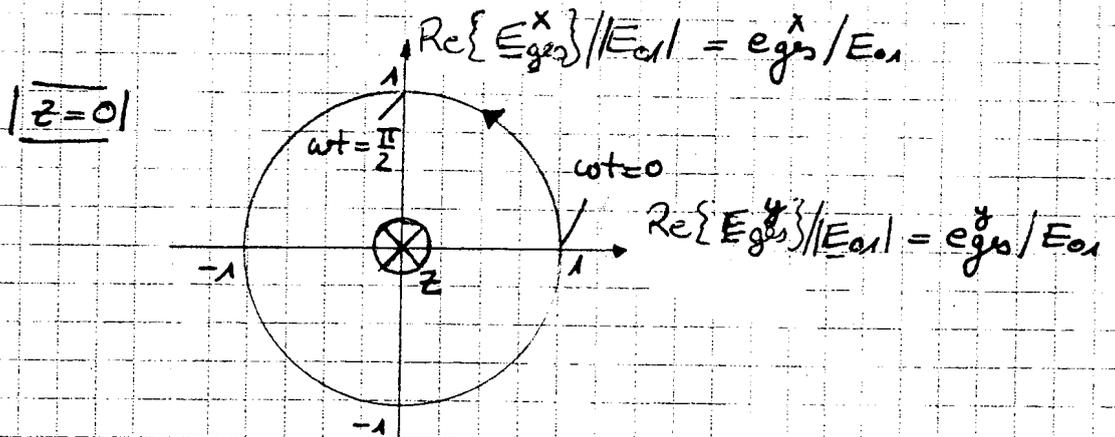
$$\Rightarrow 1.) \vec{e} = \vec{e}_x$$

3.) $\Delta\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ bzw. $|\Delta\varphi| = \frac{\pi}{2}$; Vorzeichen wird durch Drehrichtung bestimmt!

Hier: Drehrichtung:

Blickrichtung in neg. z-Richtung \rightarrow im Uhrzeigersinn
 $\hat{=}$ Blickrichtung in pos. z-Richtung \rightarrow gegen Uhrzeigersinn

Skizze:



$$\left. \begin{array}{l} \omega t = 0: \quad e_{0y}^y = E_{01} \quad \Rightarrow \quad e_{0y}^x = 0 \\ \omega t = \frac{\pi}{2}: \quad e_{0y}^x = 0 \quad \Rightarrow \quad e_{0y}^y = E_{01} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta\varphi = \underline{\underline{-\frac{\pi}{2}}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{E}_2(z,t) = E_{01} \cdot e^{j(\omega t + kt - \frac{\pi}{2})} \cdot \vec{e}_x}}$$

Probe/math. Beweis:

$$\begin{aligned} \vec{e}_{0y}^y(t, z=0) &= \text{Re}\{\vec{E}_1(0,t) + \vec{E}_2(0,t)\} \\ &= \text{Re}\{E_{01} \cdot e^{j\omega t} \cdot (\vec{e}_y + e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \vec{e}_x)\} \quad \text{wähle } \varphi_{01}=0 \\ &= E_{01} \cdot \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_y + E_{01} \cdot \sin(\omega t) \cdot \vec{e}_x \\ &= \underbrace{e_{0y}^y}_{\vec{e}_y} \cdot \vec{e}_y + \underbrace{e_{0y}^x}_{\vec{e}_x} \cdot \vec{e}_x \end{aligned}$$

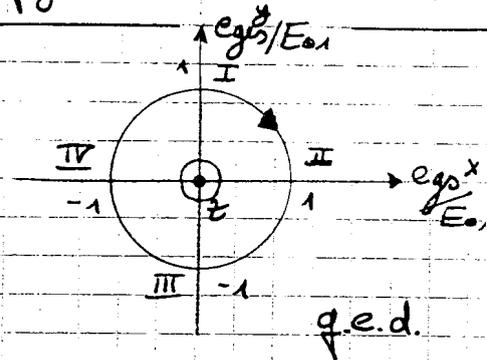
$$\rightarrow \left(\frac{e_{0y}^x}{E_{01}}\right)^2 + \left(\frac{e_{0y}^y}{E_{01}}\right)^2 = \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1 \quad \text{KREISGLEICHUNG.}$$

Drehmoment: (I) $\omega t = 0 \rightarrow \vec{e}_{gs} = E_{0x} \cdot \vec{e}_y$

(II) $\omega t = \frac{\pi}{2} \rightarrow \vec{e}_{gs} = E_{0x} \cdot \vec{e}_x$

(III) $\omega t = \pi \rightarrow \vec{e}_{gs} = -E_{0x} \cdot \vec{e}_y$

(IV) $\omega t = \frac{3\pi}{2} \rightarrow \vec{e}_{gs} = -E_{0x} \cdot \vec{e}_x$



3.2.1: 1.) Durchflutungsgesetz: $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$

2.) Induktionsgesetz: $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$

3.) $\text{div } \vec{B} = 0$; $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \vec{E}$

4.) $\text{div } \vec{D} = \rho$; $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \cdot \vec{H}$

Hier: Vakuum: $\epsilon = \epsilon_0$; $\mu = \mu_0$; $\chi = 0$; $\rho = 0$

harmonische EM-Welle: $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$

$\rightarrow \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \epsilon_0 j\omega \vec{E} \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{1}{j\omega \epsilon_0} \cdot \text{rot } \vec{H}$ (I)

(II) $\text{rot } \vec{E} = -j\omega \mu_0 \cdot \vec{H}$

(I) in (II): $\frac{1}{j\omega \epsilon_0} \cdot \text{rot rot } \vec{H} = -j\omega \mu_0 \cdot \vec{H}$

größenmässiger
Entwicklungs-
satz: $\text{rot rot } \vec{H} = \text{grad div } \vec{H} - \Delta \vec{H} = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \cdot \vec{H}$
 ≤ 0 , da $\text{div } \vec{B} = 0$

$\Rightarrow \Delta \vec{H} + \frac{\omega^2}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \vec{H} = \vec{0}$ mit $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

$$\Delta \vec{H} + \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 \cdot \vec{H} = \vec{0}$$

Aufgabe 4:

4.1: $R' \ll \omega L'$

$$4.1.1: z_L = \sqrt{(R' + j\omega L') / (G' + j\omega C')} = \sqrt{\frac{R'}{j\omega C'} + \frac{L'}{C'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \cdot \sqrt{1 + \frac{R'C'}{j\omega L'^2}}$$

$$\approx \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \left[0,25 \cdot 10^{-6} \frac{\text{H}}{\text{m}} \cdot \frac{1}{100} \cdot 10^{12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \right]^{1/2}$$

$$= \left[25 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-4} \cdot 10^{12} \right]^{1/2} \frac{\sqrt{\text{H}\cdot\text{F}}}{\text{m}} = \left[25 \cdot 10^2 \right]^{1/2} \Omega = 50 \Omega$$

$$z_L = 50 \Omega$$

$$4.1.2: \gamma = \sqrt{(R' + j\omega L') \cdot (G' + j\omega C')} = \sqrt{j\omega R'C' + (j\omega)^2 L'C'}$$

$$= j\omega \sqrt{L'C'} \cdot \sqrt{1 + \frac{R'}{j\omega L'}} \quad ; \text{ mit } \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \text{ f\u00fcr } |x| \ll 1$$

$$\gamma \approx j\omega \sqrt{L'C'} \cdot \left(1 + \frac{R'}{j\omega L' \cdot 2} \right) = j\omega \sqrt{L'C'} + \sqrt{L'C'} \cdot \frac{R'}{2 \cdot L'}$$

$$= j\omega \sqrt{L'C'} + \frac{R'}{2} \cdot \sqrt{\frac{C'}{L'}} = \underbrace{j\omega \sqrt{L'C'}}_{j \cdot \beta} + \underbrace{\frac{R'}{2} \cdot \frac{1}{z_L}}_{\alpha}$$

$$\alpha = \frac{R'}{2} \cdot \frac{1}{z_L} = \frac{6000 \Omega}{\text{km} \cdot 2 \cdot 50 \Omega} = 6 \frac{1}{\text{km}} = 6 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{m}}$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{L'C'} = 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{5} \cdot \sqrt{0,25 \cdot 10^{-6} \frac{\text{H}}{\text{m}} \cdot 100 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}}$$

$$= 2 \cdot 10^7 \cdot \pi \cdot \sqrt{25 \cdot 10^{-18}} \frac{1}{\text{m}} = 2 \cdot 10^7 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \frac{1}{\text{m}}$$

$$\beta = \pi \cdot 10^{-1} \frac{1}{\text{m}}$$

$$\Rightarrow \gamma = 6 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{m}} + j \cdot \pi \cdot 10^{-1} \frac{1}{\text{m}}$$

$$4.1.3: \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\pi \cdot 10^{-1}} \text{ m} \Rightarrow \lambda = 20 \text{ m}$$

$$4.1.4: v_c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{2\pi f \cdot \sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\left[0,25 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^{-12} \right]^{1/2}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-5}} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_c = 2 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

4.2: Die vom Generator erzeugte Spannungswelle $\underline{u}^+(z)$ erfährt an der ersten „Stoßstelle“ bei $z=0$ keine Reflexion, da durch $z_i = z_L = 50\Omega$ Anpassung besteht. Die Welle breitet sich dann längs der Leitung bis zu $z=z_1$ aus und wird auf ihrem Weg aufgrund des nicht vernachlässigbaren Widerstandsbelags der Leitung exponentiell gedämpft.

An der zweiten „Stoßstelle“ bei $z=z_1$ besteht nun Fehlanpassung, da $z_L = 50\Omega + 150\Omega = z_E$ ist. D.h. ein Teil der Welle wird zurückreflektiert, der andere passiert die „Stoßstelle“ (Transmission). Der reflektierte Anteil läuft nun in negative z -Richtung und erfährt längs der Leitung wiederum die schon erwähnte Dämpfung bis er die erste Stoßstelle bei $z=z_0=0$ wieder erreicht. Hier wird die Welle vollständig absorbiert und nicht mehr reflektiert (da $z_L = z_i$).

4.3: $z=z_1$: $\underline{r}(z=z_1) = \frac{z_E - z_L}{z_E + z_L} = \frac{150 - 50}{150 + 50} = \frac{1}{2}$ $\underline{r}(z_1) = \frac{1}{2}$

$$\underline{u}^-(z=z_1) = \underline{r}(z=z_1) \cdot \underline{u}^+(z=z_1) = \frac{1}{2} \cdot u_0 \cdot e^{-\gamma z_1}$$
 $\underline{u}^-(z) = \frac{1}{2} \cdot u_0 \cdot e^{-\gamma z_1}$

z : $\underline{u}^-(z) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot u_0 \cdot e^{-\gamma z_1}}_{\leq \underline{u}^-(z=z_1)} \cdot \underbrace{e^{\gamma \cdot (z-z_1)}}_{\substack{\text{in neg. } z\text{-} \\ \text{Richtung} \\ \text{laufender} \\ \text{Teil!}}}$

$\underline{u}^-(z) = \frac{1}{2} u_0 \cdot e^{\gamma(z-2 \cdot z_1)}$

$$\underline{r}(z) = \frac{\underline{u}^-(z)}{\underline{u}^+(z)} = \frac{1}{2} \cdot u_0 \cdot e^{\gamma(z-2z_1)} \cdot \frac{1}{u_0} e^{\gamma z} \Rightarrow$$

$\underline{r}(z) = \frac{1}{2} \cdot e^{2\gamma(z-z_1)}$

$$4.4: \underline{u}(z) = \underline{u}^+(z) + \underline{u}^-(z) = u_0 \cdot e^{-\gamma z} + \frac{1}{2} u_0 \cdot e^{\gamma(z-2z_1)}$$

$$\underline{u}(z) = u_0 \cdot e^{-\gamma z} \cdot \left[1 + \frac{\frac{1}{2} e^{2\gamma(z-z_1)}}{e^{-\gamma z}} \right]$$

$$\underline{i}(z) = \underline{i}^+(z) - \underline{i}^-(z) = \frac{\underline{u}^+(z)}{z_L} - \frac{\underline{u}^-(z)}{z_L}$$

$$\underline{i}(z) = \frac{u_0}{z_L} \cdot e^{-\gamma z} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} e^{2\gamma(z-z_1)} \right]$$

z.1: Reale physikalische Größen sind nach Vereinbarung gleich dem Realteil der komplexen Amplituden, d.h. $u(z) = \operatorname{Re}\{\underline{u}(z, t)\}$

Hier: nur hinlaufende Spannungswelle!

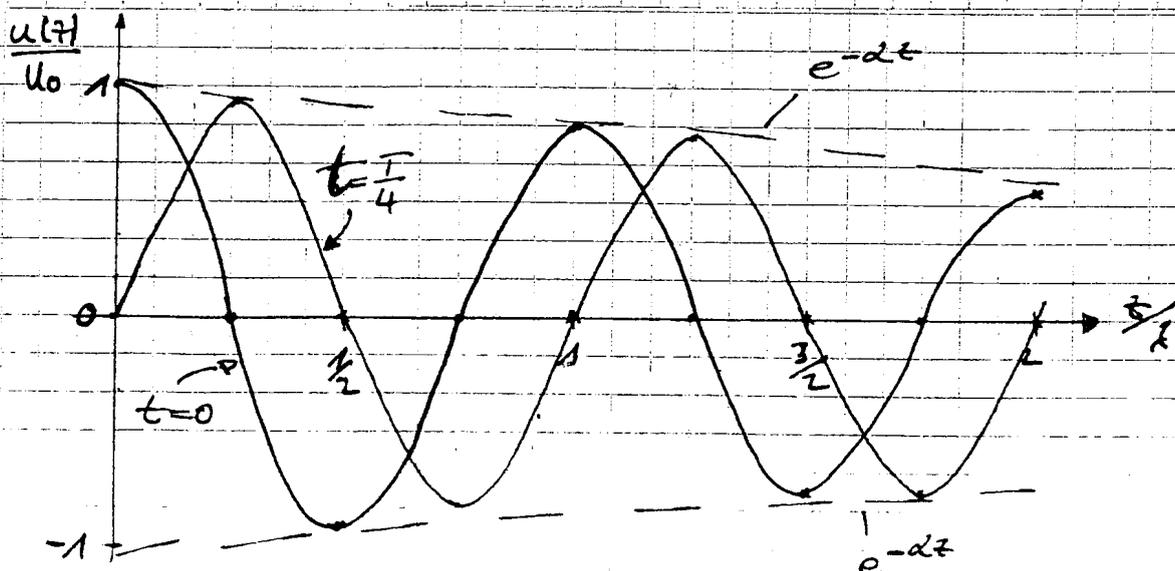
$$\underline{u}^+(z, t) = \underline{u}^+(z) \cdot e^{j\omega t} = u_0 \cdot e^{j\omega t - \gamma z} = u_0 \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{j(\omega t - \beta z)}$$

$$a) t=0: u(z, t=0) = \operatorname{Re}\{u_0 \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z}\} = u_0 \cdot e^{-\alpha z} \cdot \cos(\beta z)$$

$$\frac{u(z, t=0)}{u_0} = e^{-\alpha z} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot z\right)$$

$$b) t = \frac{T}{4}: u(z, t = \frac{T}{4}) = \operatorname{Re}\{u_0 \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{j\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} - \beta z\right)}\} = u_0 \cdot e^{-\alpha z} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta z\right)$$

$$\frac{u(z, t = \frac{T}{4})}{u_0} = e^{-\alpha z} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot z\right)$$



4.7.2: a) $\frac{u(t, z=0)}{u_0} = e^{-\alpha \cdot z} \cdot \cos(\omega t - \beta z) \Big|_{z=0} = \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \quad ; \quad \underline{z=0}$

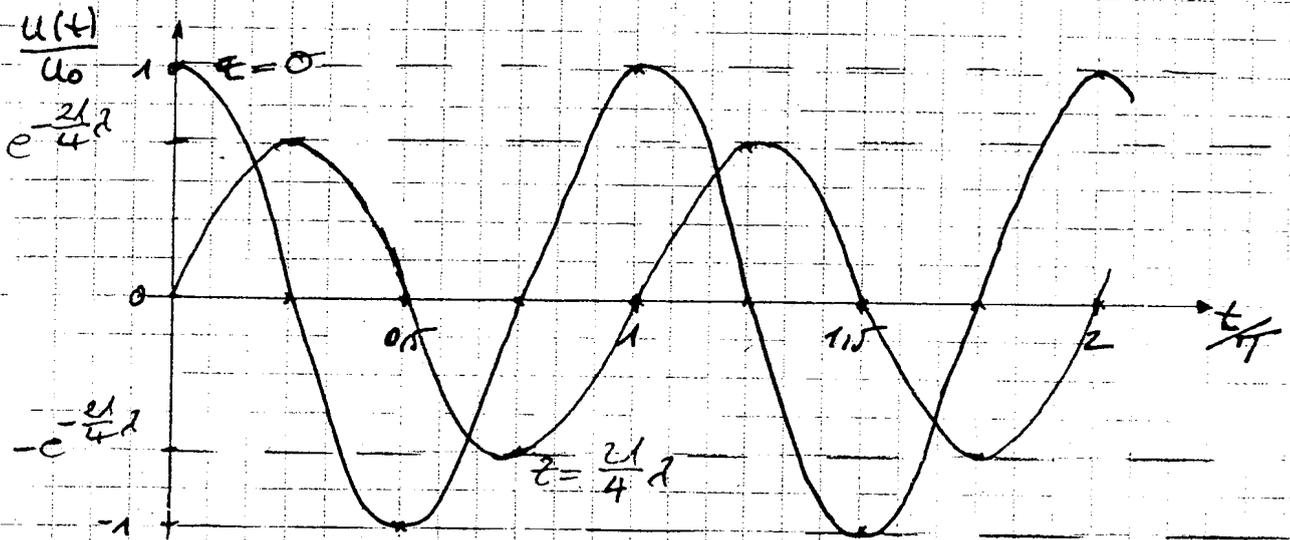
b) $z = \frac{21}{4}\lambda; \quad \frac{u(t, z = \frac{21}{4}\lambda)}{u_0} = e^{-\alpha \cdot \frac{21}{4}\lambda} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{21}{4}\lambda\right)$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{21}{4}\lambda = 21 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \underbrace{5 \cdot 2\pi}$$

$\alpha?$

$5 \times$ die Periode $\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + 5 \cdot 2\pi\right) = \cos\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \frac{u(t, z = \frac{21}{4}\lambda)}{u_0} = e^{-\frac{21}{4}\lambda} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{21}{4}\lambda} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$



Diplomhauptprüfung (Herbst 2002)

Theoretische Elektrotechnik III

1. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
2. Außer Schreib- und Zeichenmaterial sind keine Hilfsmittel zugelassen (auch kein Taschenrechner)!
3. Die jeweils maximal erreichbare Punktzahl pro Teilaufgabe ist in Klammern am Ende jeder Teilaufgabe angegeben.
4. Es sind alle Aufgaben zu bearbeiten! Die Zusatzaufgaben sind optional.
5. Verwenden Sie ausschließlich die Ihnen ausgeteilten Doppelbögen; nur diese werden bewertet. Trennen Sie die Doppelbögen nicht.
6. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Doppelbogen!
7. Schreiben Sie auf jeden Doppelbogen Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Aufgabe (inklusive der Teilaufgabe), die Sie bearbeiten!
8. Zeigen Sie den gewählten Lösungsweg auf. Geben Sie insbesondere Zwischenergebnisse und Begründungen an. Nur eindeutige Aussagen können bewertet werden!
9. Einige häufig gebrauchte Formeln finden Sie im Anhang.
10. **VIEL ERFOLG!!!**

Aufgabe 1: Elektrostatik: Geladener Zylinder mit exzentrischem Zylinderhohlraum (12 Punkte + 6 Zusatzpunkte)

Gegeben sei ein in Längsrichtung (theoretisch) unendlich ausgedehnter, aus dielektrischem Material bestehender Hohlzylinder mit dem Radius R_2 , dessen Längsachse mit der z -Achse zusammenfällt. Dieser Hohlzylinder besitzt einen exzentrischen, zylinderförmigen Ausschnitt mit dem Radius R_1 , dessen Längsachse parallel zur z -Achse liegt und in x - und y -Richtung um a bzw. b verschoben ist (siehe Bild 1.1). Dabei gelte stets $R_1 + \sqrt{a^2 + b^2} \leq R_2$.

Die Anordnung trage eine homogen verteilte und unbewegliche Ladung, die durch die Raumladungsdichte $\rho_0 = \text{konst.} > 0$ beschrieben wird. Der geladene Zylinder habe die Dielektrizitätszahl $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ mit $\epsilon_r = \text{konst.} > 1$, der Hohlraum und der Außenraum ($r > R_2$) haben die Dielektrizitätszahl $\epsilon = \epsilon_0$.

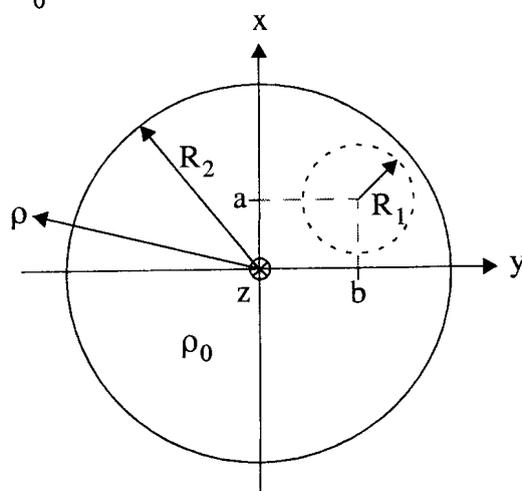


Bild 1.1: Homogen geladener Zylinder aus dielektrischen Material mit exzentrischem Zylinderhohlraum

- 1.1 Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ **außerhalb** des geladenen Zylinders, d.h. für $\rho > R_2$, indem Sie das **Superpositionsprinzip** anwenden. (6 Punkte)

Nun werde der geladene Zylinder mit einer dünnen, aber unendlich gut leitenden **Metallschicht** überzogen und **geerdet**.

- 1.2 Zeigen Sie durch Rechnung wie groß das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ **außerhalb** des geladenen Zylinders, d. h. für $\rho > R_2$, wird. Es gelte $\varphi(\rho \rightarrow \infty) = 0$. (3 Punkte)

Der geladene Zylinder sei nun nicht mehr mit einer Metallschicht überzogen, nicht mehr geerdet und es gelte wieder die Anordnung nach Bild 1.1. Jetzt sei aber das Dielektrikum des Außenraumes (d. h. $\rho > R_2$) **feldabhängig**: $\epsilon = \epsilon(\vec{E}(\vec{r}))$.

- 1.3 Können Sie die Berechnung im allgemeinen auch mit dem Superpositionsprinzip wie in Aufgabenteil 1.1 durchführen? Wenn ja, zeigen Sie die Änderungen für die Berechnung des elektrischen Feldes im Außenraum ($\rho > R_2$) auf! Begründen Sie Ihre Antwort! (3 Punkte)

Zusatzaufgabe:

1.Z.1 Gegeben seien die in Bild 1.2 dargestellten Potentialverläufe $\varphi_{1,2,3}(r)$ verschiedener elektrostatischer Ladungsverteilungen als Funktion des Abstandes r von dem entsprechend geladenen Objekt. Geben Sie anhand grundlegender mathematischer Funktionen eine qualitative Klassifizierung der abgebildeten Funktionsgraphen an.

Wie sehen die entsprechenden Feldstärkeverläufe $E(r)$ aus?

Um welche Ladungsverteilungen bzw. geladenen Objekte könnte es sich dann jeweils handeln? (6 Punkte)

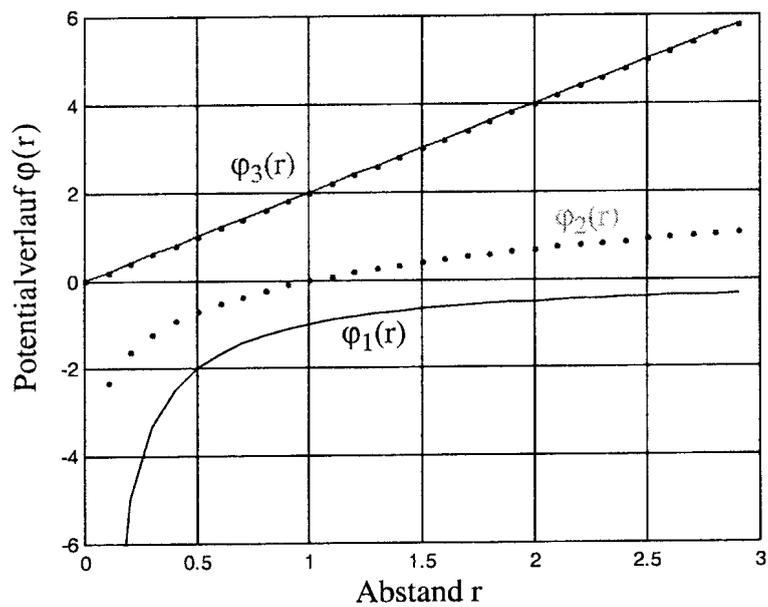


Bild 1.2: Potentialverläufe von verschiedenen elektrostatischen Ladungsverteilungen verschiedener Objekte als Funktion des Abstandes r

Aufgabe 2: Magnetostatik: Magnetfelder verschiedener Linienleiterschleifen und magnetisches Vektorpotential (15 Punkte + 5 Zusatzpunkte)

Die in Bild 2.1 dargestellte kreisförmige Linienleiterschleife mit dem Radius R wird von einem **zeitlich konstanten Strom I** durchflossen und befindet sich im **Vakuum**. Die Schleife liegt in der x - y -Ebene ($z = 0$) des dargestellten Koordinatensystems, wobei deren Kreismittelpunkt von der z -Achse durchstoßen wird.

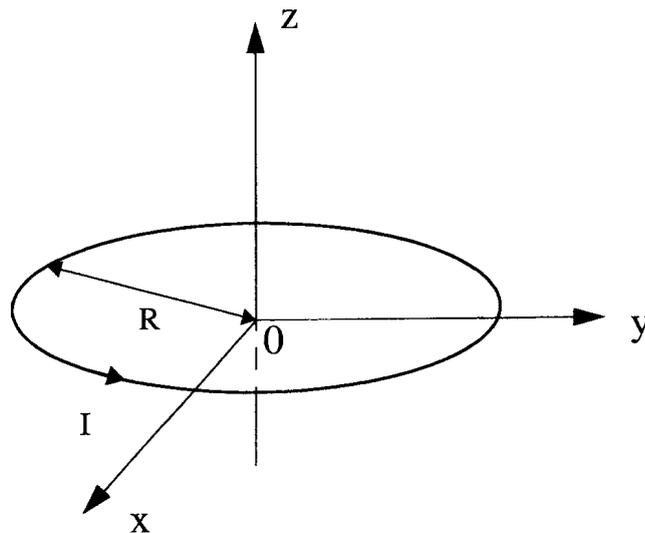


Bild 2.1: Kreisförmige Linienleiterschleife im Vakuum, mit Radius R , vom zeitinvarianten Strom I durchflossen

- 2.1 Zeigen Sie mit Hilfe des Gesetzes von **Biot-Savart**, daß sich das vom Strom I erzeugte Magnetfeld $\vec{H}(\vec{r})$ im **gesamten Raum** in Zylinderkoordinaten ausdrücken läßt als:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I \cdot R}{4\pi} \cdot \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{\cos(\phi') \cdot [z \cdot \vec{e}_\rho(\phi) - \rho \cdot \vec{e}_z] + R \cdot \vec{e}_z}{[\rho^2 + z^2 + R^2 - 2 \cdot \rho \cdot R \cdot \cos(\phi')]^{3/2}} d\phi'.$$

Begründen Sie Ihre Schritte!

(5 Punkte)

- 2.2 Berechnen Sie nun explizit das vom Strom I erzeugte Magnetfeld $\vec{H}(z)$ auf der **z -Achse**.

(1 Punkt)

Anstelle der in Bild 2.1 dargestellten kreisförmigen Leiterschleife sei nun eine **n -eckige** Leiterschleife gemäß Bild 2.2 gegeben. Diese habe die Form eines **regelmäßigen n -Ecks**, das einem Kreis mit dem Radius R einbeschrieben ist und sich im **Vakuum** befindet. Auch hier wird die Linienleiterschleife von einem **zeitlich konstanten Strom I** durchflossen.

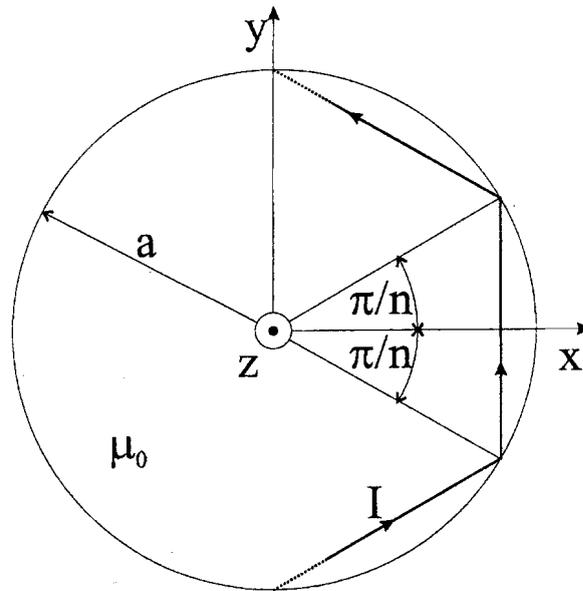


Bild 2.2: Linienleiterschleife in Form eines regelmäßigen n-Ecks, in einem Kreis mit dem Radius R eingeschrieben, befindet sich im Vakuum und wird vom zeitlich konstanten Strom I durchflossen

- 2.3 Für ein beliebiges, ganzzahliges $n \geq 3$ soll mit Hilfe des **Biot-Savartschen Gesetzes** die magnetische Feldstärke $\vec{H}_n(z)$, welche die Schleife auf der **z-Achse** erzeugt, bestimmt werden. (7 Punkte)
- 2.4 Mit wachsendem n nimmt das n-Eck immer mehr die Form des Kreises mit dem Radius R an. Im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ fällt dann das eingeschriebene n-Eck mit dem Kreis zusammen. Zeigen Sie mittels Grenzübergang, daß für $n \rightarrow \infty$ das Ergebnis aus 2.3 mit dem aus 2.2 übereinstimmt, also:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{H}_n(z) = \vec{H}(z). \quad (2 \text{ Punkte})$$

Zusatzaufgaben:

- 2.Z.1 Zeigen Sie, daß sich das **Vektorpotential** $\vec{V}_m(\vec{r})$ eines stromdurchflossenen Kreisringes gemäß Bild 2.1 ergibt zu:

$$\vec{V}_m(\vec{r}) = \frac{I \cdot R \cdot \mu_0}{4\pi} \cdot \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{\cos(\phi') \cdot \vec{e}_\phi(\phi)}{[\rho^2 + z^2 + R^2 - 2 \cdot \rho \cdot R \cdot \cos(\phi')]^{1/2}} d\phi' \quad (2 \text{ Punkte})$$

- 2.Z.2 Wozu wird das magnetische Vektorpotential bevorzugt verwendet? Welche Probleme traten bei der Einführung des Vektorpotentials auf und wie hat man diese gelöst?

(3 Punkte)

Aufgabe 3: Reflexion und Transmission einer ebenen Welle bei senkrechtem Einfall auf eine Grenzfläche (14 Punkte + 6 Zusatzpunkte)

Eine ebene harmonische Welle (Index „E“) fällt senkrecht auf eine ebene, unendlich ausgedehnte, nichtleitende Grenzfläche, siehe Bild 3.1. Beide Teilräume bestehen aus idealem Dielektrikum und haben die Brechzahl n_1 bzw. n_2 . An der Grenzfläche (bei $z = 0$) wird ein Teil der Welle reflektiert (Index „R“) ein anderer Teil transmittiert (Index „T“). Alle Wellenvektoren liegen in der y - z -Ebene. Für die elektrischen Feldvektoren gilt:

$$\vec{E}_{E,R,T} = \underline{E}_{E,R,T} \cdot e^{-j(\vec{k}_{E,R,T} \cdot \vec{r})} \cdot \vec{e}_x,$$

wobei der zeitliche (= harmonische) Term $e^{j\omega t}$ nicht explizit aufgeführt wurde. $\underline{E}_{E,R,T}$ ist die konstante komplexe Amplitude der einfallenden, reflektierten bzw. der transmittierten Welle. Im gesamten Raum gelte $\mu = \mu_0$.

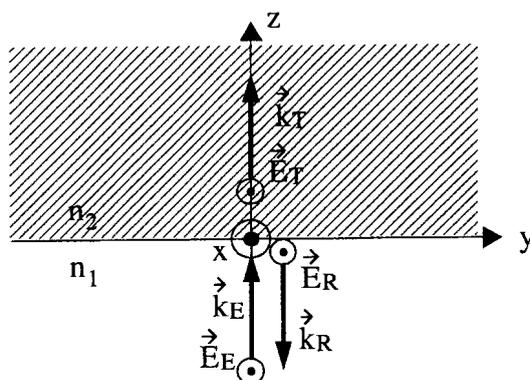


Bild 3.1 Geometrie der ebenen Wellen bei senkrechtem Einfall

- 3.1 **Stellen** Sie die elektrischen Feldvektoren $\vec{E}_{E,R,T}(x, y, z)$ explizit als Funktion von n_1 , n_2 , λ , x , y und/oder z **dar!** (3 Punkte)
- 3.2 **Berechnen** Sie die zu den elektrischen Feldvektoren gehörenden magnetischen Feldvektoren $\vec{H}_{E,R,T}(x, y, z)$! (3 Punkte)
- 3.3 **Berechnen** Sie unter Verwendung der **Grenzflächenbedingungen** den **Amplituden-Reflexionsfaktor** $\Gamma := \frac{E_R}{E_E}$ als Funktion von n_1 , n_2 ! (4 Punkte)
- 3.4 **Berechnen** Sie nun den **Amplituden-Transmissionsfaktor** $\tau := \frac{E_T}{E_E}$ als Funktion von n_1 und n_2 ! (1 Punkt)
- 3.5 Wie lauten in 3.3 bzw. 3.4 die **Leistungsreflexions-** bzw. **-transmissionsfaktoren**? (3 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 3.Z.1 **Berechnen** Sie den Reflexionsfaktor r bei senkrechtem Einfall, wenn der Halbraum für $z > 0$ aus einem Medium mit **unendlich guter Leitfähigkeit** ($\kappa \rightarrow \infty$) besteht! **Deuten** Sie Ihr Ergebnis! *(2 Punkte)*
- 3.Z.2 Angenommen die einfallende elektromagnetische Welle trifft nun gegenüber dem Lot allgemein unter dem Winkel α auf die Grenzfläche auf. Wie nennt man die reflexions- und transmissionfaktorenbeschreibenden Gleichungen allgemein? Nach welchem Gesichtspunkt wird dabei unterschieden? Welche Sonderfälle können jeweils auftreten? Nennen Sie hierfür die Bedingungen an die einfallende Welle und die Eigenschaften der unterschiedlichen dielektrischen Medien! *(4 Punkte)*

Aufgabe 4: Symmetrischer Dielektrischer Wellenleiter

(11 Punkte + 5 Zusatzpunkte)

Um die mathematische Problembehandlung der Lichtführung in optischen Fasern zu vereinfachen, ist es beliebt grundlegende Betrachtungen an sogenannten dielektrischen Film- oder auch Schichtwellenleitern vorzunehmen. Darüber hinaus kommt diesen ja auch insbesondere im Bereich der Integrationstechnik ebenfalls eine wesentliche Bedeutung zu. Schichtwellenleiter bestehen aus dielektrischen, als verlustlos (d.h. nichtleitend) angenommenen Schichten unterschiedlicher Brechzahlen. Wie Bild 4.1 zeigt, sind die verschiedenen Schichten sowohl in y- als auch in z-Richtung unendlich ausgedehnt.

Lediglich in x-Richtung ist hier eine Begrenzung der inneren Schicht, der sogenannten „Wellenleiter Schicht“, auf eine endliche Höhe $h = 2 \cdot a$ gegeben.

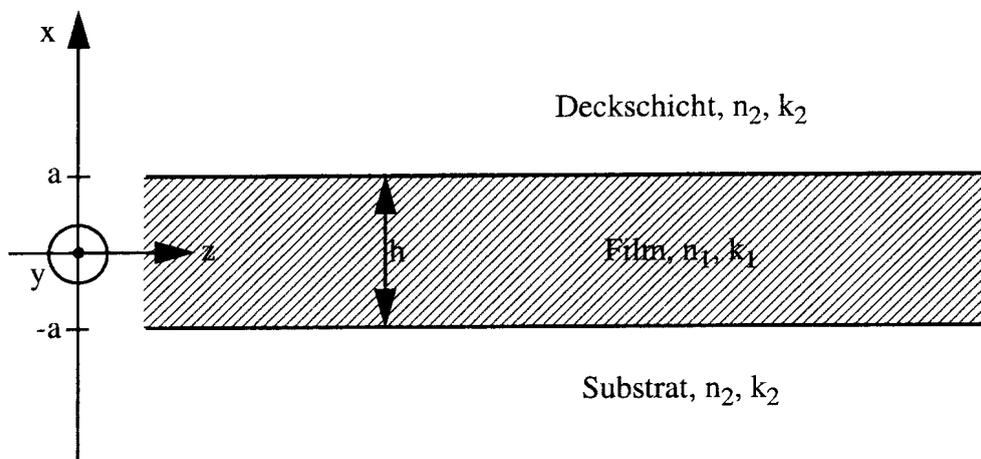


Bild 4.1 Schematischer Aufbau eines symmetrischen Filmwellenleiters der Filmdicke h

Um der Forderung nach stationärer und verlustloser Lichtführung nachzukommen, muß sowohl an der Grenzfläche zur Deckschicht als auch zum Substrat hin Totalreflexion auftreten.

4.1 Welche Bedingungen müssen für die Brechungsindizes n_1 und n_2 und die Filmdicke h gelten? (1 Punkt)

Eine sich im Filmwellenleiter ausbreitende Welle stellt eine Lösung der allgemeinen Wellengleichung (hier für das E-Feld)

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \left(\frac{n}{c_0}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (\text{Gl. 4.1})$$

unter Berücksichtigung der entsprechenden Randbedingungen dar.

Für die elektrische Feldkomponente der Lichtwelle wird folgender Ansatz gewählt:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = E_y(x) \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_y. \quad (\text{Gl. 4.2})$$

4.2 Charakterisieren Sie die durch das \vec{E} -Feld nach Gl. 4.2 beschriebene elektromagnetische Welle. (2 Punkte)

Im weiteren werden folgende Substitutionen mit der jeweiligen Freiraum-Ausbreitungs-Konstanten k_μ in den 3 Teilräumen vereinbart:

$$q = \sqrt{k_1^2 - \beta^2} \quad \text{für } |x| < a \quad (\text{Gl. 4.3a})$$

$$\kappa = \sqrt{\beta^2 - k_2^2} \quad \text{für } a < |x| < \infty \quad (\text{Gl. 4.3b})$$

mit $k_\mu = \frac{n_\mu \cdot \omega}{c_0}$, $\mu \in \{1, 2\}$ und c_0 der Vakuumlichtgeschwindigkeit.

- 4.3 Bestimmen Sie unter Verwendung der Substitutionen nach Gl. 4.3a, b mit Hilfe des Ansatzes (Gl. 4.2) die sich aus Gl. 4.1 ergebenden vereinfachten Wellengleichungen als Funktionen von q und κ . (4 Punkte)
- 4.4 Nutzen Sie nun die **Grenzflächenbedingungen** aus, um einen Ansatz zur Verteilung der elektrischen Feldamplitude $E_y(x)$ aus Gl. 4.2 zu finden. Unterscheiden Sie dabei gerade und ungerade Feldverteilungen (Moden). (4 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 4.Z.1 Skizzieren Sie die sich ergebende E-Feld-Verteilung **qualitativ** für den ersten geraden und ungeraden Modus. (2 Punkte)
- 4.Z.2 Bestimmen Sie in Abhängigkeit von der ermittelten elektrischen Feldstärkeverteilung $E_y(x)$ den zugehörigen **magnetischen Feldstärkevektor** $\vec{H}(\vec{r}, t)$. (3 Punkte)

Formelsammlung

1. Zylinderkoordinaten:

$$\vec{e}_\rho(\phi) = \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\phi \cdot \vec{e}_y$$

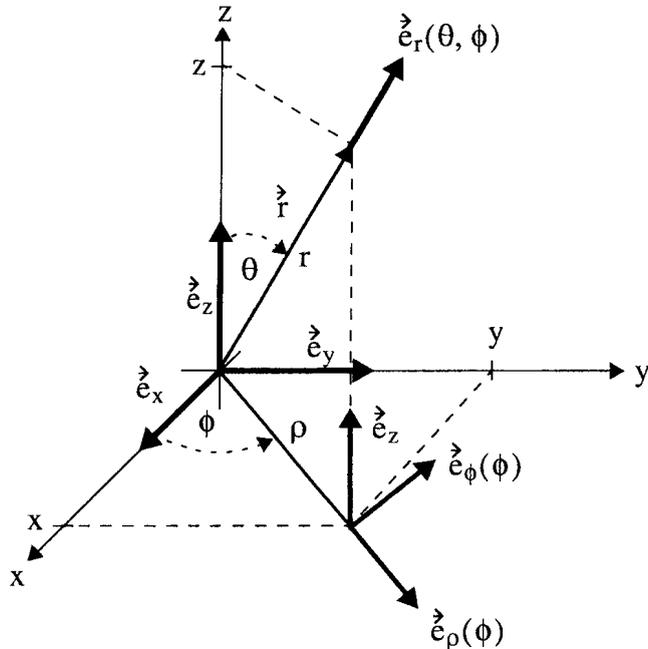
$$\vec{e}_\phi(\phi) = -\sin\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\phi \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{r}(\rho, \phi, z) = \rho \cdot \vec{e}_\rho(\phi) + z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [x\vec{e}_x + y\vec{e}_y]$$

$$\vec{e}_\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y]$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$



2. Kugelkoordinaten:

$$\vec{e}_r(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{e}_r(\theta, \phi) = \sin\theta \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\theta \sin\phi \cdot \vec{e}_y + \cos\theta \cdot \vec{e}_z$$

3. Oberflächen- und Volumenelemente:

$$d\vec{A}(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \cdot \vec{e}_r \quad dV(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$

$$d\vec{A}(\rho, \phi, z) = \rho d\phi dz \cdot \vec{e}_\rho \quad dV(\rho, \phi, z) = \rho d\rho d\phi dz$$

4. Divergenz und Rotation in Zylinderkoordinaten

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \{\rho A_\rho\} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \{A_\phi\} + \frac{\partial}{\partial z} \{A_z\}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{e}_\rho \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right] + \vec{e}_\phi \cdot \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] + \vec{e}_z \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right]$$

5. Laplace-Operator und Gradient in Zylinderkoordinaten

$$\Delta U(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \cdot \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \phi} \cdot \vec{e}_\phi + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \vec{e}_z$$

6. Laplace-Operator und Gradient in Kugelkoordinaten

$$\Delta\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \right]$$

$$\text{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \cdot \vec{e}_\phi$$

7. Vektoroperationen:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \quad \text{mit } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$$

8. Näherungsformeln nach Taylorentwicklung um x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

für kleine Winkel α gilt: $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$, od. $\sin \alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{3!}$, $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2!}$.

9. Integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C,$$

$$\int \frac{x dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + C,$$

$$\int \frac{dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \cdot \sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

10. Trigonometrische Funktionen:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

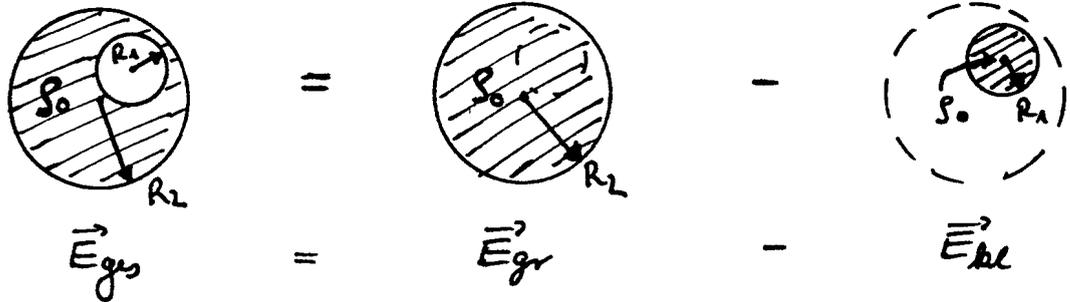
11. Feldtheoretische Zusammenhänge:

Biot-Savartsches Gesetz:
$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Magnetisches Vektorpotential:
$$\vec{V}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \cdot ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Aufgabe 1:

1.1: Superpositionsprinzip:



Zylinder-Symmetrie: $\vec{E} = E \cdot \vec{e}_\rho(\phi)$

Satz von Gauß: $\oint_{A=\partial V} \vec{D} d\vec{A} = \iiint_V \rho dV = \rho_0 \cdot \iiint_V dV$; da $\rho_0 = \text{const}$

Betrachte nur Außenraum $\Rightarrow \rho \geq R_2$

1. großer Zylinder: $\vec{E}_{gr} = ?$

$$\oint_A \vec{D} d\vec{A} = D_\rho(\rho) \cdot 2\pi\rho \cdot L = \rho_0 \cdot \pi \cdot R_2^2 \cdot L$$

$$\Leftrightarrow D(\rho) = \frac{\rho_0 \cdot R_2^2}{2 \cdot \rho} \quad ; \quad E(\rho) = \frac{D(\rho)}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{gr} = \frac{\rho_0 \cdot R_2^2}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \vec{e}_\rho(\phi)$$

2. kleine Zylinder: $\vec{E}_{kl} = ?$

a) im Ursprung: analog zu 1.) $\vec{E}_{kl} = \frac{\rho_0 \cdot R_1^2}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \vec{e}_\rho(\phi)$

b) Exzentrisch: Verschiebung in x um a und y um b, dazu:

Umwandlung in kartes. Koordinaten

$$\rho^2 = x^2 + y^2; \quad \vec{e}_\rho(\phi) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \vec{e}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{kl} = \frac{\rho_0 \cdot R_1^2}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad : \text{im Ursprung}$$

\Rightarrow Verschiebung: $x \rightarrow x - a \quad ; \quad y \rightarrow y - b$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{bel}} = \frac{\rho_0 \cdot R_1^2}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

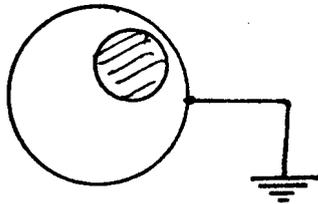
\vec{E}_{gr} in kartes. Koordinaten:

$$\vec{E}_{\text{gr}} = \frac{\rho_0 \cdot R_2^2}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{E}_{\text{ges}}(x,y) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \cdot \left\{ \frac{R_2^2}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{R_1^2}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \right\}$$

für $x^2 + y^2 \geq R_2^2$

- 1.2



$$\varphi(\rho \rightarrow \infty) = 0 \quad 1$$

$$\varphi(\rho = R_2) = 0$$

$\Delta\varphi = -\frac{\rho_0}{\epsilon}$: Poisson-Gleichung

$$\Delta\varphi|_{\text{zyl. Koord.}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

für $\rho \geq R_2$: $\rho_0 = 0 \Rightarrow$ Laplace-Gleichung : $\Delta\varphi \stackrel{!}{=} 0$

wegen Symmetrie gilt: $\varphi = \varphi(\phi, z)$

$$\rightarrow \Delta\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad | \cdot \rho |$$

$$\rightarrow \rho \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = c \quad | \cdot \frac{1}{\rho}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{c}{\rho} \Rightarrow \varphi(\rho) - \varphi(R_2) = c \cdot \ln(\rho) - c \cdot \ln(R_2)$$

$$\varphi(\rho) = c \cdot \ln\left(\frac{\rho}{R_2}\right)$$

$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \varphi(\rho) \stackrel{!}{=} 0$, da $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{\rho}{R_2}\right) \rightarrow \infty \Rightarrow c \equiv 0$

$$\rightarrow \varphi(\rho)|_{\rho \geq R_2} = 0$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{E} = \vec{0}, \rho \geq R_2}$$

1.3: Bei der Berechnung der Teilaufgabe 1.1

Seite 3/15

für $\vec{D}_{ges} = \vec{D}_{gr} - \vec{D}_{bl}$ spielt eine wertvolle
Abhängigkeit $\epsilon = \epsilon(\vec{E})$ bis dahin keine Rolle.

$\Rightarrow \vec{E}_{ges} = \frac{\vec{D}_{ges}}{\epsilon(\vec{E})}$ läßt sich somit mit dem
Superpositionsprinzip durchführen!

Problematisch: da $\epsilon = \epsilon(\vec{E})$ wird das Auflösen von
 $\vec{E}_{ges} = \frac{\vec{D}_{ges}}{\epsilon(\vec{E})}$ äußerst kompliziert!

1.2.1: $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ bzw. $E(r) = -\frac{d}{dr} \varphi(r)$

Potential	E-Feld	geladene Objekte/Ladungsverh.
1. $\varphi_1(r) = -\frac{1}{r} \cdot c_1$	$E_1(r) = -\frac{c_1}{r^2}$	1 Punktladung
2. $\varphi_2(r) = \ln r \cdot c_2$	$E_2(r) = -\frac{c_2}{r}$	2 Linienladung / gerader ∞ - ausgedehnter Faden
3. $\varphi_3(r) = r \cdot c_3$	$E_3(r) = -c_3$	3 ∞ ausgedehnte Ebene gl. Fläche, Flächenladung

Anmerkung: Die Ladungen bzw. die Ladungsdichten sind negativ.

Aufgabe 2:

2.1: siehe Übungen in Theoretischer Elektrotechnik III
Blatt 8; Aufgabe 30a

2.2: siehe 2.1

bzw. nutze die in 2.1 gegebene Formel aus:

auf z -Achse: $\vartheta = 0$

$$\Rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}(z) = \frac{I \cdot R}{4\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{\cos(\phi') \cdot [z \cdot \vec{e}_\phi(\phi') + R \cdot \vec{e}_z]}{[R^2 + z^2]^{3/2}} d\phi'$$

$$\Rightarrow \vec{H}(z) = \frac{I \cdot R}{4\pi} \cdot \frac{R \cdot \vec{e}_z}{[R^2 + z^2]^{3/2}} \cdot 2\pi$$

$\ll 0$, da Integral eine
trig. Fkt. über ein ganzzahlig
Vielfaches der Periodendauer
genau Null ergibt!

$$\vec{H}(z) = \frac{I \cdot R^2}{2 \cdot [R^2 + z^2]^{3/2}} \cdot \vec{e}_z$$

2.3: $n \geq 3$; Biot-Savart: $\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

Gesucht: $\vec{H}_n(z)$

Tatsache: * wird die Leiterschleife um ein ganzzahliges Vielfaches
von $\frac{2\pi}{n}$ um die z -Achse gedreht, so geht die Leiter-
schleife wieder in sich selbst über

\Rightarrow auch das Magnetfeld geht dann wieder in sich selbst über

$\Rightarrow \vec{H}_n(z)$ kann keine x - und y -Komponente haben, da
diese bei der Drehung nicht in sich selber übergehen

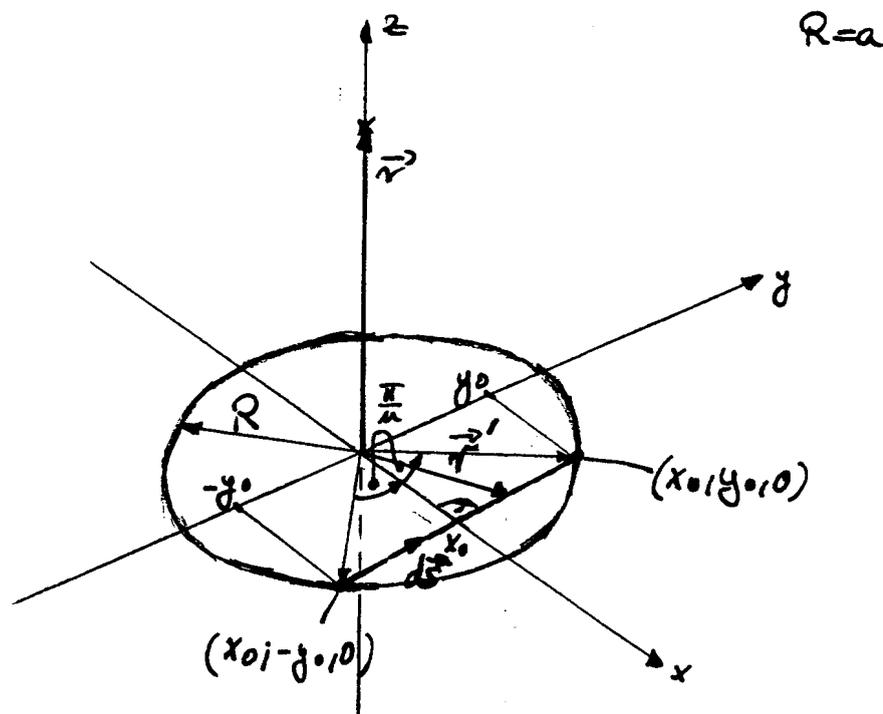
$$\rightarrow \vec{H}_n(z) = H_{n,z}(z) \cdot \vec{e}_z$$

* Jedes der n Leiterschleifenstücke liefert dabei denselben Beitrag
da nur die relative Lage zur z -Achse ausschlaggebend ist.

Da \vec{H} ein Vektorfeld ist, muss es auch $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$ sein.

Koordinatenrichtungen x und y in der Ebene $z=0$
abhängen

$$\Rightarrow H_{n,z}(z) = n \cdot H_{0,z}(z)$$



Geometrie: $x_0 = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot R$ $y_0 = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot R$

$$d\vec{s} = \vec{e}_y \cdot dy'$$

$$\vec{r} = z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{r}' = x_0 \cdot \vec{e}_x + y' \cdot \vec{e}_y \quad | \quad |y'| \leq y_0$$

$$\Rightarrow \vec{r} - \vec{r}' = z \cdot \vec{e}_z - x_0 \cdot \vec{e}_x - y' \cdot \vec{e}_y$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = z^2 + x_0^2 + y'^2$$

$$d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}') = dy' \cdot \vec{e}_y \times (z \cdot \vec{e}_z - x_0 \cdot \vec{e}_x - y' \cdot \vec{e}_y)$$

$$= \{z \cdot \vec{e}_x + x_0 \cdot \vec{e}_z\} \cdot dy'$$

$$\begin{matrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_z \end{matrix} \times \vec{e}_y$$

$\Rightarrow H_{0,z}(z)$ hat nur z -Komp., deshalb x -Komp. Anteil weglassen!

$$H_{0,z}(z) = \frac{I}{4\pi} \int_{y'=-y_0}^{y_0} \frac{x_0 \cdot dy' \cdot \vec{e}_z + z \vec{e}_x \cdot dy'}{[z^2 + x_0^2 + y'^2]^{\frac{3}{2}}} \Big|_{z\text{-Komp.}}$$

$$= \frac{I}{4\pi} \cdot \int_{y'=-y_0}^{y_0} \frac{x_0 \cdot dy'}{[(z^2+x_0^2)+y'^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{I \cdot x_0}{4\pi} \cdot \frac{y'}{[y'^2+(z^2+x_0^2)]^{3/2} \cdot [z^2+x_0^2]} \Big|_{-y_0}^{y_0}$$

$$H_{ort}(z) = \frac{I \cdot x_0 \cdot y_0}{2\pi \cdot [y_0^2+z^2+x_0^2]^{3/2} \cdot [z^2+x_0^2]}$$

$$\text{mit } \left. \begin{array}{l} x_0 = R \cdot \cos \frac{\pi}{n} \\ y_0 = R \cdot \sin \frac{\pi}{n} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_0 \cdot y_0 = R^2 \cdot \cos \frac{\pi}{n} \cdot \sin \frac{\pi}{n} = R^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right) \\ y_0^2 + x_0^2 = R^2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \vec{H}_{M,z}(z) = \frac{\mu \cdot R^2 \cdot I \cdot \sin(2\pi/n)}{4\pi \cdot [R^2+z^2]^{3/2} \cdot [z^2+R^2 \cdot \cos^2(\frac{\pi}{n})]} \cdot \vec{e}_z$$

2.4: zu zeigen: $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{H}_{M,z}(z) \Big|_{23} = \vec{H}(z) \Big|_{22}$

Betrachte Grenzwerte von $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{H}_{M,z}(z)$ für Zähler und Nenner:

$$\text{Nenner: } \lim_{n \rightarrow \infty} \{ 4\pi [R^2+z^2]^{3/2} \cdot [z^2+R^2 \cdot \cos^2(\frac{\pi}{n})] \} = 4\pi [R^2+z^2]^{3/2},$$

$$\text{da } \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^2(\frac{\pi}{n}) = \cos^2(0) = 1$$

$$\text{Zähler: } \lim_{n \rightarrow \infty} \{ R^2 \cdot I \cdot \mu \cdot \sin(\frac{2\pi}{n}) \} = R^2 \cdot I \cdot \mu \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mu \cdot \sin(\frac{2\pi}{n}) \right)$$

\Rightarrow Regel von L'Hospital:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \cdot \sin(\frac{2\pi}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\frac{2\pi}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(\frac{2\pi}{n}) \cdot 2\pi}{(-n^2) \cdot (-\frac{1}{n^2})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\frac{2\pi}{n}) \cdot 2\pi = 2\pi$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{H}_{M,z}(z) = \frac{R^2 \cdot I \cdot 2\pi \cdot \vec{e}_z}{4\pi [R^2+z^2]^{3/2}} = \frac{R^2 \cdot I}{2 \cdot [R^2+z^2]^{3/2}} \cdot \vec{e}_z \quad \underline{\underline{q.e.d.}}$$

2.7.1: siehe Zusatz zu Übungen in Theoretische
Elektrotechnik III
Blatt 9; Aufgabe 33

2.7.2: siehe Skript zur Vorlesung Theoretische Elektrotechnik III

- magn. Vektorpotential ist wie alle Potentiale eine fiktive Hilfsgröße
- es wird hier verwendet, um das magnetische Feld \vec{H} bzw. die magnetische Induktion \vec{B} zu berechnen: $\vec{B} = \text{rot } \vec{V}_m$
($\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$)

- Probleme bei der Einführung bzgl. Eindeutigkeit des magn. Potentials, Beispiel:

$$\vec{V}_{m1} = \vec{V}_m$$

$$\vec{V}_{m2} = \vec{V}_m + \text{grad } \psi_m$$

$$\rightarrow \vec{B}_1 = \text{rot } \vec{V}_m$$

$$\rightarrow \vec{B}_2 = \text{rot } \vec{V}_m + \text{rot grad } \psi_m \stackrel{= \vec{0}}{=} \vec{B}_1$$

\Rightarrow unterschiedliche Vektorpotentiale beschreiben das gleiche Feld

\Rightarrow EINDEUTIGKEITSPROBLEM

\Rightarrow Einführung von „Eichungen“

statischer Fall: Coulomb-Eichung: $\text{div } \vec{V}_m \stackrel{!}{=} 0$

dyn. Fall: Lorentz-Eichung: $\text{div } \vec{V}_m + \mu \cdot \epsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0$
(allg. Fall, schließt stat. Fall für $\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$ mit ein)

Aufgabe 3:

$$3.1: |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{med.}}} = \frac{2\pi \cdot f}{\lambda_{\text{med.}}} = \frac{\omega}{c_{\text{med.}}} = \frac{\omega}{c_0} \cdot \mu$$

$$\Rightarrow \vec{k}_E = \frac{2\pi \mu_1}{\lambda} \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{k}_R = -\frac{2\pi \mu_1}{\lambda} \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{k}_T = \frac{2\pi \mu_2}{\lambda} \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{k}_E \cdot \vec{r} = \frac{2\pi \mu_1}{\lambda} \cdot z, \quad \vec{k}_R \cdot \vec{r}; \quad \vec{k}_T \cdot \vec{r} \text{ analog}$$

λ : Wellenlänge im Vakuum

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_E = \underline{E}_E \cdot \exp(-j \frac{2\pi \mu_1}{\lambda} \cdot z) \cdot \vec{e}_x \\ \vec{E}_R = \underline{E}_R \cdot \exp(j \frac{2\pi \mu_1}{\lambda} \cdot z) \cdot \vec{e}_x \\ \vec{E}_T = \underline{E}_T \cdot \exp(-j \frac{2\pi \mu_2}{\lambda} \cdot z) \cdot \vec{e}_x \end{cases}$$

$$3.2: \text{Induktionsgesetz: } \text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}$$

$$\text{harmonisch: } \frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow j\omega$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \cdot j\omega \cdot \vec{H} \Leftrightarrow \vec{H} = -\frac{1}{j\omega \cdot \mu_0} \cdot \text{rot } \vec{E}$$

$$\text{rot } \vec{E}_E = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \underline{E}_E e^{-j \frac{2\pi \mu_1}{\lambda} \cdot z} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\vec{e}_y \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} 0 - \frac{\partial}{\partial z} \{ \underline{E}_E e^{-j \frac{2\pi \mu_1}{\lambda} \cdot z} \} \right)$$

$$= -j \frac{2\pi \mu_1}{\lambda} \cdot \underline{E}_E \cdot e^{-j \frac{2\pi \mu_1}{\lambda} \cdot z} \cdot \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow \vec{H}_E = \frac{-j \cdot 2\pi \mu_1 \cdot \underline{E}_E \cdot e^{-j \frac{2\pi \mu_1}{\lambda} \cdot z}}{2(j\omega) \cdot \mu_0} \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{H}_E = \frac{2\alpha\mu_1 \cdot \underline{E}_E}{2 \cdot \omega \cdot \mu_0} \cdot \exp(-j \frac{2\alpha\mu_1}{\lambda} \cdot z) \cdot \vec{e}_y$$

analog: $\vec{H}_R = -\frac{2\alpha\mu_1 \cdot \underline{E}_R}{2 \cdot \omega \cdot \mu_0} \cdot \exp(j \frac{2\alpha\mu_1}{\lambda} \cdot z) \cdot \vec{e}_y$

$$\vec{H}_T = \frac{2\alpha\mu_2 \cdot \underline{E}_T}{2 \cdot \omega \cdot \mu_0} \cdot \exp(-j \frac{2\alpha\mu_2}{\lambda} \cdot z) \cdot \vec{e}_y$$

3.3: * Grenzflächenbedingung für E-Feld: $E_{\tan 1} \stackrel{!}{=} E_{\tan 2}$; $z=0$

Tangentialkomponente: x, y-Komponente @ $z=0$

hier: nur x-Komponente

$$\underline{E}_{Ex} + \underline{E}_{Rx} \stackrel{!}{=} \underline{E}_{Tx} \Big|_{z=0}$$

$$\Leftrightarrow \underline{E}_E + \underline{E}_R = \underline{E}_T \quad (\text{I})$$

* Grenzflächenbedingung für H-Feld: $H_{\tan 1} \stackrel{!}{=} H_{\tan 2}$; $z=0$

Tangentialkomponente: x, y-Komponente @ $z=0$

hier: nur y-Komponente

$$\underline{H}_{Ey} + \underline{H}_{Ry} = \underline{H}_{Ty} \Big|_{z=0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\alpha\mu_1 \cdot \underline{E}_E}{2 \cdot \omega \cdot \mu_0} - \frac{2\alpha\mu_1 \cdot \underline{E}_R}{2 \cdot \omega \cdot \mu_0} = \frac{2\alpha\mu_2 \cdot \underline{E}_T}{2 \cdot \omega \cdot \mu_0}$$

$$\Leftrightarrow \mu_1 \cdot \underline{E}_E - \mu_1 \cdot \underline{E}_R = \mu_2 \cdot \underline{E}_T \quad (\text{II})$$

$$\gamma := \frac{\underline{E}_R}{\underline{E}_E} \quad (\text{III})$$

(I) in (II): $\mu_1 \cdot \underline{E}_E - \mu_1 \cdot \underline{E}_R = \mu_2 \cdot \underline{E}_E + \mu_2 \cdot \underline{E}_R$

$$\Leftrightarrow \underline{E}_E \cdot (\mu_1 - \mu_2) = \underline{E}_R \cdot (\mu_1 + \mu_2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\gamma = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}}$$

3.4 $t := \frac{\underline{E}_T}{\underline{E}_E} \quad (\text{IV})$

aus (I) $\underline{E}_R = \underline{E}_T - \underline{E}_E$ in (II)

$$\mu_1 \cdot \underline{E}_E - \mu_1 \cdot \underline{E}_T + \mu_1 \cdot \underline{E}_E = \mu_2 \cdot \underline{E}_T$$

$$\Leftrightarrow (\mu_1 + \mu_2) \cdot \underline{E}_E = \underline{E}_T \cdot (\mu_1 + \mu_2) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{t = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}}$$

3.5. Leistungsreflexionsfaktor: $R = |\underline{r}|^2$

$$\Rightarrow R = \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right)^2$$

Leistungstransmissionsfaktor: $T = ?$

Energieerhaltungssatz: $R + T = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T &= 1 - R = \frac{(\mu_1 + \mu_2)^2 - (\mu_1 - \mu_2)^2}{(\mu_1 + \mu_2)^2} \\ &= \frac{\mu_1^2 + 2\mu_1\mu_2 + \mu_2^2 - \mu_1^2 + 2\mu_1\mu_2 - \mu_2^2}{(\mu_1 + \mu_2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{4\mu_1\mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^2} \\ T &= \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot |\underline{t}|^2 \end{aligned}$$

$$\text{mit } |\underline{t}|^2 = \frac{4\mu_1^2}{(\mu_1 + \mu_2)^2}$$

3.7.1: $\Re(z > 0) \rightarrow \infty \Rightarrow E_{\text{tan}z}(z=0^+) \stackrel{!}{=} 0$
 aus (I): $\underline{E}_E + \underline{E}_R \stackrel{!}{=} 0$
 $\Rightarrow \underline{r} = \frac{\underline{E}_R}{\underline{E}_E} = -1$

d.h. TOTALREFLEXION \oplus 180° PHASENDREHUNG

3.7.2: Fresnelsche Gleichungen / Formeln

Man unterscheidet zwischen:

- TE-Polarisation („p“-Pol.)
- TM-Polarisation („s“-Pol.)

Sonderfälle: a) senkrechter Einfall: keine Unterscheidung zwischen s- und p-Polarisation, Gleichungen identisch!

b) Totalreflexion (für p- und s-Pol.)

Snellius: $\sin \alpha_1 \cdot \mu_1 = \sin \alpha_2 \cdot \mu_2$

Voraus.: $\mu_2 < \mu_1 \Rightarrow$ Totalrefl. für Einfallswinkel

c) Totaltransmission (für Brewster-Winkel)

nur für p-Polarisation möglich!

$$\alpha_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Aufgabe 4:

4.1: Bedingung zur fast verlustlosen Wellenführung: TOTALREFLEXION
Totalreflexion kann nur dann auftreten, wenn das Licht bzw. die elektromagnetische Welle von einem opt. dichteren in ein opt. dünneres Medium übergeht. Hiermit folgt:

$$\mu_1 > \mu_2$$

Da es sich hier um einen symmetrischen Wellenleiter handelt, muss die Höhe h der Filmschicht lediglich die Bedingung $h > 0$ erfüllen. Dies im Gegensatz zum asymmetrischen Wellenleiter, dessen Filmdicke eine gewisse Schwelle nicht unterschreiten darf, um eine Lichtleitung zu ermöglichen: $h_{\text{max}} \geq h_{\text{min}}$

4.2: $\underline{\underline{E}}(\vec{r}, t) = E_y(x) \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_y$

- harmonisch: $e^{j\omega t}$
- inhomogen: $E_y = E_y(x)$
- Plancwelle: (eben), da Phase konst. Phase eine Eben bilden
- in y -polarisiert, TE (transversal elektrisch)

4.3: Wellengleichung: $\Delta \underline{\underline{E}}(\vec{r}, t) - \left(\frac{\mu}{c_0}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{\underline{E}}(\vec{r}, t) = \vec{0}$

1. Teil: $\Delta \underline{\underline{E}}(\vec{r}, t) = [\Delta(E_y(x) \cdot \exp(j\omega t - j\beta z))] \cdot \vec{e}_y$

$$= \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \{E_y(x) \cdot \exp(j\omega t - j\beta z)\} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{E_y(x) \cdot \exp(j\omega t - j\beta z)\} \right] \cdot \vec{e}_y$$

$$= \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y(x) + (-j\beta)^2 \cdot E_y(x) \right] \cdot \exp(j\omega t - j\beta z) \cdot \vec{e}_y$$

$$\Delta \underline{\underline{E}}(\vec{r}, t) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y(x) - \beta^2 \cdot E_y(x) \right] \cdot \exp(j\omega t - j\beta z) \cdot \vec{e}_y$$

2. Teil: $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{\underline{E}}(\vec{r}, t) = -\omega^2 \cdot E_y(x) \cdot \exp(j\omega t - j\beta z) \cdot \vec{e}_y$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y(x) - \beta^2 \cdot E_y(x) \right] \cdot \exp[j(\omega t - \beta z)] \cdot \vec{e}_y + \left(\frac{\mu}{\epsilon_0} \right)^2 \cdot \omega^2 \cdot E_y(x) \cdot \exp[j(\omega t - \beta z)] \cdot \vec{e}_y = \vec{0}$$

Seite 13/15

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y(x) + \left[\left(\frac{\omega \cdot \mu}{\epsilon_0} \right)^2 - \beta^2 \right] \cdot E_y(x) = 0 : \text{Skalare Wellengleichung}$$

Für das Phasennuß β der geführten Welle gilt bezüglich den Freiraumausbreitungskonstanten der Schichten k_1 und k_2

$$k_1 > \beta > k_2$$

Mit $\frac{\omega \cdot \mu}{\epsilon_0} = k$ bzw. $\frac{\omega \cdot \mu_\mu}{\epsilon_0} = k_\mu$ $\mu \in \{1, 2\}$ und den Substitutionen nach Gleichung 4.3 a, b ergeben sich dann 2 verschiedene skalare Wellengleichungen

$$(I) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y(x) + q^2 \cdot E_y(x) = 0 \quad ; \quad |x| < a$$

$$(II) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y(x) - \alpha^2 \cdot E_y(x) = 0 \quad ; \quad a < |x| < \infty$$

4.4: (I) und (II): DGL's 2. Ordnung \Rightarrow Schwingungen möglich

Beim Lösen der DGL's stellt man für (I) imaginäre und für (II) reelle Eigenfrequenzen. Daraus kann folgender Ansatz gewählt werden:

$$E_y(x) = \begin{cases} A_1 \cdot e^{q \cdot x} + A_2 \cdot e^{-q \cdot x} & ; \quad a < x \\ A_3 \cdot \cos(q \cdot x) + A_4 \cdot \sin(q \cdot x) & ; \quad -a < x < a \\ A_5 \cdot e^{q \cdot x} + A_6 \cdot e^{-q \cdot x} & ; \quad x < -a \end{cases}$$

physikalisch sinnvoll: $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} E_y(x) \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow A_1 \equiv 0 \wedge A_6 \equiv 0$$

$$E_y(x) = \begin{cases} A_2 \cdot e^{-q \cdot x} & ; \quad a < x \\ A_3 \cdot \cos(q \cdot x) + A_4 \cdot \sin(q \cdot x) & ; \quad -a < x < a \\ A_5 \cdot e^{q \cdot x} & ; \quad -a > x \end{cases}$$

Besüßlich der Grenzflächen hier nur tangential elektrische
 Feldkomponente: Bedingung: Stetigkeit!

$$E_{t1} = E_{t2}$$

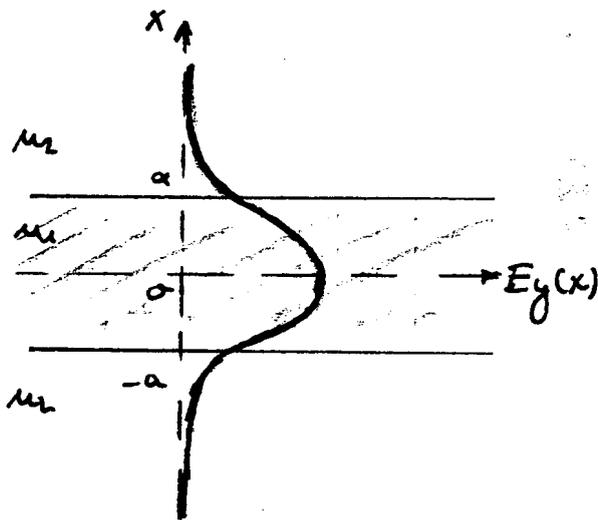
Dier: $\lim_{x \rightarrow -a} E_y(x) = \lim_{x \rightarrow -a} E_y(x)$ | Grenzfläche: Substrat - Film
 $x < a$ $x > -a$

$\lim_{x \rightarrow a} E_y(x) = \lim_{x \rightarrow a} E_y(x)$ | Grenzfläche: Film - Deckschicht
 $x < a$ $x > a$

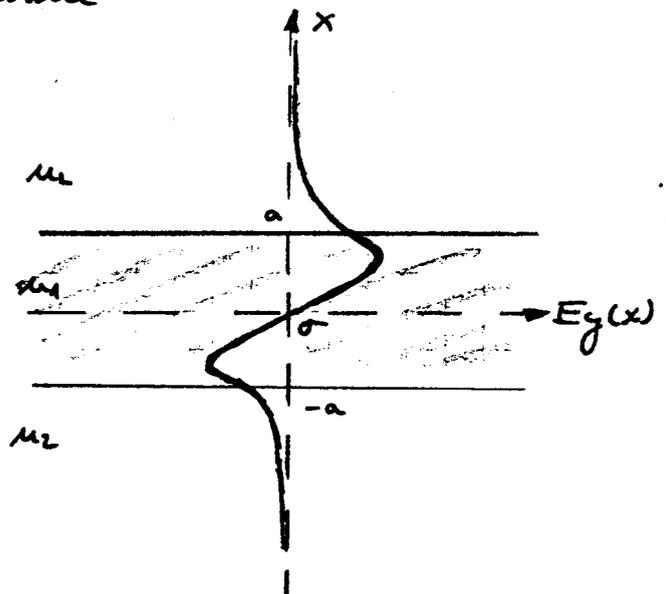
$$\Rightarrow E_y(x) = A \cdot \begin{cases} [\cos(q \cdot a)] \cdot e^{-2 \cdot (x-a)} & ; \quad x < -a \\ [\cos(q \cdot x)] & ; \quad -a \leq x \leq a \\ [-\sin(q \cdot a)] \cdot e^{2 \cdot (x+a)} & ; \quad -a > x \end{cases}$$

4.8.1: 1. gerader Modus: keine Nullstelle

1. ungerader Modus: eine Nullstelle



1. gerader Modus



1. ungerader Modus

4.7.2: Benutze 2. Maxwell-Gleichung: $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ Seite 15/15

hier: harmonische Schwingungen: $\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow j\omega$

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H} \quad \text{mit } \vec{E}(\vec{r}, t) = E_y(x) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot \vec{e}_y$$

$$\Leftrightarrow \vec{H} = \frac{j}{\omega\mu_0} \cdot \text{rot } \vec{E} \quad \leftarrow E_y(x, z, t)$$

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y(x, z, t) & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_x \cdot \left[-\frac{\partial}{\partial z} E_y(x, z, t) \right] + \vec{e}_z \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} E_y(x, z, t) \right]$$

$$= +j\beta \cdot E_y(x) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial E_y(x)}{\partial x} \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{H}(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\beta}{\omega\mu_0} \cdot E_y(x) \cdot \vec{e}_x + \frac{j}{\omega\mu_0} \cdot \frac{\partial E_y(x)}{\partial x} \cdot \vec{e}_z \right] \cdot e^{j(\omega t - \beta z)}$$

$$\frac{\beta}{\omega\mu_0} = \frac{2\pi}{\lambda \cdot 2\pi f} \cdot \frac{1}{\mu_0} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{\mu_0} = \frac{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon}}{\mu_0} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} = \frac{1}{z_{\text{TF}}}$$

$$\Rightarrow \vec{H}(\vec{r}, t) = \left[-\frac{E_y(x)}{z_{\text{TF}}} \cdot \vec{e}_x + \frac{j}{\omega\mu_0} \cdot \frac{\partial E_y(x)}{\partial x} \cdot \vec{e}_z \right] \cdot e^{j(\omega t - \beta z)}$$

Diplomhauptprüfung (WS 00/01)

Theoretische Elektrotechnik III

1. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
2. Außer Schreib- und Zeichenmaterial sind keine Hilfsmittel zugelassen (auch kein Taschenrechner)!
3. Die jeweils maximal erreichbare Punktzahl pro Teilaufgabe ist in Klammern am Ende jeder Teilaufgabe angegeben.
4. Es sind alle Aufgaben zu bearbeiten! Die Zusatzaufgaben sind optional.
5. Verwenden Sie ausschließlich die Ihnen ausgeteilten Doppelbögen; nur diese werden bewertet. Trennen Sie die Doppelbögen nicht.
6. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Doppelbogen!
7. Schreiben Sie auf jeden Doppelbogen Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Aufgabe (inklusive der Teilaufgabe), die Sie bearbeiten!
8. Zeigen Sie den gewählten Lösungsweg auf. Geben Sie insbesondere Zwischenergebnisse und Begründungen an. Nur eindeutige Aussagen können bewertet werden!
9. Einige häufig gebrauchte Formeln finden Sie im Anhang.
10. VIEL ERFOLG!!!

1. Aufgabe: Ungleichartige Punktladungen (12 Punkte + 6 Zusatzpunkte)

Zwei **ungleichartige Punktladungen** Q_1 und Q_2 ($Q_1 > 0$, $Q_2 < 0$, $|Q_1| > |Q_2|$) befinden sich symmetrisch zum Ursprung auf der x-Achse (siehe Abb. 1.1). Die gesamte Anordnung befindet sich in Vakuum.

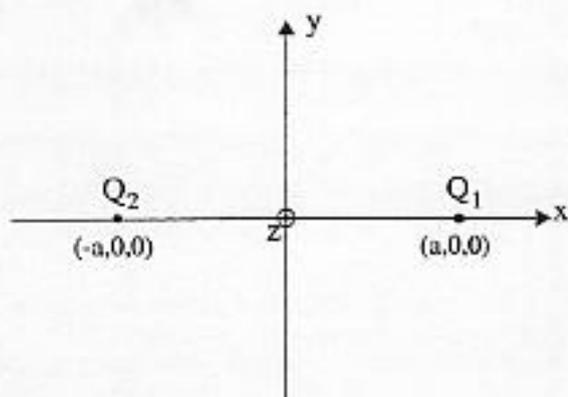


Abb. 1.1: Anordnung der Punktladungen

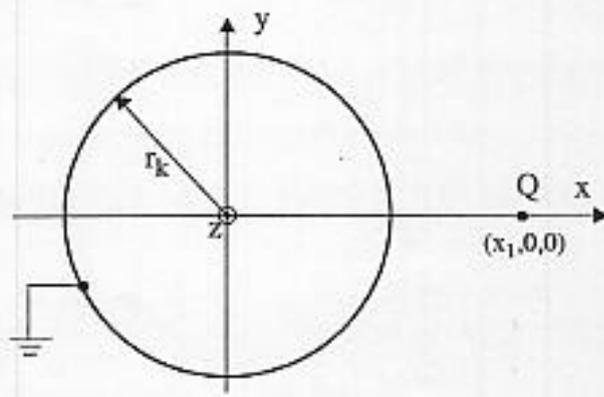


Abb. 1.2: Eine Punktladung vor leitender Kugel

- 1.1 Berechnen Sie das von beiden Punktladungen hervorgerufene elektrische **Feld** $\vec{E}(\vec{r})$! (2 Punkte)
- 1.2 Berechnen Sie das elektrische **Potential** $\varphi(\vec{r})$! Der Bezugspunkt liege im Unendlichen. Bezugspotential $\varphi(\infty) = 0$! (2 Punkte)
- 1.3 Beweisen Sie für das Potential nach 1.2, daß die **Äquipotentialfläche** mit $\varphi = 0$ eine Kugel ist! Berechnen Sie den **Kugelmittelpunkt** und **Radius**! Skizzieren Sie die **Äquipotentiallinie** in der x-y-Ebene! (6 Punkte)
- 1.4 Bestimmen Sie die **Abstände** d_1 und d_2 , welche die beiden Punktladungen zum Kugelmittelpunkt aufweisen! Berechnen Sie $\frac{d_1}{d_2}$ und $d_1 \cdot d_2$. Welche **Beziehung** ergibt sich zwischen den beiden Abständen und dem Kugelradius? (2 Punkte)

Zusatzaufgaben:

Jede Äquipotentialfläche kann man bekanntlich als Oberfläche eines Leiters vorstellen, so daß im Zusammenhang mit einer „Spiegelungsmethode an einer gekrümmten Fläche“ die Ergebnisse obiger Teilaufgaben benutzt werden können.

1. Z.1 Nehmen Sie **eine leitende geerdete Kugel** vom Radius r_k an, deren Mittelpunkt im Ursprung sein soll, und eine positive **Ladung** Q am Ort $(x_1, 0, 0)$, wobei $x_1 > r_k$ gilt (siehe Abb. 1.2). Bestimmen Sie die **Größe** und **Position** der **Bildladung**! (3 Punkte)
1. Z.2 Skizzieren Sie qualitativ die elektrischen **Feldlinien** und **Äquipotentiallinien** dieser Anordnung in der x-y-Ebene mit **Begründung**! (3 Punkte)

2. Aufgabe: Widerstand-Bauelement (14 Punkte + 4 Zusatzpunkte)

Ein „verteiltes“ elektrisches Bauelement besteht aus drei Teilen 1, 2, 3 (siehe Abb. 2.1). Teil 1 und Teil 3 sind Kontaktteile und haben unendliche Leitfähigkeit $\kappa_1 = \kappa_3 \rightarrow \infty$. Teil 2 ist ein Medium mit endlicher Leitfähigkeit κ_2 . Das Bauelement hat die in Abbildung 2.1 gezeichneten Abmessungen und eine konstante Querschnittsfläche A . Am Bauelement liegt die Spannung U_0 . Es gilt überall $\varepsilon = \varepsilon_0$. Randeffekte werden vernachlässigt.

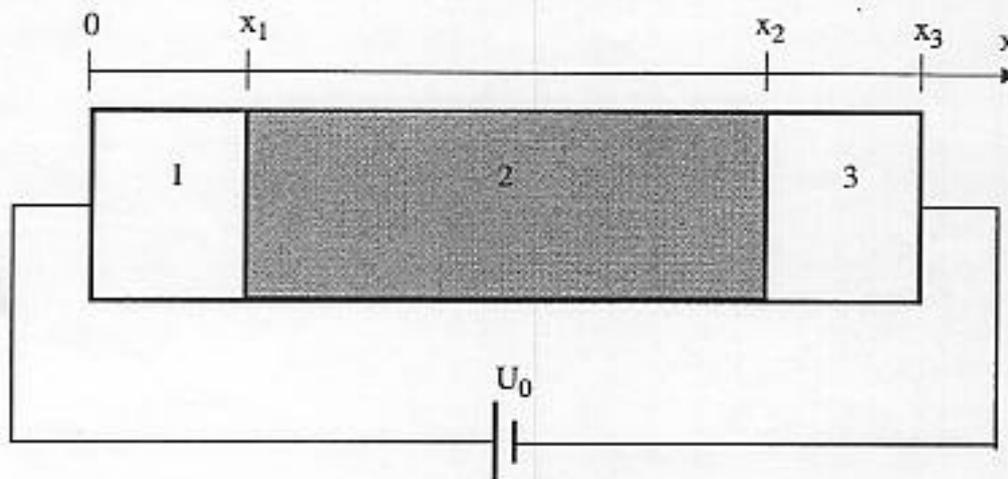


Abb. 2.1: Widerstand-Bauelement

Zunächst werde angenommen, daß Teil 2 **homogene** Leitfähigkeit ($\kappa_2 = \text{konst}$) aufweist.

- 2.1 Berechnen Sie für das Intervall $x \in [0, x_3]$ die elektrische **Feldstärke** \vec{E} und **skizzieren** Sie E als Funktion von x ! Wo treten **Raum-** oder **Flächenladungen** auf? Wie groß sind sie? (4 Punkte)

Der Teil 2 sei jetzt **inhomogen** und es gelte: $\kappa_2 = \frac{\kappa}{x - x_1}$; $\kappa = \text{konst}$.

- 2.2 Berechnen Sie die elektrische **Feldstärke** \vec{E} und **skizzieren** Sie \vec{E} als Funktion von x für $x \in [0, x_3]$! (4 Punkte)
- 2.3 Berechnen Sie das elektrische **Potential** φ und **skizzieren** Sie φ als Funktion von x für $x \in [0, x_3]$! (3 Punkte)
- 2.4 Berechnen Sie die **Raum-** und **Flächenladungen**! Welche **Gesamtladung** trägt das Bauelement? (3 Punkte)

Zusatzaufgabe:

- 2.Z.1 Wenn in Teilaufgabe 2.1 $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \frac{\varepsilon_r}{1+x}$ gilt, welche **Raum-** und **Flächenladungen** treten auf? Welche **Gesamtladung** trägt das Bauelement? (4 Punkte)

3. Aufgabe: Leiter und geladenes Teilchen (11 Punkte + 3 Zusatzpunkte)

Längs eines unendlich langen, zylinderförmigen Leiters mit Radius R , dessen Symmetrieachse mit der z -Achse zusammenfällt, fließt ein zeitlich konstanter, homogener über den Leiterquerschnitt verteilter Gesamtstrom $I > 0$ in Richtung der positiven z -Achse (siehe Abb.3.1) Die magnetische Permeabilität sei im gesamten Raum μ_0 .

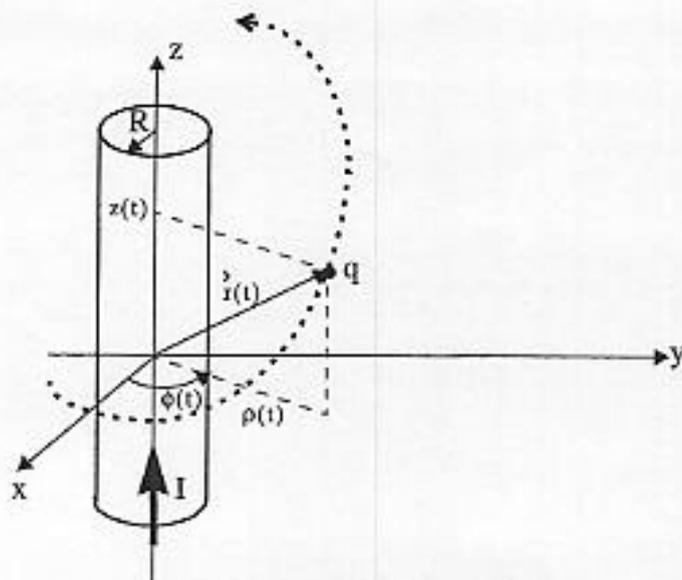


Abb. 3.1: Leiter und geladenes Teilchen

3.1 Berechnen Sie das vom Strom I erzeugte **Magnetfeld** $\vec{H}(\vec{r})$ innerhalb und außerhalb des Leiters! (3 Punkte)

3.2 Berechnen Sie für den Leiter den **inneren Induktivitätsbelag** (2 Punkte)

Außerhalb des Leiters bewege sich ein geladenes Teilchen mit Ladung q entlang einer Bahnkurve $\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{e}_\rho(\phi(t)) + z(t)\vec{e}_z$, wobei $\rho(t) = \rho_0 + a \cdot t$, $\phi(t) = \phi_0 + b \cdot t$ und $z(t) = z_0 + c \cdot t$ gelten.

3.3 Berechnen Sie den **Geschwindigkeitsvektor** längs der Bahnkurve des Teilchens in Zylinderkoordinaten! (3 Punkte)

3.4 Berechnen Sie unter Verwendung des in Teilaufgabe 3.1 berechneten Magnetfeldes im Außenraum des Leiters die **Lorentzkraft**, die auf das Teilchen entlang dessen Bahnkurve wirkt, in Zylinderkoordinaten! (3 Punkte)

Zusatzaufgabe:

3.Z.1 Berechnen Sie den **Zuwachs der kinetischen Energie** des Teilchens bei der Bewegung zwischen zwei beliebigen Punkten auf seiner Bahnkurve. Gilt das Ergebnis auch für die Bewegung in einem **beliebigen** Magnetfeld? **Begründen** Sie Ihre Antwort! (3 Punkte)

4. Aufgabe: Harmonische Elektromagnetische Wellen
(13 Punkte + 7 Zusatzpunkte)

Gegeben sei das elektrische Feld $\vec{E}_1(z, t)$ einer **harmonischen** elektromagnetischen Welle, welche sich im Vakuum ausbreitet mit

$$\vec{E}_1(z, t) = E_0 \cdot e^{j\omega_1 t} \cdot e^{-jk_1 z} \cdot \vec{e}_y; \quad E_0, \omega_1, k_1 = \text{konst.} >$$

- 4.1 Um welche **Wellenform** handelt es sich? Welche **Polarisation** weist die Welle auf? In welche **Richtung** und mit welcher **Geschwindigkeit** breitet sich die Welle aus? **Begründen** Sie Ihre Aussage mathematisch! (3 Punkte)
- 4.2 Berechnen Sie das zugehörige **magnetische Feld** $\vec{H}_1(z, t)$! (3 Punkte)
- 4.3 Berechnen Sie die **Energieflußdichte** der elektromagnetischen Welle! Geben Sie den **Augenblickswert** und die **Richtung** der Energieflußdichte explizit an! (3 Punkte)
- 4.4 Zu dieser Welle überlagert noch eine zweite Welle $\vec{E}_2(z, t) = E_0 \cdot e^{j\omega_2 t} \cdot e^{-jk_2 z} \cdot \vec{e}_y$ mit gleich großer Amplitude, jedoch mit ω_2 und k_2 , die sich von ω_1 und k_1 nur geringfügig unterscheiden. Berechnen Sie die resultierende Welle! Unterscheiden Sie dabei zwischen **einhüllender Welle** und **Trägerwelle**. Mit welchen **Geschwindigkeiten** breiten sich diese Wellen aus? (4 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 4.Z.1 Leiten Sie den **Poyntingschen Energiesatz** her! Erklären Sie die **Bedeutung** der einzelnen Terme! (4 Punkte)
- 4.Z.2 Eine TEM-Welle breitet sich in zwei Koaxialleitungen aus, die bei gleicher Leitergeometrie unterschiedliche Dielektrika aufweisen (die Grenzfläche steht senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung, vgl. Abb. 4.1)! **Beschreiben** Sie hinsichtlich der Wellenreflexion dazu eine analoge Anordnung. **Begründen** Sie Ihre Antwort! Wie groß ist der Anteil der **Energie** der hinlaufenden Welle, der an der Grenzfläche **reflektiert** wird?

(3 Punkte)

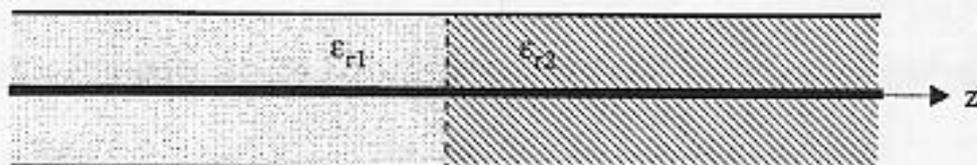


Abb. 4.1: Koaxialleiter mit zwei unterschiedlichen Dielektrika

Formelsammlung

1. Zylinderkoordinaten:

$$\vec{e}_\rho(\phi) = \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\phi \cdot \vec{e}_y$$

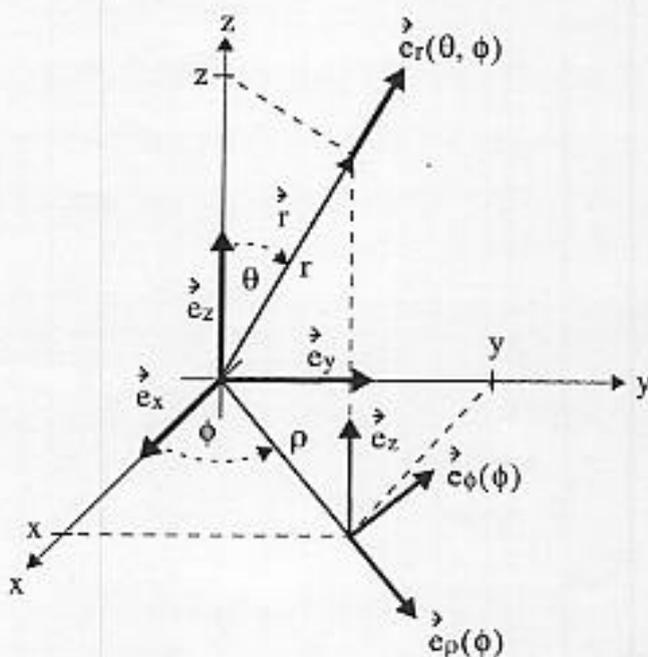
$$\vec{e}_\phi(\phi) = -\sin\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\phi \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{r}(\rho, \phi, z) = \rho \cdot \vec{e}_\rho(\phi) + z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [x\vec{e}_x + y\vec{e}_y]$$

$$\vec{e}_\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y]$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$



2. Kugelkoordinaten:

$$\vec{r}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{e}_r(\theta, \phi) = \sin\theta \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\theta \sin\phi \cdot \vec{e}_y + \cos\theta \cdot \vec{e}_z$$

3. Oberflächen- und Volumenelemente:

$$d\vec{A}(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \cdot \vec{e}_r$$

$$dV(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$

$$d\vec{A}(\rho, \phi, z) = \rho d\phi dz \cdot \vec{e}_\rho$$

$$dV(\rho, \phi, z) = \rho d\rho d\phi dz$$

4. Divergenz und Rotation in Zylinderkoordinaten

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \{\rho A_\rho\} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \{A_\phi\} + \frac{\partial}{\partial z} \{A_z\}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{e}_\rho \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right] + \vec{e}_\phi \cdot \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] + \vec{e}_z \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right]$$

5. Vektoroperationen:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \quad \text{mit } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$$

6. Laplace-Operator und Gradient in Kugelkoordinaten

$$\Delta\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \right]$$

$$\text{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \cdot \vec{e}_\phi$$

7. Näherungsformeln nach Taylorentwicklung um x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Z. B., für kleine Winkel α gilt: $\sin \alpha = \tan \alpha = \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$, od. $\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!}$, $\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!}$.

8. Integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C,$$

$$\int \frac{x dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + C,$$

$$\int \frac{dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \cdot \sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

9. Feldtheoretische Zusammenhänge:

Biot-Savartsches Gesetz: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

Fresnelsche Formeln mit Wellenausbreitungsrichtungen \vec{e}_e , \vec{e}_r und \vec{e}_t :

a) für S-Polarisation:

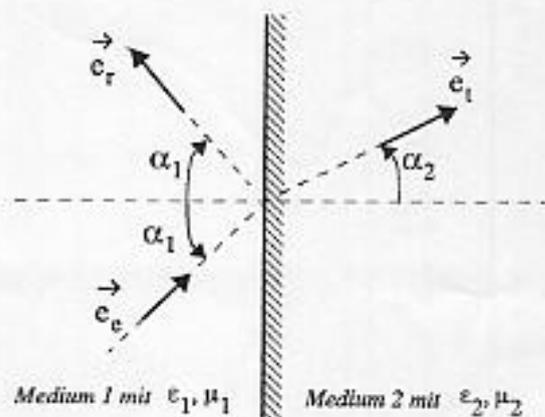
$$\frac{E_r}{E_e} = \frac{Z_2 \cos \alpha_1 - Z_1 \cos \alpha_2}{Z_2 \cos \alpha_1 + Z_1 \cos \alpha_2}$$

$$\frac{E_t}{E_e} = \frac{2Z_2 \cos \alpha_1}{Z_2 \cos \alpha_1 + Z_1 \cos \alpha_2}$$

b) für P-Polarisation:

$$\frac{E_r}{E_e} = \frac{Z_2 \cos \alpha_2 - Z_1 \cos \alpha_1}{Z_2 \cos \alpha_2 + Z_1 \cos \alpha_1}$$

$$\frac{E_t}{E_e} = \frac{2Z_2 \cos \alpha_1}{Z_1 \cos \alpha_1 + Z_2 \cos \alpha_2}$$



Brechzahl und Wellenwiderstand: $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$, $Z = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}}$.

Leiden keine
bessere Qualität
möglich!

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} x-a \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{r}'' = \begin{pmatrix} x+a \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} = - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}}$$

$$[\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}]^{-1} = \left(\frac{0_1}{0_2}\right) \left[\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}\right]^{-1}$$

$$x^2 + 2ax + a^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{0_1}{0_2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{0_1}{0_2}\right)^2 2ax - \left(\frac{0_1}{0_2}\right)^2 (x^2 + 2ax + a^2 + y^2 + z^2)$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{2a(1 + (\frac{0_1}{0_2})^2)}{1 - (\frac{0_1}{0_2})^2} x + a^2 + y^2 + z^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{1 + (\frac{0_1}{0_2})^2}{1 - (\frac{0_1}{0_2})^2} a\right)^2 - \left(\frac{1 + (\frac{0_1}{0_2})^2}{1 - (\frac{0_1}{0_2})^2} a\right)^2 + y^2 + z^2 = 0$$

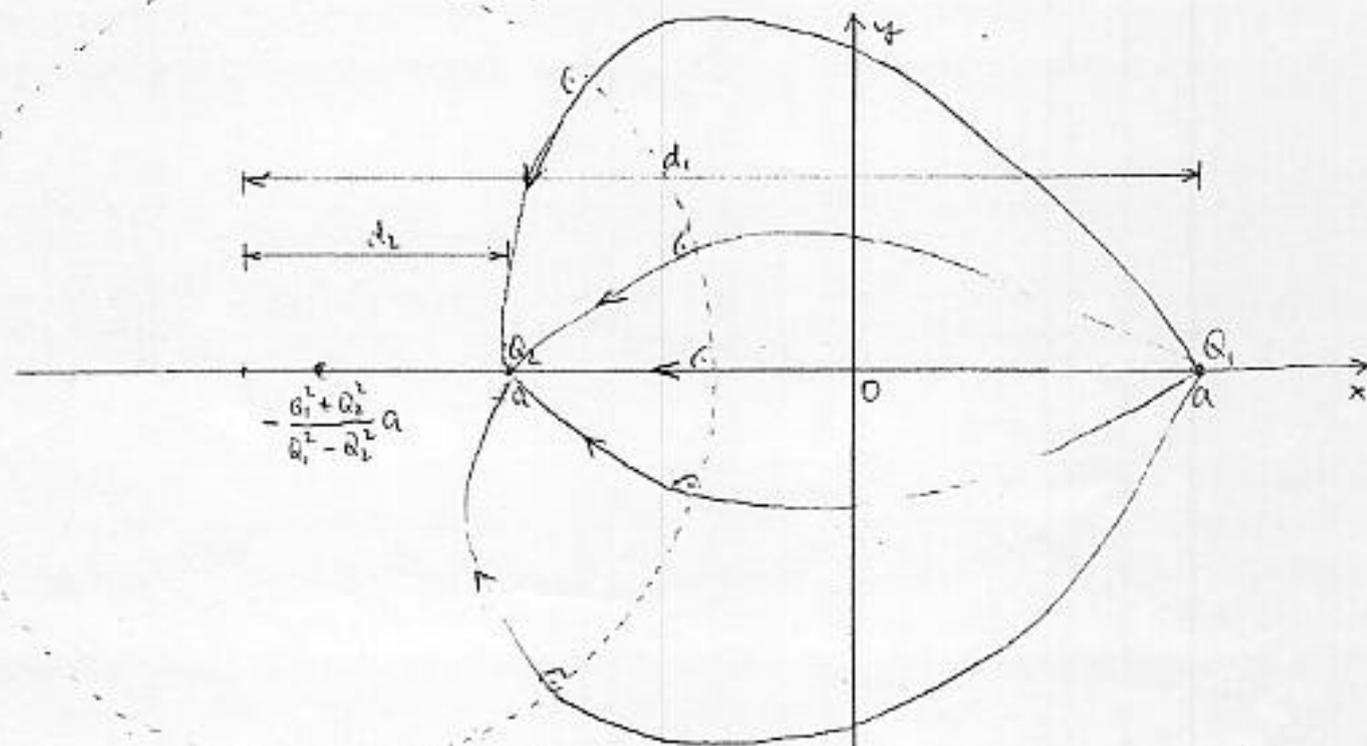
$$\begin{aligned} \left(x + \frac{0_1^2 + a^2}{a_1^2 - a_2^2} a\right)^2 + y^2 + z^2 &= \left(\frac{0_1^2 + a^2}{0_1^2 - 0_2^2} - 1\right)^2 \\ &= \frac{0_1^4 + 2a^2 0_1^2 + a^4 - 0_1^4 - 2a^2 0_1^2 - 0_2^4}{(0_1^2 - 0_2^2)^2} a \\ &= \frac{0_2^4}{(0_1^2 - 0_2^2)^2} a^2 \end{aligned}$$

$$\left(x + \frac{Q_1^2 + Q_2^2}{Q_1^2 - Q_2^2} a\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{4Q_1^2 Q_2^2}{(Q_1^2 - Q_2^2)^2} a^2$$

Das ist eine Kugelgleichung: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$.

Mittelpunkt: $x_0 = -\frac{Q_1^2 + Q_2^2}{Q_1^2 - Q_2^2} a$ $y_0 = 0$ $z_0 = 0$.

Radius: $r = \sqrt{\frac{4Q_1^2 Q_2^2}{(Q_1^2 - Q_2^2)^2} a^2} = \left| \frac{Q_1 Q_2}{Q_1^2 - Q_2^2} \right| \cdot 2a$



1.4 $d_1 = a + \frac{Q_1^2 + Q_2^2}{Q_1^2 - Q_2^2} a = \frac{2Q_1^2}{Q_1^2 - Q_2^2} a$

$d_2 = \frac{Q_1^2 + Q_2^2}{Q_1^2 - Q_2^2} a - a = \frac{2Q_2^2}{Q_1^2 - Q_2^2} a$

$\Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{Q_1^2}{Q_2^2}$

$d_1 \cdot d_2 = \frac{4Q_1^2 Q_2^2}{(Q_1^2 - Q_2^2)^2} a^2 = r^2$

1.2.1. mit Ergebnis in 1.4. $\frac{d_1}{d_2} = \frac{Q_1^2}{Q_2^2}$ $d_1 \cdot d_2 = r^2$

jetzt $d_1 = x_1$ $d_2 = \frac{r^2}{x_1}$

$Q_{\text{quad}} = -\sqrt{\frac{d_2}{d_1}} Q_1 = -\sqrt{\frac{r^2}{x_1 \cdot x_1}} Q_1 = -\frac{r}{x_1} Q$

1.7.2

Äquipotentiallinie

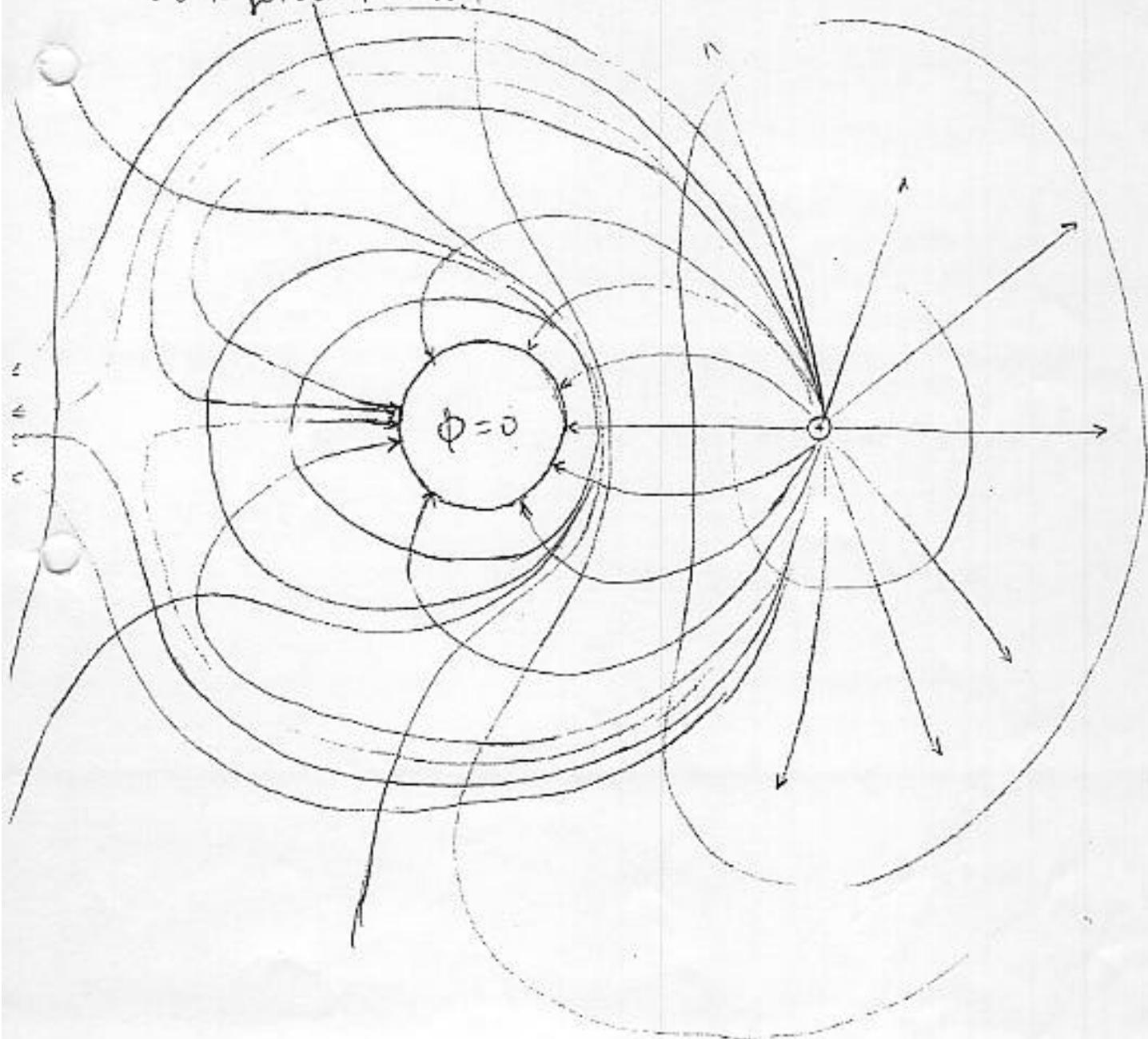
Die Kreislinie der Kugelfläche ist Äquipotentiallinie.

Das Innere der Kreislinie ist konstant auf Potential Null, weil die Kugel geladet ist.

Feldlinie:

Die Feldlinien stehen senkrecht auf der Kugeloberfläche.

Die Feldlinie beginnt an der Punktladung und endet auf der Kugeloberfläche.



A2.

2.1 Widerstände in Teilen 1, 2, 3.

Teile 1, 3 wegen unendlich großer Leitfähigkeit $R_1 = R_3 = 0$.

Teil 2: $R_2 = \frac{x_2 - x_1}{\kappa_2 A}$

Durchgeflossener Strom: $I = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{U}{\frac{x_2 - x_1}{\kappa_2 A}} = \frac{\kappa_2 U A}{x_2 - x_1}$

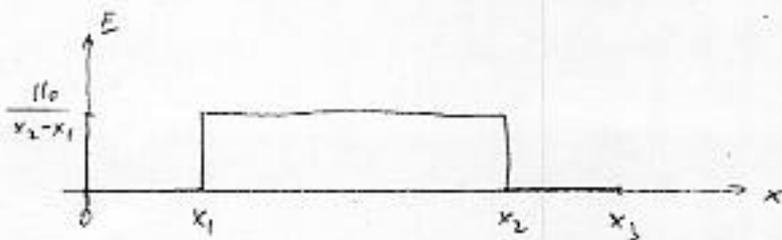
Stromdichte: $\vec{g} = \frac{I}{A} = \frac{U_0 \kappa_2}{x_2 - x_1} \vec{e}_x$

$\vec{g} = \chi \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{g}}{\chi}$

$0 < x < x_1 \quad \kappa_1 \rightarrow \infty \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{\vec{g}}{\kappa_1} = 0$

$x_1 < x < x_2 \quad \kappa_2 \neq \infty \Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{\vec{g}}{\kappa_2} = \frac{U_0 \kappa_2}{(x_2 - x_1) \kappa_2} \vec{e}_x = \frac{U_0}{x_2 - x_1} \vec{e}_x$

$x_2 < x < x_3 \quad \kappa_3 \rightarrow \infty \Rightarrow \vec{E}_3 = 0$



Raumladung: $\rho = \text{div } \vec{D} = \text{div}(\epsilon_0 \vec{E}) = \epsilon_0 \text{div } \vec{E}$

für eindimensional: $\epsilon_0 \text{div } \vec{E} = \epsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x}$

$\frac{\partial E}{\partial x} = 0 \Rightarrow \rho = 0$

Flächenladung: $\sigma_{12} = D \Big|_{x=x_2} - D \Big|_{x=x_1} = \epsilon_0 E_2 - \epsilon_0 E_1 = \epsilon_0 \frac{U_0}{x_2 - x_1}$

$\sigma_{23} = D \Big|_{x=x_3} - D \Big|_{x=x_2} = \epsilon_0 E_3 - \epsilon_0 E_2 = -\epsilon_0 \frac{U_0}{x_2 - x_1}$

$$2.2. \quad R_2 = R(x) = \frac{R_0}{x-x_1}$$

$$dR_2 = \frac{dx}{R(x) \cdot A}$$

$$R_2 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{R(x) \cdot A} = \frac{1}{A} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x-x_1) dx}{R_0}$$

$$= \frac{1}{A R_0} \left. \frac{1}{2} (x-x_1)^2 \right|_{x=x_1}^{x=x_2} = \frac{1}{2 A R_0} (x_2-x_1)^2$$

$$I = \frac{U_0}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{U_0}{R_2} = \frac{2 A R_0 U_0}{(x_2-x_1)^2}$$

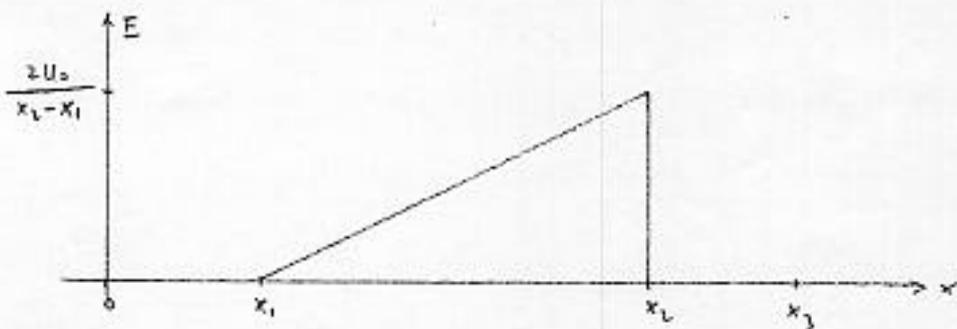
$$g = \frac{I}{A} = \frac{2 R_0 U_0}{(x_2-x_1)^2}$$

$$\vec{E} = \frac{g}{R}$$

$$0 < x < x_1 \quad E = 0$$

$$x_1 < x < x_2 \quad R_2 = \frac{R_0}{x-x_1} \quad \vec{E} = \frac{2 R_0 U_0}{(x_2-x_1)^2} \cdot \frac{x-x_1}{R_0} = \frac{2 U_0 (x-x_1)}{(x_2-x_1)^2}$$

$$x_2 < x < x_3 \quad E = 0$$



$$2.3. \quad \varphi = \varphi_B - \int_{S_0}^x \vec{E} \cdot d\vec{s} = U_0 - \int_{x_0}^x E dx \quad \varphi_B = \varphi(x=0) = U_0$$

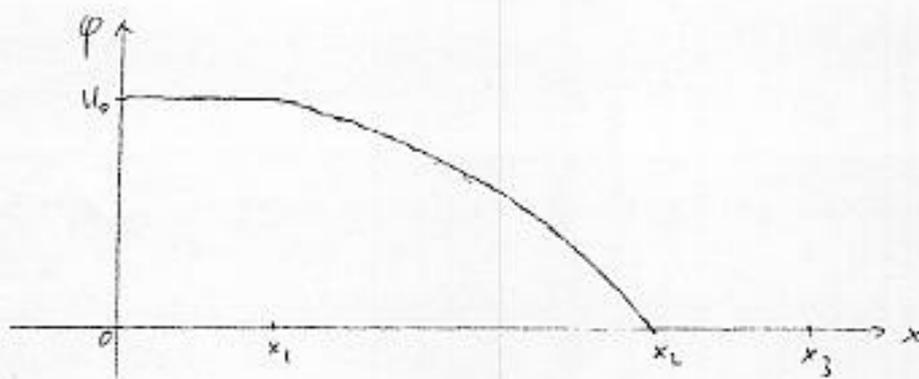
$$0 < x \leq x_1 \quad E = 0 \Rightarrow \varphi = U_0 = \text{konst.}$$

$$x_1 < x \leq x_2 \quad E = \frac{2 U_0 (x-x_1)}{(x_2-x_1)^2}$$

$$\varphi = \varphi \Big|_{x_1}^x - \int_{x_1}^x \frac{2 U_0 (x-x_1)}{(x_2-x_1)^2} dx$$

$$= U_0 - \frac{U_0}{(x_2-x_1)^2} (x-x_1)^2 \Big|_{x=x_1}^x = U_0 - \frac{U_0}{(x_2-x_1)^2} (x-x_1)^2$$

$$x_2 < x < x_3 \quad E = 0 \Rightarrow \varphi = \varphi(x=x_2) = U_0 - \frac{U_0}{(x_2-x_1)^2} (x_2-x_1)^2 = 0$$



2.4 Raumladung:

$$\rho = \operatorname{div} \vec{D} = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \epsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$$

$$\rho = \epsilon_0 \cdot \frac{dE_x}{dx} \neq 0 \text{ nur im Teil 2.}$$

$$\rho = \epsilon_0 \cdot \frac{2U_0}{(x_2 - x_1)^2}$$

Flächenladung:

$$\sigma_{12} = D|_{x=x_1^+} - D|_{x=x_1^-} = \epsilon_0 \frac{2U_0(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)^2} - 0 = 0$$

$$\sigma_{23} = D|_{x=x_2^+} - D|_{x=x_2^-} = 0 - \epsilon_0 \frac{2U_0(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)^2} = -\frac{2\epsilon_0 U_0}{x_2 - x_1}$$

$$\Sigma Q = \int \rho dv + \int \sigma dA$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \rho A dx + (\sigma_{12} + \sigma_{23}) \cdot A$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \epsilon_0 \frac{2U_0}{(x_2 - x_1)^2} A dx - \frac{2\epsilon_0 U_0}{x_2 - x_1} \cdot A$$

$$= 2U_0 \epsilon_0 A \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \cdot x \Big|_{x_1}^{x_2} - \frac{2\epsilon_0 U_0}{x_2 - x_1} \cdot A$$

$$= 2U_0 \epsilon_0 A \frac{1}{x_2 - x_1} - \frac{2\epsilon_0 U_0}{x_2 - x_1} A = 0$$

$$2. z. 1. \quad \epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r(x) = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \frac{1}{1+x}$$

$$E_1 = 0 \quad D_1 = 0$$

$$E_2 = \frac{U_0}{x_2 - x_1} \quad D_2 = \epsilon_0 \epsilon_r E_2 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{U_0}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{1+x}$$

$$E_3 = 0 \quad D_3 = 0$$

Raumladung in Teil 2

$$\begin{aligned} \rho &= \operatorname{div} \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{U_0}{x_2 - x_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{1+x} \right) \\ &= \epsilon_0 \epsilon_r \frac{U_0}{x_2 - x_1} \frac{-1}{(1+x)^2} \\ &= - \frac{\epsilon_0 \epsilon_r U_0}{(x_2 - x_1)(1+x)^2} \end{aligned}$$

Fläche Ladung:

$$Q_{12} = D \Big|_{x=x_1+} - D \Big|_{x=x_1-} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{U_0}{x_2 - x_1} \frac{1}{1+x_1} - 0 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{U_0}{x_2 - x_1} \frac{1}{1+x_1}$$

$$Q_{23} = D \Big|_{x=x_2+} - D \Big|_{x=x_2-} = 0 - \epsilon_0 \epsilon_r \frac{U_0}{x_2 - x_1} \frac{1}{1+x_2} = - \epsilon_0 \epsilon_r \frac{U_0}{x_2 - x_1} \frac{1}{1+x_2}$$

$$\Sigma Q = \left(\int_{x_1}^{x_2} \rho A dx \right) + (Q_{12} + Q_{23}) \cdot A$$

$$= \left(\int_{x_1}^{x_2} \left[- \frac{\epsilon_0 \epsilon_r U_0}{x_2 - x_1} \right] \cdot \frac{dx}{(1+x)^2} \right) + \epsilon_0 \epsilon_r \frac{U_0 A}{x_2 - x_1} \left[\frac{1}{1+x_1} - \frac{1}{1+x_2} \right]$$

$$= - \frac{\epsilon_0 \epsilon_r U_0}{x_2 - x_1} \cdot \left(- \frac{1}{1+x} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} + \epsilon_0 \epsilon_r \frac{U_0 A}{x_2 - x_1} \left[\frac{1}{1+x_1} - \frac{1}{1+x_2} \right]$$

$$= 0$$

A3.

$$3.1. \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{g} \cdot d\vec{A}$$

3-1

nach "rechter Hand-Regel": $\vec{H} = H \cdot \vec{e}_\phi(\phi)$.

$$0 < \varrho < R$$

$$\vec{g} = \frac{I}{\pi R^2} \vec{e}_z$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{g} \cdot d\vec{A} \Rightarrow H \cdot 2\pi\varrho = g \cdot A = \frac{I}{\pi R^2} \cdot \pi\varrho^2$$

$$\Rightarrow H = \frac{I}{2\pi R^2} \cdot \varrho \quad \text{od.} \quad \vec{H} = \frac{I}{2\pi R^2} \cdot \varrho \cdot \vec{e}_\phi(\phi)$$

$$\varrho \geq R$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = H \cdot 2\pi\varrho = I$$

$$H = \frac{I}{2\pi\varrho} \quad \vec{H} = \frac{I}{2\pi\varrho} \vec{e}_\phi(\phi)$$

3.2. innere Induktivität:

$$W_{\text{mag.}} = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} \, dV = \frac{1}{2} \mu_0 \int_V |\vec{H}|^2 \, dV$$

$$= \frac{1}{2} \mu_0 \int_{\varrho=0}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^l \frac{I^2}{\pi^2 R^4} \varrho^2 \cdot \varrho \, d\varrho \, d\phi \, dz$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^4} \cdot 2\pi \cdot l \cdot \int_{\varrho=0}^R \varrho^3 \, d\varrho$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^4} \cdot \pi l \cdot \frac{\varrho^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi R^4} R^4 = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi} = \frac{1}{2} L_i I^2$$

$$L'_i = \frac{L_i}{l} = \frac{\mu_0}{8\pi}$$

$$3.3. \quad \vec{r}(t) = \rho(t) \vec{e}_\rho(\phi(t)) + z(t) \vec{e}_z$$

$$= \rho(t) [\cos(\phi(t)) \vec{e}_x + \sin(\phi(t)) \vec{e}_y] + z(t) \vec{e}_z$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\rho}(t) \vec{e}_\rho(\phi(t)) + \rho(t) \dot{\vec{e}}_\rho(\phi(t)) + \dot{z}(t) \vec{e}_z$$

$$= \dot{\rho}(t) \vec{e}_\rho(\phi(t)) + \rho(t) [-\sin(\phi(t)) \vec{e}_x + \cos(\phi(t)) \vec{e}_y] \cdot \dot{\phi}(t) + \dot{z}(t) \vec{e}_z$$

$$= \dot{\rho}(t) \vec{e}_\rho(\phi(t)) - \rho(t) \dot{\phi}(t) \vec{e}_\phi(\phi) + \dot{z}(t) \vec{e}_z$$

$$\rho(t) = \rho_0 + a \cdot t \Rightarrow \dot{\rho}(t) = a$$

$$\phi(t) = \phi_0 + b \cdot t \Rightarrow \dot{\phi}(t) = b$$

$$\dot{z}(t) = z_0 + c \cdot t \Rightarrow \dot{z}(t) = c$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = a \vec{e}_\rho(\phi(t)) - (\rho_0 + at) \cdot b \vec{e}_\phi(\phi) + c \vec{e}_z$$

$$3.4 \quad \vec{F}_{\text{Lorentz}} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = \mu_0 q \cdot \vec{v} \times \vec{H}$$

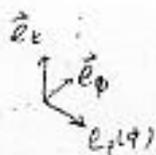
entlang der Bahnkurve ist $\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t)$ $\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{2\pi\rho} \vec{e}_\phi(\phi)$

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = \mu_0 q \frac{I}{2\pi\rho} [a \vec{e}_\rho(\phi(t)) - (\rho_0 + at) b \vec{e}_\phi(\phi) + c \vec{e}_z] \times \vec{e}_\phi(\phi)$$

$$= \mu_0 q \frac{I}{2\pi\rho} [a \vec{e}_\rho(\phi(t)) \times \vec{e}_\phi(\phi) - (\rho_0 + at) b \cdot \vec{e}_\phi(\phi) \times \vec{e}_\phi(\phi) + c \vec{e}_z \times \vec{e}_\phi(\phi)]$$

$$= \frac{\mu_0 q I}{2\pi\rho} [a \cdot \vec{e}_z - (\rho_0 + at) b \cdot 0 + c (-\vec{e}_\rho(\phi(t)))]$$

$$= \frac{\mu_0 q I}{2\pi\rho} [a \cdot \vec{e}_z - c \vec{e}_\rho(\phi(t))]$$



3.2.1. Von $\vec{r}_A = \vec{r}(t_A)$ zur $\vec{r}_B = \vec{r}(t_B)$ bewegt das Teilchen,
Zuwachs der kinetischen Energie = Arbeit der Lorentzkraft.

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_{\text{Lorentz}} \cdot d\vec{s} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}_{\text{Lorentz}} \cdot \dot{\vec{r}} dt$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} \frac{\mu_0 q I}{2\pi\rho} [a \vec{e}_z - c \vec{e}_\rho(\phi(t))] \cdot [a \vec{e}_\rho(\phi(t)) - (\rho_0 + at) b \vec{e}_\phi(\phi) + c \vec{e}_z] dt$$

$$= \frac{\mu_0 q I}{2\pi\rho} \int_{t_A}^{t_B} [a \cdot c \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z - c \cdot a \vec{e}_\rho(\phi(t)) \cdot \vec{e}_\rho(\phi(t))] dt = 0$$

Allgemein:

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} \sim \dot{\vec{r}} \times \vec{B} \perp \dot{\vec{r}}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{Lorentz}} \cdot \dot{\vec{r}} = 0.$$

für ein beliebiges Magnetfeld \vec{B}

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}_{\text{Lorentz}}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} dt = 0.$$

A4.

4.1. \vec{E}_y bedeutet polarisationsrichtung.Fläche konstante Phase. $\omega t - kz = c \Rightarrow z = \text{konst}$ für t -e bestimmte Zeit
 \Rightarrow Ebene Welle

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

Richtung: da $\frac{\omega}{k} > 0$ pos. z -Richtung.4.2. Induktionsgesetz: $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}$

für harmonische Welle, bei Fourier-Transformation gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega, \quad \vec{E} \rightarrow \underline{\vec{E}}, \quad \vec{b} \rightarrow \underline{\vec{H}}$$

$$\text{rot} \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}} = -j\omega \mu_0 \underline{\vec{H}}$$

$$\underline{\vec{H}} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \text{rot} \underline{\vec{E}} = \frac{j}{\omega\mu_0} \text{rot} \underline{\vec{E}}$$

$$= \frac{j}{\omega\mu_0} \begin{vmatrix} \underline{\vec{e}}_x & \underline{\vec{e}}_y & \underline{\vec{e}}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_0 e^{j(\omega t - kz)} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{j}{\omega\mu_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [E_0 e^{j(\omega t - kz)}] \underline{\vec{e}}_z - \frac{\partial}{\partial z} [E_0 e^{j(\omega t - kz)}] \underline{\vec{e}}_x \right\}$$

$$= \frac{j}{\omega\mu_0} jk E_0 e^{j(\omega t - kz)} \underline{\vec{e}}_x$$

$$= -\frac{k}{\omega\mu_0} E_0 e^{j(\omega t - kz)} \underline{\vec{e}}_x$$

4.3. Poynting Vektor: $\vec{S} = \vec{E}(z) \times \vec{H}(z)$

4-2

$$\vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & E_0 e^{j(\omega t - kz)} & 0 \\ -\frac{k}{\omega \mu_0} E_0 e^{j(\omega t - kz)} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{k}{\omega \mu_0} E_0^2 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_z$$

$$\vec{S} = \frac{k E_0^2}{\omega \mu_0} \cos^2(\omega t - kz) \vec{e}_z$$

Augenblickswert: $\frac{k E_0^2}{\omega \mu_0} \cos^2(\omega t - kz)$

Richtung: pos. z - Richtung.

4.4

$$\vec{E}_{\text{res}}(z, t) = \vec{E}(z, t) + \vec{E}'(z, t)$$

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

$$\vec{E}'(z, t) = E_0 \cos(\omega' t - k' z) \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_{\text{res}}(z, t) = E_0 [\cos(\omega t - kz) + \cos(\omega' t - k' z)] \vec{e}_y$$

$$= E_0 \cdot 2 \cos\left[\frac{(\omega + \omega')t}{2} - \frac{(k + k')z}{2}\right] \cos\left[\frac{(\omega - \omega')t}{2} - \frac{(k - k')z}{2}\right] \vec{e}_y$$

Trägerwelle: $\cos\left[\frac{\omega + \omega'}{2} t - \frac{k + k'}{2} z\right]$, $V_{ph} = \frac{\omega + \omega'}{k + k'}$

einwickelnde Welle: $2 E_0 \cos\left[\frac{\omega - \omega'}{2} t - \frac{k - k'}{2} z\right]$

$$V_{Gr} = \frac{\omega - \omega'}{k - k'}$$

4.2.1. Definition der Poynting Vektor; $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{S} &= \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) \\ &= \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} \end{aligned}$$

mit Maxwell'schen Gleichungen:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{S} &= \vec{H} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) - \vec{E} \cdot \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \\ &= -\mu \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \varepsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{j} \end{aligned}$$

$$x \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial x^2}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{S} &= -\mu \frac{1}{2} \frac{\partial B^2}{\partial t} - \varepsilon \frac{1}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{j} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu H^2 + \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \right) = \operatorname{div} \vec{S} + \vec{E} \cdot \vec{j} \end{aligned}$$

mit Gauß'schen Integralatz: $\int_A \vec{S} \cdot d\vec{A} = \int_V \operatorname{div} \vec{S} \cdot d\tau$

$$\Rightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \mu H^2 + \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \right) d\tau = \int_A \vec{S} \cdot d\vec{A} + \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} d\tau$$

$\int_A \vec{S} \cdot d\vec{A}$: pro Zeit von Volumen V wegströmende elektromagnetische Energie.

$\int_V \vec{E} \cdot \vec{j} d\tau$: pro Zeit in Stromwärme umgewandelte elektromagn. Energie.

$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \mu H^2 + \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \right) d\tau$: zeitliche Abnahme der elektromagn. Energie in Volumen V .

Grundwelle des Koaxileiters breitet sich nach Skript Gl. 6.448 mit Lichtgeschwindigkeit des Mediums aus:

$$\vec{E} = -j\beta C_2 \frac{1}{\rho} e^{j(\omega t - \beta z)} \vec{e}_\rho$$

$$\vec{H} = -j\omega \epsilon C_2 \frac{1}{\rho} e^{j(\omega t - \beta z)} \vec{e}_\phi$$

in homogene Planwelle, weil $E \sim \frac{1}{\rho}$.

Anordnung wie ebene Welle auf Grenzfläche von 2 Dielektrika senkrecht einfällt.

$$r = \frac{E_r}{E_e} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} = \frac{\frac{z_2}{z_1} - 1}{\frac{z_2}{z_1} + 1}$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}}$$

$$r = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}} - \sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}} + \sqrt{\epsilon_{r2}}}$$

$$\text{für Energie: } r^2 = \left(\frac{\sqrt{\epsilon_{r1}} - \sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}} + \sqrt{\epsilon_{r2}}} \right)^2$$

Diplomhauptprüfung (H01)

Theoretische Elektrotechnik III

1. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
2. Außer Schreib- und Zeichenmaterial sind keine Hilfsmittel zugelassen (auch kein Taschenrechner)!
3. Die jeweils maximal erreichbare Punktzahl pro Teilaufgabe ist in Klammern am Ende jeder Teilaufgabe angegeben.
4. Es sind alle Aufgaben zu bearbeiten! Die Zusatzaufgaben sind optional.
5. Verwenden Sie ausschließlich die Ihnen ausgeteilten Doppelbögen; nur diese werden bewertet. Trennen Sie die Doppelbögen nicht.
6. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Doppelbogen!
7. Schreiben Sie auf jeden Doppelbogen Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Aufgabe (inklusive der Teilaufgabe), die Sie bearbeiten!
8. Zeigen Sie den gewählten Lösungsweg auf. Geben Sie insbesondere Zwischenergebnisse und Begründungen an. Nur eindeutige Aussagen können bewertet werden!
9. Einige häufig gebrauchte Formeln finden Sie im Anhang.
10. VIEL ERFOLG!!!

19.10.2001

1. Aufgabe: Kapazität von Kugelkondensatoren (12 Punkte + 4 Zusatzpunkte)

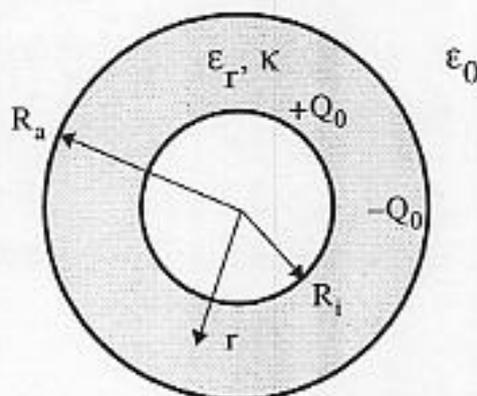


Bild 1: Kugelkondensator

Bild 1 zeigt einen Kugelkondensator, dessen innere ($r = R_1$) und äußere ($r = R_2$) Elektrode auf die Ladungen $+Q_0$ (bzw. $-Q_0$) aufgeladen werden. Zwischen beiden unendlich gut leitenden Elektroden befindet sich ein Dielektrikum mit der relativen Dielektrizitätszahl $\epsilon_r = \text{konst.}$

- 1.1 Berechnen sie die Kapazität des **idealen** Kugelkondensators nach Bild 1 (als Funktion der Geometrie- und Material-Parameter)! (3 Punkte)
- 1.2 Das Dielektrikum sei jetzt **inhomogen** und es gelte: $\epsilon_r(r) = r/r_0$; $r_0 = \text{konst}$ mit Einheit [m], $r \in [R_1, R_2]$. Berechnen Sie die neue Kapazität des Kugelkondensators nach Bild 1 (als Funktion der Geometrie- und Material-Parameter)! (2 Punkte)

Nun gelte wieder $\epsilon_r = \text{konst.}$, aber das Dielektrikum sei **verlustbehaftet**, d. h. es besitzt die Leitfähigkeit $\kappa = \text{konst} > 0$. Zur Zeit $t = 0$ ist der Kugelkondensator wieder auf die Ladungen $+Q_0$ (bzw. $-Q_0$) aufgeladen. Es schließt sich ein Ausgleichsvorgang an.

- 1.3 Ermitteln Sie den **zeitlichen** Verlauf der Ladungen auf den Elektroden (ohne Induktionsterme der Maxwell'schen Gleichungen)! (4 Punkte)
- 1.4 Berechnen Sie weiterhin die elektrische Feldstärke, Strom und Spannung zwischen den beiden Elektroden als Funktionen von t ! Berechnen Sie damit die Kapazität C und den Widerstand R der Anordnung. (3 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 1.Z.1 Berechnen Sie mit einem **alternativen** Lösungsweg die Kapazität C und Widerstand R in Teilaufgabe 1.4 (nur prinzipieller Rechnungsweg !) (2 Punkte)
- 1.Z.2 Welchen Wert hat das **Produkt** $R \cdot C$ von Teilaufgabe 1.4 ? Welche **Bedeutung** hat diese Größe? (2 Punkte)

2. Aufgabe: Magnetfeld eines Stromfadens und eines Streifenleiters
(11 Punkte + 3 Zusatzpunkte)

Gegeben sei ein endlicher Stromfaden nach Bild 2.1 mit der Länge $2a$, der sich parallel zur x -Achse befindet und durch den Punkt $P_0(0, y_0, 0)$ tritt. Ferner sei nach Bild 2.2 ein **unendlich langer** Streifenleiter mit der Breite b gegeben. Der Stromfaden und der Streifenleiter werden von dem **zeitabhängigen Strom** $i(t) = I_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$ in positiver x -Richtung durchflossen. Dieser Strom verteilt sich im Falle des Streifenleiters homogen über die Breite b des Streifenleiters. Im Folgenden wird immer die **quasistationäre Näherung** vorausgesetzt!

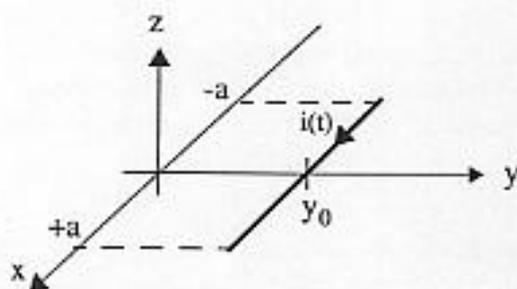


Bild 2.1: Stromfaden

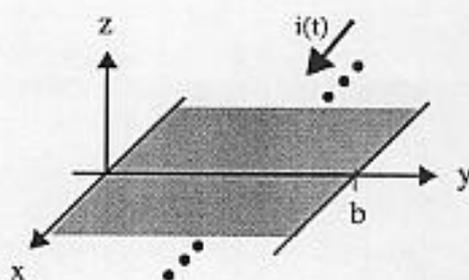


Bild 2.2: Streifenleiter

- 2.1 Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{H}(\vec{r})$ des Stromfadens durch $y = y_0$, welcher von dem Strom $i(t) = I_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$ durchflossen wird, siehe Bild 2.1! (4 Punkte)
- 2.2 Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{H}(\vec{r})$ des Stromfadens für $a \rightarrow \infty$! (2 Punkte)
- 2.3 Berechnen Sie nun das Magnetfeld $\vec{H}(\vec{r})$ des Streifenleiters nach Bild 2.2! (4 Punkte)
- 2.4 Das Magnetfeld aus Teilaufgabe 2.3 läßt sich für große Entfernungen von der x -Achse vereinfachen. Geben Sie eine Näherungslösung für das Fernfeld an! (1 Punkt)

Zusatzaufgabe:

- 2.Z.1 Berechnen Sie unter Verwendung eines **alternativen** Lösungswegs das Magnetfeld von Teilaufgabe 2.2 in kartesischen Koordinaten. (3 Punkte)

Aufgabe 3: Induktionsgesetz (8 Punkte + 5 Zusatzpunkte)

Gegeben sei eine in der y - z -Ebene liegende ebene Leiterschleife gemäß Bild 3. Die Abschnitte 1, 2, 3 der Leiterschleife seien fixiert, während der Leiter 4 schräg verläuft und parallel zur Anfangsposition auf den unendlich ausgedehnten Abschnitten 1 und 3 gleiten kann. Leiter 2 ist an einer Stelle unterbrochen, so daß dort eine Spannung u_i mit der Zählrichtung nach Bild 3 abgegriffen werden kann. Das Magnetfeld sei nur im Bereich $-L \leq z \leq L$ und $0 \leq y \leq d$ mit $\vec{B}(y, z, t) = B_0 \cdot y \cdot z \cdot \cos \omega t \cdot \vec{e}_x$ vorhanden. Es gelte $t_0, B_0, b, c, d, L = \text{konst} > 0$.

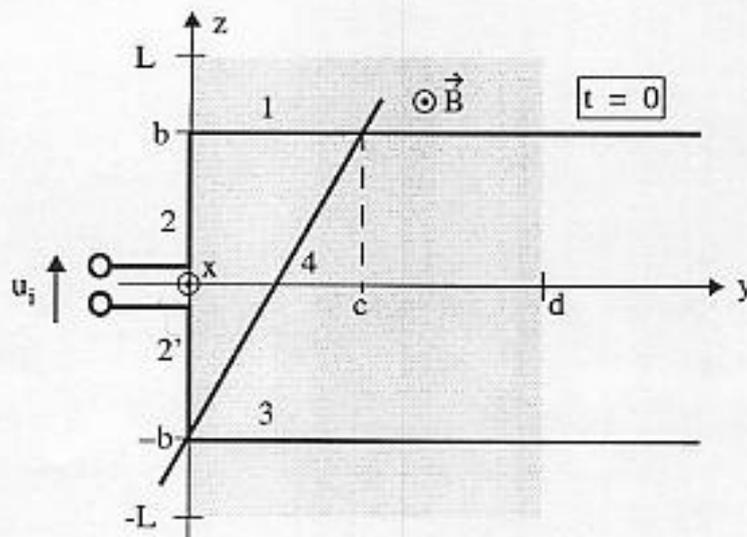


Bild 3: Beweglicher Leiter im Magnetfeld

Die Startposition der Bewegung (zum Zeitpunkt $t = 0$) ist in Bild 3 zu sehen.

- 3.1 Berechnen Sie für die Anfangsposition den magnetischen Fluß $\Phi(t)$ durch die Leiterschleife und hieraus die induzierte Spannung u_i ! (3 Punkte)
- 3.2 Nun rotiere die ganze Anordnung um die y -Achse mit der Frequenz f_0 gemäß der Funktion $\sin(2\pi f_0 t)$. Berechnen Sie nun die induzierte Spannung u_i ! (2 Punkte)

Die Leiterschleife rotiere nicht mehr. Das Magnetfeld sei jetzt nur von z und t abhängig mit $\vec{B}(z, t) = B_0 \cdot (z + z_0) \cdot \cos \omega t \cdot \vec{e}_x$ und $z_0 = \text{konst}$. Der Leiter 4 setzt sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in y -Richtung mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v \cdot \vec{e}_y$, ($v = \text{konst} > 0$) in Bewegung.

- 3.3 Berechnen Sie jetzt die induzierte Spannung u_i ! Nehmen Sie hierzu an, daß sich der Leiter 4 immer vollständig im Magnetfeld befindet! (3 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 3.Z.1 Berechnen Sie jetzt die induzierte Spannung u_i für alle Zeiten t , also auch für die Zeiten, in denen sich der Leiter 4 nur teilweise im Magnetfeld befindet! (3 Punkte)
- 3.Z.2 Welche physikalische Vereinfachung wird im letzten Satz der Einleitung zur Aufgabe 3.3 unterstellt? (2 Punkte)

4. Aufgabe: Polarisation der TEM-Wellen (15 Punkte + 10 Zusatzpunkte)

Eine TEM-Welle besitze die Komponenten

$$\vec{E}_x(z, t) = E_1 \cdot \cos(\omega t - kz) \cdot \vec{e}_x \quad (4.1a)$$

$$\vec{E}_y(z, t) = E_2 \cdot \cos(\omega t - kz + \varphi_0) \cdot \vec{e}_y \quad (4.1b)$$

und breite sich im Vakuum aus.

- 4.1 Um welchen **Wellenform** handelt es sich? Stellen Sie die Welle in **komplexer Schreibweise** dar! Berechnen Sie das zugehörige **magnetische Feld** $\vec{H}(z, t)$! (5 Punkte)
- 4.2 Geben Sie den Augenblickswert und die Richtung der **Energieflußdichte** der elektromagnetischen Welle an! (2 Punkte)
- 4.3 Leiten Sie mathematisch her, daß der Endpunkt des aus der Überlagerung von $E_x(z_0, t)$ und $E_y(z_0, t)$ entstehenden Feldstärkevektors in jeder Ebene $z = z_0$ eine **Bahnkurve** gemäß $\frac{E_x^2}{E_1^2} + \frac{E_y^2}{E_2^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_1 E_2} \cos \varphi_0 = \sin^2 \varphi_0$ durchläuft. (4 Punkte)
- 4.4 Zeichnen Sie die Bahnkurven unter der Annahme $E_2 = 2E_1$ für $\varphi_0 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ in einem Koordinatensystem mit E_x - und E_y -Achsen. Bestimmen Sie die Durchlaufrichtung der Bahnkurve in Ausbreitungsrichtung durch die Punkte zu den Zeiten $t = 0, \frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{\omega}, \frac{3}{2\omega}\pi$! (4 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 4.Z.1 Zeigen Sie, daß eine linear polarisierte Welle formal immer aus zwei zirkular polarisierten Wellen zusammengesetzt werden kann! Welche Bedingungen müssen die beiden zirkular polarisierten Wellen erfüllen? (2 Punkte)
- 4.Z.2 Die TEM-Welle breite sich nun senkrecht durch eine sogenannte $\lambda/4$ -Platte aus, die in x- und y-Richtung unendlich ausgedehnt ist und deren **anisotrope Eigenschaft** durch

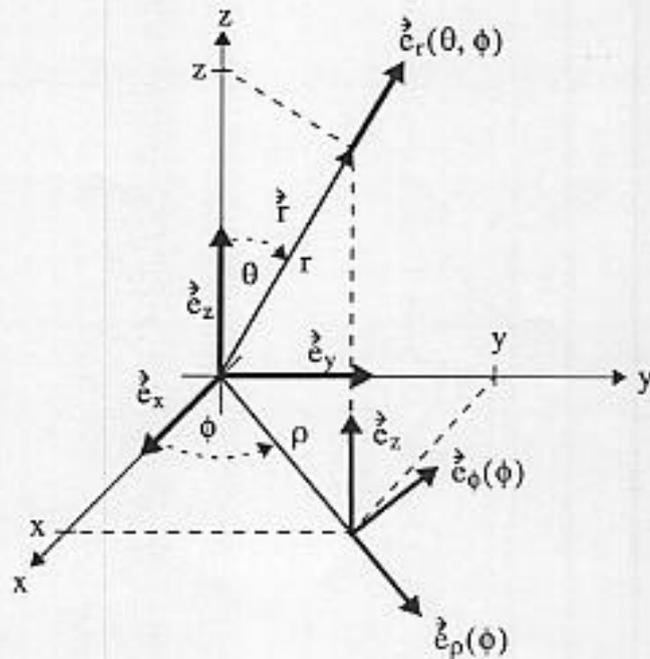
$$\text{den Tensor } \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} \text{ mit } \epsilon_x > \epsilon_y > \epsilon_z \text{ beschrieben werden kann.}$$

Wie dick muß diese Platte sein, damit die Komponenten nach (4.1a, 4.1b) nach dem Durchgang eine relative Phasenverschiebung von $\lambda/4$ erfahren? Berechnen Sie die elektrischen Felder der wieder austretenden Wellen für $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_0 = \pi/2$ unter Berücksichtigung des einmaligen Fresnelschen Verlustes an der Grenzfläche! Welche Polarisationen zeigen sie? (8 Punkte)

Formelsammlung

1. Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}\vec{e}_\rho(\phi) &= \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\phi \cdot \vec{e}_y \\ \vec{e}_\phi(\phi) &= -\sin\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\phi \cdot \vec{e}_y \\ \vec{r}(\rho, \phi, z) &= \rho \cdot \vec{e}_\rho(\phi) + z \cdot \vec{e}_z \\ \vec{e}_\rho(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [x\vec{e}_x + y\vec{e}_y] \\ \vec{e}_\phi(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y] \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}\end{aligned}$$



2. Kugelkoordinaten:

$$\vec{e}_r(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{e}_r(\theta, \phi) = \sin\theta \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\theta \sin\phi \cdot \vec{e}_y + \cos\theta \cdot \vec{e}_z$$

3. Oberflächen- und Volumenelemente:

$$d\vec{A}(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \cdot \vec{e}_r$$

$$dV(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$

$$d\vec{A}(\rho, \phi, z) = \rho d\phi dz \cdot \vec{e}_\rho$$

$$dV(\rho, \phi, z) = \rho d\rho d\phi dz$$

4. Divergenz und Rotation in Zylinderkoordinaten

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \{\rho A_\rho\} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \{A_\phi\} + \frac{\partial}{\partial z} \{A_z\}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{e}_\rho \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right] + \vec{e}_\phi \cdot \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] + \vec{e}_z \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right]$$

5. Laplace-Operator und Gradient in Kugelkoordinaten

$$\Delta\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \right]$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \cdot \vec{e}_\phi$$

6. Vektoroperationen:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \text{ mit } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$$

7. Näherungsformeln nach Taylorentwicklung um x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

für kleine Winkel α gilt: $\sin \alpha = \tan \alpha = \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$, od. $\sin \alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{3!}$, $\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!}$.

8. Integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C,$$

$$\int \frac{x dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + C,$$

$$\int \frac{dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \cdot \sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

9. Trigonometrische Funktionen:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

10. Feldtheoretische Zusammenhänge:

Biot-Savartsches Gesetz:
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Fresnelsche Formeln mit Wellenausbreitungsrichtungen \vec{e}_c , \vec{e}_r und \vec{e}_t :

a) für S-Polarisation:

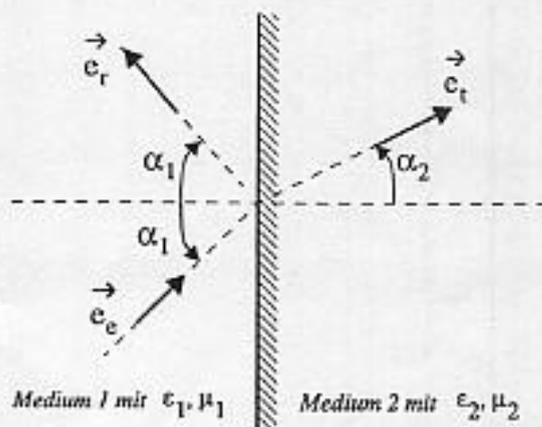
$$\frac{E_r}{E_e} = \frac{Z_2 \cos \alpha_1 - Z_1 \cos \alpha_2}{Z_2 \cos \alpha_1 + Z_1 \cos \alpha_2}$$

$$\frac{E_t}{E_e} = \frac{2Z_2 \cos \alpha_1}{Z_2 \cos \alpha_1 + Z_1 \cos \alpha_2}$$

b) für P-Polarisation:

$$\frac{E_r}{E_e} = \frac{Z_2 \cos \alpha_2 - Z_1 \cos \alpha_1}{Z_2 \cos \alpha_2 + Z_1 \cos \alpha_1}$$

$$\frac{E_t}{E_e} = \frac{2Z_2 \cos \alpha_1}{Z_1 \cos \alpha_1 + Z_2 \cos \alpha_2}$$



Brechzahl und Wellenwiderstand: $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$, $Z = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}}$.

A1.

$$1.1. \quad Q \rightarrow \vec{D} \rightarrow \vec{E} \rightarrow \Delta U.$$

$$C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{Q}{\int_V \vec{E} d\vec{s}}$$

Kugelfläche mit Radius r als Gauß-Fläche.

$$\iint \vec{D} d\vec{A} = \iiint \rho dV = +Q_0$$

$$D \cdot 4\pi r^2 = Q_0 \Rightarrow D = \frac{Q_0}{4\pi r^2}$$

Symmetrie: \vec{D} hat nur radiale Komponente.

$$\vec{D} = \frac{Q_0}{4\pi r^2} \cdot \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \vec{e}_r$$

$$\begin{aligned} \int_{R_i}^{R_a} \vec{E} d\vec{s} &= \int_{R_i}^{R_a} \vec{E} \cdot dr \vec{e}_r = \int_{R_i}^{R_a} \frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dr \\ &= \frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \int_{R_i}^{R_a} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left. -\frac{1}{r} \right|_{R_i}^{R_a} \\ &= \frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a} \right) \end{aligned}$$

$$C = \frac{Q_0}{\frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a} \right)} = 4\pi \epsilon_0 \epsilon_r \frac{R_a \cdot R_i}{R_a - R_i}$$

$$1.2. \quad \epsilon_r = k \cdot r \quad \vec{E} = \frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0 \cdot \epsilon_r r^2} \vec{e}_r = \frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0 \cdot k \cdot r^3} \vec{e}_r$$

$$\int_{R_i}^{R_a} \vec{E} d\vec{s} = \frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0 \cdot k} \int_{R_i}^{R_a} \frac{1}{r^3} dr = \frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0 \cdot k} \left. \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \right) \right|_{R_i}^{R_a}$$

$$= \frac{Q_0}{8\pi \epsilon_0 k} \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_a^2} \right)$$

$$C = 8\pi \epsilon_0 k \cdot \frac{R_a^2 \cdot R_i^2}{R_a^2 - R_i^2}$$

1.3. Erhaltung der elektr. Ladungen:

$$\int \vec{g} \cdot d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \rho d\tau$$

Gaußsche Integral: $\int \vec{g} \cdot d\vec{A} = \int \operatorname{div} \vec{g} d\tau$

$$\Rightarrow \int \operatorname{div} \vec{g} d\tau = -\frac{\partial}{\partial t} \int \rho d\tau$$

$$\operatorname{div} \vec{g} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho$$

$$\operatorname{div} \vec{g} = \operatorname{div}(\kappa \cdot \vec{E}) = \operatorname{div}\left(\kappa \cdot \frac{\vec{D}}{\epsilon}\right) = \frac{\kappa}{\epsilon} \cdot \operatorname{div}(\vec{D}) = \frac{\kappa}{\epsilon} \cdot \rho$$

DGL:

$$\frac{\kappa}{\epsilon} \rho(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) = 0$$

Spezial in diesem Fall: homogen und symmetrische Ladungsverteilung auf den beiden Elektroden $\Rightarrow \rho(\vec{r}, t)$ durch $Q(t)$ für beiden Elektroden ersetzen.

$$\frac{\kappa}{\epsilon} Q(t) + \frac{\partial}{\partial t} Q(t) = 0$$

Lösungsansatz: $Q(t) = K \cdot e^{-\frac{\kappa}{\epsilon} \cdot t} = K \cdot e^{-\frac{t}{T_R}}$

$$T_R = \frac{\epsilon}{\kappa}$$

$$t=0: Q(t=0) = Q_0 \Rightarrow K = Q_0$$

Relaxationszeit

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{\kappa}{\epsilon} t} \quad \text{für innere Elektrode}$$

$$Q(t) = -Q_0 \cdot e^{-\frac{\kappa}{\epsilon} t} \quad \text{für äußere Elektrode}$$

$$1.4. \quad \vec{E} = \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \vec{e}_r = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} e^{-\frac{\kappa}{\epsilon} t}$$

$$I = \int \vec{g} \cdot d\vec{A} = \kappa \cdot E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\kappa Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} e^{-\frac{\kappa}{\epsilon} t} \cdot 4\pi r^2 = \frac{\kappa Q_0}{\epsilon_0\epsilon_r} e^{-\frac{\kappa}{\epsilon} t}$$

$$\Delta U = \int_{R_i}^{R_a} E dr = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} e^{-\frac{\kappa}{\epsilon} t} \int_{R_i}^{R_a} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} e^{-\frac{\kappa}{\epsilon} t} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}\right)$$

$$\text{Kapazität: } C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{Q_0 \cdot e^{-\frac{\kappa}{\epsilon} t}}{\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} e^{-\frac{\kappa}{\epsilon} t} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}\right)}$$

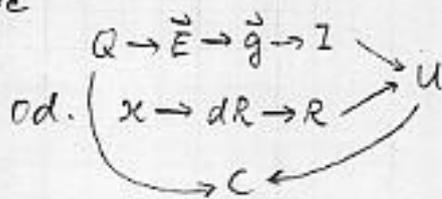
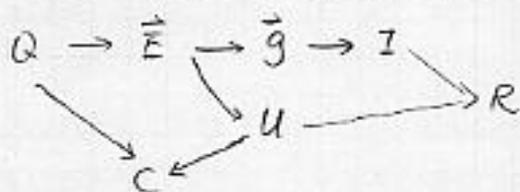
$$= 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{R_a R_i}{R_a - R_i}$$

$$\text{Widerstand: } R = \frac{\Delta U}{I} = \frac{\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} e^{-\frac{\kappa}{\epsilon} t} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}\right)}{\frac{\kappa Q_0}{\epsilon \cdot \epsilon_r} e^{-\frac{\kappa}{\epsilon} t}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\kappa} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}\right)$$

1. Z. 1 Alternative Lösungswege der R und C:

Annahme Q auf der inneren Elektrode



$$1. Z. 2 \quad R \cdot C = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{R_a \cdot R_i}{R_a - R_i} \cdot \frac{1}{4\pi\kappa} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}\right)$$

$$= \frac{\epsilon_0\epsilon_r}{\kappa} = \frac{\epsilon}{\kappa} = T_R$$

Relaxationszeit in Einheit "s"

A2.

2.1. Stromfaden ist endlich lang \Rightarrow Biot-Savart-Gesetz:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad d\vec{s}' = \begin{pmatrix} dx' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{s}' = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x-x' & y-y_0 & z \\ dx' & 0 & 0 \end{vmatrix} = z dx' \vec{e}_y - (y-y_0) dx' \vec{e}_z$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{z dx' \vec{e}_y - (y-y_0) dx' \vec{e}_z}{[(x-x')^2 + (y-y_0)^2 + z^2]^{3/2}}$$

$(y-y_0)^2 + z^2 = R^2$ Abstand zwischen Beobachtungspunkt und dem Stromfaden.

Sub: $x-x' = u \quad dx' = -du$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{x+a}^{x-a} \frac{-z \vec{e}_y + (y-y_0) \vec{e}_z}{[u^2 + R^2]^{3/2}} du$$

$$= +\frac{\mu_0 I}{4\pi} [z \vec{e}_y - (y-y_0) \vec{e}_z] \left. \frac{u}{R^2 \sqrt{u^2 + R^2}} \right|_{u=x+a}^{u=x-a}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{z \vec{e}_y - (y-y_0) \vec{e}_z}{(y-y_0)^2 + z^2} \cdot \left(\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}} - \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}} \right)$$

$I = I_0 \cos \omega t \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$

$$\vec{H} = \frac{I_0 \cos \omega t}{4\pi} \left(\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}} - \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}} \right) \cdot \frac{z \vec{e}_y - (y-y_0) \vec{e}_z}{(y-y_0)^2 + z^2}$$

2.2. $a \rightarrow \infty \Rightarrow x-a \approx -a \quad \sqrt{(x-a)^2 + (y-y_0)^2 + z^2} \approx a$

$x+a \approx a \quad \sqrt{(x+a)^2 + (y-y_0)^2 + z^2} \approx a$

$$\vec{H} \approx \frac{I_0 \cos \omega t}{4\pi} \left(\frac{-a}{a} - \frac{a}{a} \right) \frac{z \vec{e}_y - (y-y_0) \vec{e}_z}{(y-y_0)^2 + z^2}$$

$$= \frac{I_0 \cos \omega t}{2\pi} \frac{-z \vec{e}_y + (y-y_0) \vec{e}_z}{(y-y_0)^2 + z^2}$$

2.3. Idee: • Danke Stromleiter zusammengesetzt als Summe von Stromfäden
 • Ersetze $i(t)$ aus 2.2 durch $k_0(t) = \frac{di(t)}{dy_0} = \frac{I_0 \cos \omega_0 t}{b}$

k_0 : Strom beleg

• Summiere $\left(\int_0^b dy_0 \right)$ über alle Stromfäden

=> "Stromfaden": $\frac{k_0 \cdot 1}{2\pi} \cdot \frac{-z \vec{e}_y + (y-y_0) \vec{e}_z}{(y-y_0)^2 + z^2} = \frac{I_0 \cos \omega_0 t}{2\pi b} \cdot \frac{-z \vec{e}_y + (y-y_0) \vec{e}_z}{(y-y_0)^2 + z^2}$

=> $\vec{H}(y,z) = \int_{y_0=0}^b \frac{I_0 \cos \omega_0 t}{2\pi b} \cdot \frac{-z \vec{e}_y + (y-y_0) \vec{e}_z}{(y-y_0)^2 + z^2} dy_0$

= $\frac{I_0 \cos \omega_0 t}{2\pi b} \cdot \left\{ \int_{y_0=0}^b \frac{-z \vec{e}_y}{(y-y_0)^2 + z^2} dy_0 + \int_{y_0=0}^b \frac{(y-y_0) \vec{e}_z}{(y-y_0)^2 + z^2} dy_0 \right\}$

Sub.: $y-y_0 = u \Rightarrow \frac{du}{dy_0} = -1 \rightarrow dy_0 = -du$

Grenzen: $y_0=0 \rightarrow u=y$

$y_0=b \rightarrow u=y-b$

$\vec{H}(y,z) = \frac{I_0 \cos \omega_0 t}{2\pi b} \cdot \left\{ \int_{u=y}^{u=y-b} \frac{+z \vec{e}_y}{u^2 + z^2} du - \int_y^{y-b} \frac{u \vec{e}_z}{u^2 + z^2} du \right\}$

= $\frac{I_0 \cos \omega_0 t}{2\pi b} \cdot \left\{ z \cdot \frac{1}{z} \cdot \arctan \left(\frac{u}{z} \right) \Big|_y^{y-b} \vec{e}_y - \frac{1}{2} \ln(u^2 + z^2) \Big|_y^{y-b} \vec{e}_z \right\}$

$\vec{H}(y,z) = \frac{I_0 \cos \omega_0 t}{2\pi b} \cdot \left\{ \left[\arctan \left(\frac{y-b}{z} \right) - \arctan \left(\frac{y}{z} \right) \right] \vec{e}_y - \frac{1}{2} \ln \frac{(y-b)^2 + z^2}{y^2 + z^2} \vec{e}_z \right\}$

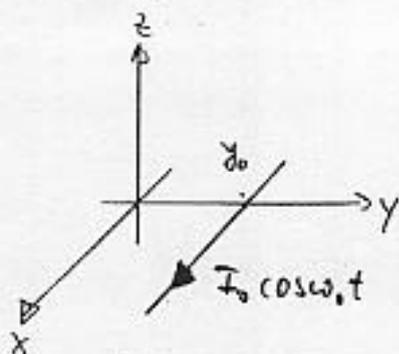
2.4. Anschaulich klar: Für große Entfernungen "sicht" man nur einen Stromfaden an der Stelle $y = \frac{b}{2}$

=> $\vec{H}(y,z) = \frac{I_0 \cos \omega_0 t}{2\pi} \cdot \frac{-z \vec{e}_y + (y - \frac{b}{2}) \vec{e}_z}{(y - \frac{b}{2})^2 + z^2}$

2.2.1:

Alternative Lösung für $a \rightarrow \infty$: F98 A2.

2-3



Symmetrie: \vec{H} hat nur \vec{e}_ϕ -Komponente

"rechte-Hand-Regel"

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \iint \vec{j} d\vec{A} = i(t) = I_0 \cos \omega_0 t \quad \text{Amplitud. Näherung}$$

$$H \cdot 2\pi s = I_0 \cos \omega_0 t$$

$$H = \frac{1}{2\pi s} \cdot I_0 \cos \omega_0 t$$

$$\Rightarrow \vec{H}(s) = \frac{I_0 \cos \omega_0 t}{2\pi s} \vec{e}_\phi(s)$$

im Ursprung

keine Koordinaten: allg.: $\vec{e}_\phi = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} (-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y)$; $s = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

hier: $x \hat{=} y$; $y \hat{=} z$: $\vec{e}_\phi = \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}} (-z\vec{e}_y + y\vec{e}_z)$; $s = \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}$

$$\Rightarrow \vec{H}(y, z) = \frac{I_0 \cos \omega_0 t}{2\pi} \cdot \frac{-z\vec{e}_y + y\vec{e}_z}{y^2+z^2} \quad \text{bei Stromfaden durch Ursprung}$$

Stromfaden durch $y = y_0$: $y \rightarrow y - y_0$

$$\vec{H}(y, z) = \frac{I_0 \cos \omega_0 t}{2\pi} \cdot \frac{-z\vec{e}_y + (y - y_0)\vec{e}_z}{(y - y_0)^2 + z^2}$$

A3.

3.1. Liniegleichung des Stab 4.

$$z = -b + \frac{2b}{c} y = b \left(\frac{2}{c} y - 1 \right).$$

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \int \vec{B} \cdot d\vec{A} & d\vec{A} &= dy dz \vec{e}_x \\ &= \int_{y=0}^c \int_{z=b(\frac{2}{c}y-1)}^b B_0 y \cdot z \cos \omega t dy dz \\ &= \int_{y=0}^c B_0 y \cdot \cos \omega t dy \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_{z=b(\frac{2}{c}y-1)}^b \\ &= \int_{y=0}^c B_0 y \cos \omega t \cdot \frac{b^2}{2} \left(1 - \frac{4}{c^2} y^2 + \frac{4}{c} y - 1 \right) dy \\ &= B_0 \cos \omega t \cdot \frac{2b^2}{c} \int_{y=0}^c \left(-\frac{1}{c} y^2 + y^2 \right) dy \\ &= B_0 \cos \omega t \cdot \frac{2b^2}{c} \left(-\frac{1}{4c} y^4 + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^c \\ &= B_0 \cos \omega t \cdot \frac{2b^2}{c} \left(\frac{c^3}{3} - \frac{c^3}{4} \right) \\ &= \frac{1}{6} B_0 b^2 c^2 \cos \omega t. \end{aligned}$$

$$U_i = + \frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{linkes Schwanbissinn}).$$

$$= -\frac{1}{6} B_0 b^2 c^2 \omega \sin \omega t.$$

$$3.2. \quad \Phi(t) = \int_{y=0}^c \int_{z=b(\frac{2}{c}y-1)\sin(2\pi f_0 t)}^{b\sin(2\pi f_0 t)} B_0 y \cdot z \cos \omega t dy dz$$

$$= \int_{y=0}^c B_0 y \cdot \cos \omega t \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_{z=b(\frac{2}{c}y-1)\sin(2\pi f_0 t)}^{b\sin(2\pi f_0 t)}.$$

$$= \int_{y=0}^c B_0 y \cdot \cos \omega t \cdot \sin^2(2\pi f_0 t) \cdot \frac{b^2}{2} \left(\frac{4}{c} y - \frac{4}{c^2} y^2 \right) dy$$

$$= \frac{1}{6} B_0 b^2 c^2 \cos \omega t \sin^2(2\pi f_0 t).$$

$$U_i = + \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{6} B_0 b^2 c^2 [\omega \pi f_0 \sin(2\pi f_0 t) \cos(\omega t) \cos \omega t - \omega \sin \omega t \sin^2(2\pi f_0 t)]$$

$$= \frac{1}{6} B_0 b^2 c^2 [2\pi f_0 \sin(4\pi f_0 t) \cos \omega t - \omega \sin \omega t \sin^2(2\pi f_0 t)]$$

3.3. Linien Gleichung des Stab 4:

$$z = b \left[\frac{z}{c} (y - vt) - 1 \right]$$

$$y = \frac{c}{2} \left[\frac{z}{b} + 1 \right] + vt$$

$$\Phi(t) = \int_{z=-b}^{+b} \int_{y=0}^{y_0} B_0 (z+z_0) \cos \omega t \, dy \, dz \quad \text{mit } y_0 = \frac{c}{2} \left[\frac{z}{b} + 1 \right] + vt$$

$$= B_0 \cos \omega t \int_{z=-b}^{+b} \int_{y=0}^{\frac{c}{2} \left[\frac{z}{b} + 1 \right] + vt} (z+z_0) y \, dy \, dz$$

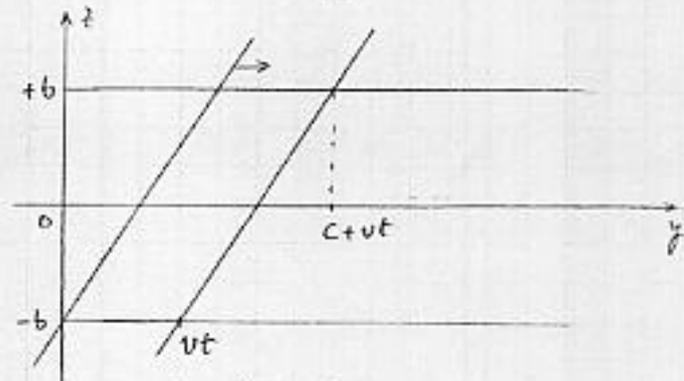
$$= B_0 \cos \omega t \int_{z=-b}^{+b} (z+z_0) \left[\frac{c}{2b} z + \frac{c}{2} + vt \right] dz$$

$$= B_0 \cos \omega t \int_{z=-b}^{+b} \left[\frac{c}{2b} z^2 + \left(\frac{c}{2} + vt + \frac{c z_0}{2b} \right) z + \left(\frac{c}{2} + vt \right) z_0 \right] dz$$

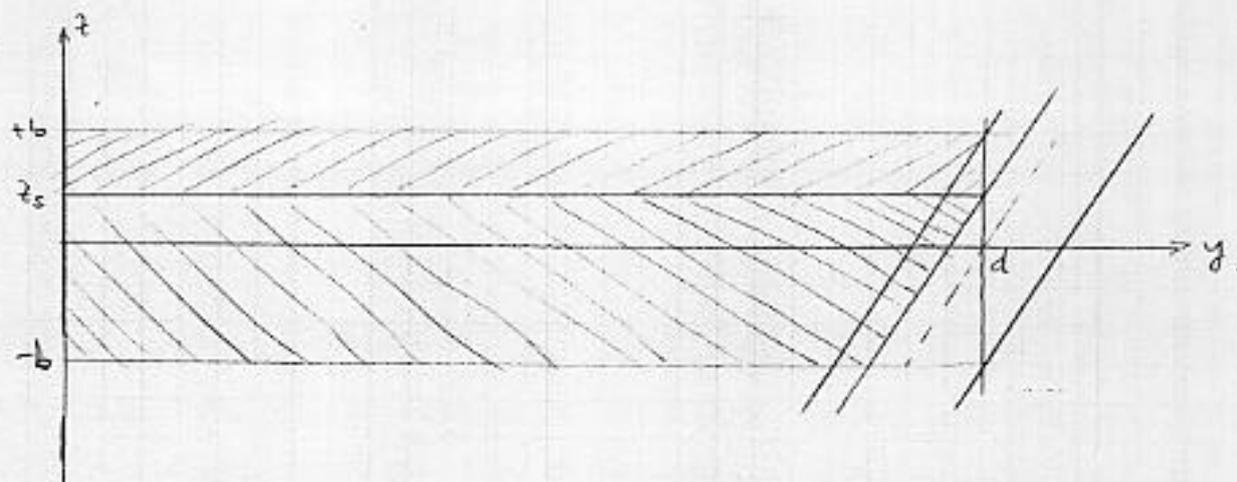
$$= B_0 \cos \omega t \left[\frac{c}{6b} z^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{2} + vt + \frac{c z_0}{2b} \right) z^2 + \left(\frac{c}{2} + vt \right) z_0 \cdot z \right] \Big|_{-b}^{+b}$$

$$= B_0 \cos \omega t \left[\frac{c}{3} b^2 + (c + 2vt) z_0 b \right]$$

$$U_i = + \frac{d\Phi(t)}{dt} = 2v z_0 b B_0 \cos \omega t - \omega B_0 \left[\frac{c}{3} b^2 + (c + 2vt) z_0 b \right] \sin \omega t$$



3.2.1.



Fall 1. für $t < \frac{d-c}{v}$, die Kante Φ befindet sich vollständig im Magnetfeld.
 $\Phi(t)$ und U_i werden gleich wie in Teilaufgabe 3.3 berechnet.

Fall 2. für $\frac{d-c}{v} \leq t \leq \frac{d}{v}$, die Kante Φ ist nur teilweise im Magnetfeld.

Der Schnittpunkt von Kante Φ und Linie: $y = d$,

$$\left[0, d, b \left[\frac{z}{c} (d - vt) - 1 \right] \right] = \left[0, d, z_s \right]$$

$$\Phi(t) = \int_{z=-b}^{z_s} \int_{y=0}^{y_0} B_0 (z+z_0) \cos \omega t \, dy \, dz + \int_{z=z_s}^{+b} \int_{y=0}^d B_0 (z+z_0) \cos \omega t \, dy \, dz$$

$$\text{mit } z_s = -\frac{2bv}{c}t + \frac{2bd}{c} - b, \quad y_0 = \frac{c}{v} \left[\frac{z}{b} + 1 \right] + vt.$$

$$\Phi(t) = B_0 \cos \omega t \left[\frac{c}{6b} z^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{v} + vt + \frac{cz_0}{2b} \right) z^2 + \left(\frac{c}{v} + vt \right) z_0 z \right] \Big|_{-b}^{z_s}$$

$$+ B_0 \cos \omega t \int_{z=z_s}^b (z+z_0) \cdot d \, dz$$

$$= B_0 \cos \omega t \left[\frac{c}{6b} (z_s^3 + b^3) + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{v} + vt + \frac{cz_0}{2b} \right) (z_s^2 - b^2) + \left(\frac{c}{v} + vt \right) z_0 (z_s + b) \right. \\ \left. + B_0 \cos \omega t \cdot \left[\frac{d}{2} (b^2 - z_s^2) + z_0 d (b - z_s) \right] \right]$$

$$= B_0 \cos \omega t \left[\frac{c}{6b} (z_s^3 + b^3) + \frac{1}{4} \left(c + \frac{cz_0}{b} - 2d + 2vt \right) (z_s^2 - b^2) + \right. \\ \left. z_0 \left(\frac{c}{v} + vt \right) (z_s + b) - d z_0 (z_s - b) \right]$$

$$= B_0 \cos \omega t \cdot f(t)$$

$$U_i = \frac{d\phi(t)}{dt} = B_0 f'(t) \cos \omega t - \omega B_0 f(t) \sin \omega t.$$

$$f'(t) = \frac{c}{6b} \cdot 3z_s^2 \cdot \left(-\frac{2bV}{c}\right) + \frac{V}{2} (z_s^2 - b^2) + \frac{1}{4} \left(c + \frac{cz_0}{b} - 2d + 2vt\right) \left(-4z_s \cdot \frac{bV}{c}\right) \\ + z_0 v (z_s + b) + z_0 \left(\frac{c}{2} + vt\right) \cdot \left(-\frac{2bV}{c}\right) - z_0 d \left(-\frac{2bV}{c}\right).$$

Fall 3. für $t > \frac{d}{v}$, die Karte 4 ist nicht im Magnetfeld.

$$\Phi(t) = \int_{z=-b}^{+b} \int_{y=0}^d B_0 (z+z_0) \cos \omega t \, dy \, dz$$

$$= B_0 \cos \omega t \, d \left(\frac{z^2}{2} + z_0 z \right) \Big|_{-b}^{+b}$$

$$= B_0 d \cos \omega t \cdot z_0 \cdot 2b.$$

$$= 2B_0 d b z_0 \cos \omega t.$$

$$U_i = \frac{d\phi}{dt} = -2B_0 d b z_0 \omega \sin \omega t.$$

A4.

4.1.

$$\vec{E}_x(z,t) = \operatorname{Re} \left\{ E_1 e^{j(\omega t - kz)} \right\} \vec{e}_x$$

$$\vec{E}_x(z,t) = E_1 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x$$

$$\vec{E}_y(z,t) = \operatorname{Re} \left\{ E_2 \cdot e^{j(\omega t - kz + \varphi_0)} \right\} \cdot \vec{e}_y = \operatorname{Re} \left\{ E_2 \cdot e^{j\varphi_0} \cdot e^{j(\omega t - kz)} \right\} \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_y(z,t) = E_2 e^{j\varphi_0} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_y$$

Maxwell'sche Gleichung: $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

harmonische Felder $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$.

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega \mu_0 \vec{H}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_1 e^{j(\omega t - kz)} & E_2 e^{j\varphi_0} e^{j(\omega t - kz)} & 0 \end{vmatrix} = -j\omega \mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega \mu_0} \left[\frac{\partial}{\partial z} (E_1 e^{j(\omega t - kz)}) \vec{e}_y - \frac{\partial}{\partial z} (E_2 e^{j\varphi_0} e^{j(\omega t - kz)}) \vec{e}_x \right]$$

$$= -\frac{1}{j\omega \mu_0} \left[-jk E_1 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_y + jk E_2 e^{j\varphi_0} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x \right]$$

$$= \frac{k E_1}{\omega \mu_0} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_y - \frac{k E_2}{\omega \mu_0} e^{j\varphi_0} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x$$

Alternativ: $\vec{H} = \frac{1}{z} (\vec{e}_n \times \vec{E}) \quad z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad \vec{e}_n = \vec{e}_z$

$$\vec{H} = \frac{1}{z} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{z} [E_x \vec{e}_y - E_y \vec{e}_x]$$

$$\frac{k}{\omega \mu_0} = \frac{\omega}{c_0} \cdot \frac{1}{\omega \mu_0} = \frac{1}{c_0 \mu_0} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \frac{1}{\mu_0} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = \frac{1}{z}$$

4.2. Poynting-Vektor: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

4-2

$$\vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ E_x & E_y & 0 \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (E_x H_y - E_y H_x) \vec{e}_z$$

$$= E_1 \cos(\omega t - kz) \cdot \frac{k E_1}{\omega \mu_0} \cos(\omega t - kz)$$

$$- E_2 \cos(\omega t - kz + \varphi_0) \cdot \left(-\frac{k E_2}{\omega \mu_0}\right) \cos(\omega t - kz + \varphi_0)$$

$$= \frac{k}{\omega \mu_0} \left[E_1^2 \cos^2(\omega t - kz) + E_2^2 \cos^2(\omega t - kz + \varphi_0) \right]$$

4.3. Annahme x -Achse $\equiv E_x$ -Achse. y -Achse $\equiv E_y$ -Achse.

für $z = z_0$ die Parameterdarstellung der Bahnkurve:

$$\begin{cases} x = E_1 \cos(\omega t + k z_0) & \textcircled{1} \\ y = E_2 \cos(\omega t + k z_0 + \varphi_0) & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = E_1 \cos(\omega t + k z_0) & \textcircled{1} \\ y = E_2 \cos(\omega t + k z_0 + \varphi_0) & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1}: \cos(\omega t + k z_0) = \frac{x}{E_1}$$

$$\textcircled{2}: y = E_2 \left(\cos(\omega t + k z_0) \cos \varphi_0 - \sin(\omega t + k z_0) \sin \varphi_0 \right)$$

$$= E_2 \left(\frac{x}{E_1} \cos \varphi_0 - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{E_1}\right)^2} \sin \varphi_0 \right)$$

$$-\frac{y}{E_2} + \frac{x}{E_1} \cos \varphi_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{E_1}\right)^2} \sin \varphi_0$$

$$\frac{y^2}{E_2^2} + \frac{x^2}{E_1^2} \cos^2 \varphi_0 - \frac{2xy}{E_1 E_2} \cos \varphi_0 = \left[1 - \left(\frac{x}{E_1}\right)^2\right] \sin^2 \varphi_0$$

$$\frac{y^2}{E_2^2} + \frac{x^2}{E_1^2} (\cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0) - \frac{2xy}{E_1 E_2} \cos \varphi_0 = \sin^2 \varphi_0$$

$$\frac{x^2}{E_1^2} + \frac{y^2}{E_2^2} - \frac{2xy}{E_1 E_2} \cos \varphi_0 = \sin^2 \varphi_0$$

x, y durch E_x, E_y ersetzen:

$$\frac{E_x^2}{E_1^2} + \frac{E_y^2}{E_2^2} - \frac{2E_x E_y}{E_1 E_2} \cos \varphi_0 = \sin^2 \varphi_0.$$

oder:

die Parameterdarstellung der Bahnkurve:

$$\begin{cases} x = E_1 \cos(\omega t + \varphi_1) & \varphi_1 = k t_0 \\ y = E_2 \cos(\omega t + \varphi_2) & \varphi_2 = k t_0 + \varphi_0. \end{cases}$$

$$\omega t = \arccos \frac{x}{E_1} - \varphi_1 = \alpha - \varphi_1 \quad \alpha = \arccos \frac{x}{E_1} \quad \cos \alpha = \frac{x}{E_1}$$

$$\begin{aligned} \cos \omega t &= \cos \alpha \cos \varphi_1 + \sin \alpha \sin \varphi_1 \\ &= \frac{x}{E_1} \cos \varphi_1 + \sqrt{1 - \frac{x^2}{E_1^2}} \sin \varphi_1 \end{aligned}$$

$$\sin \omega t = \sin \alpha \cos \varphi_1 - \cos \alpha \sin \varphi_1 = \sqrt{1 - \frac{x^2}{E_1^2}} \cos \varphi_1 - \frac{x}{E_1} \sin \varphi_1$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{E_2} &= \cos \omega t \cos \varphi_2 - \sin \omega t \sin \varphi_2 \\ &= \frac{x}{E_1} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sqrt{1 - \frac{x^2}{E_1^2}} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{E_1^2}} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \frac{x}{E_1} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ &= \frac{x}{E_1} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sqrt{1 - \frac{x^2}{E_1^2}} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned}$$

$$\left[\frac{y}{E_2} - \frac{x}{E_1} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right]^2 = \left(1 - \frac{x^2}{E_1^2}\right) \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2).$$

$$\frac{y^2}{E_2^2} - \frac{2xy}{E_1 E_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{x^2}{E_1^2} \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{x^2}{E_1^2} \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)$$

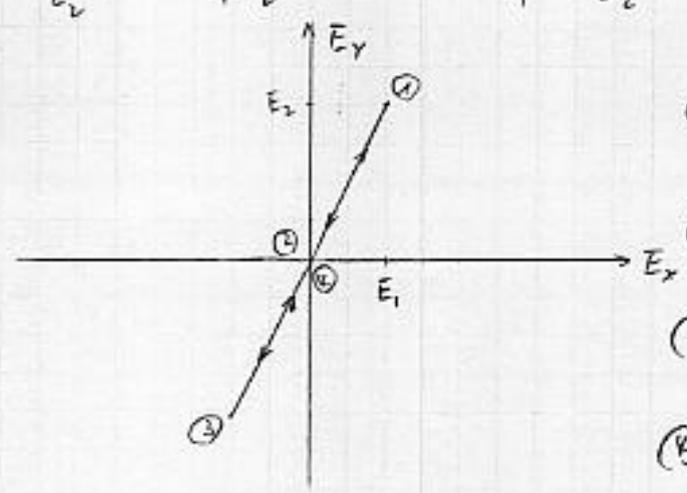
$$\frac{x^2}{E_1^2} + \frac{y^2}{E_2^2} - \frac{2xy}{E_1 E_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2).$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{E_1^2} + \frac{y^2}{E_2^2} - \frac{2xy}{E_1 E_2} \cos \varphi_0 = \sin^2 \varphi_0.$$

4.4.

$\varphi_0 = 0$ die Bahnkurvegleichung entartet sich in Liniegleichung

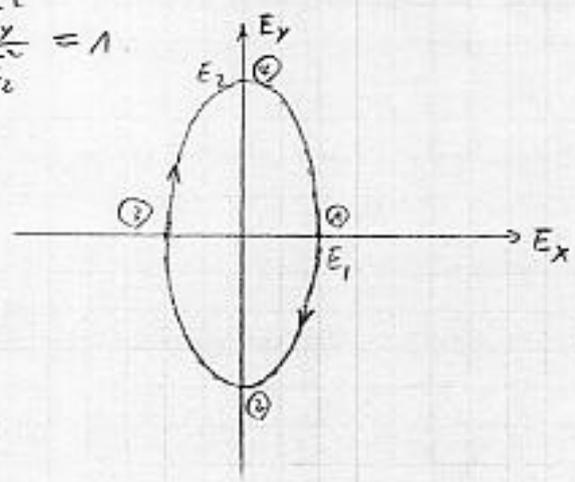
$$\frac{E_x^2}{E_1^2} + \frac{E_y^2}{E_2^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_1 E_2} = 0 \Rightarrow \frac{E_x}{E_1} = \frac{E_y}{E_2} \quad E_y = \frac{E_2}{E_1} E_x = 2 E_x$$



- ① $t=0$: $\begin{cases} E_x = E_1 \\ E_y = E_2 \end{cases}$
- ② $t = \frac{\pi}{2\omega}$: $\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = 0 \end{cases}$
- ③ $t = \frac{\pi}{\omega}$: $\begin{cases} E_x = -E_1 \\ E_y = -E_2 \end{cases}$
- ④ $t = \frac{3\pi}{2\omega}$: $\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = 0 \end{cases}$

$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \quad \cos \varphi_0 = 0 \quad \sin \varphi_0 = 1.$

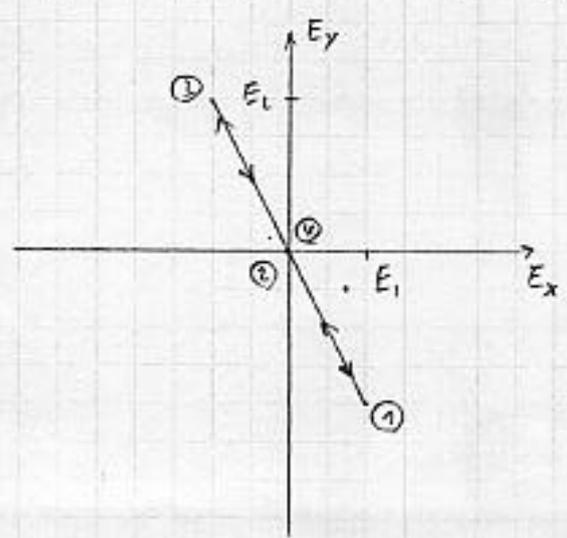
$$\frac{E_x^2}{E_1^2} + \frac{E_y^2}{E_2^2} = 1.$$



- ① $t=0$: $\begin{cases} E_x = E_1 \\ E_y = 0 \end{cases}$
- ② $t = \frac{\pi}{2\omega}$: $\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = -E_2 \end{cases}$
- ③ $t = \frac{\pi}{\omega}$: $\begin{cases} E_x = -E_1 \\ E_y = 0 \end{cases}$
- ④ $t = \frac{3\pi}{2\omega}$: $\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_2 \end{cases}$

$\varphi_0 = \pi \quad \cos \varphi_0 = -1 \quad \sin \varphi_0 = 0$

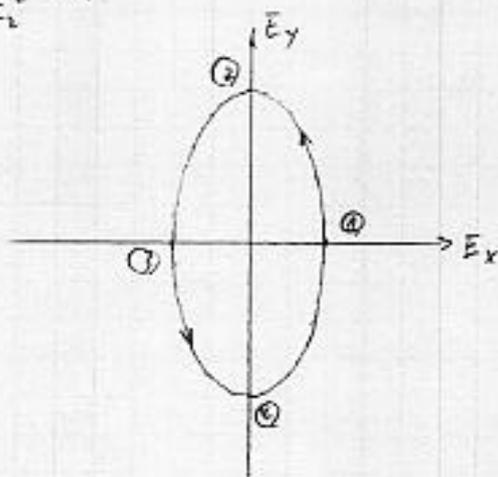
$$\frac{E_x^2}{E_1^2} + \frac{E_y^2}{E_2^2} + 2 \frac{E_x E_y}{E_1 E_2} = 0 \Rightarrow \frac{E_x}{E_1} = -\frac{E_y}{E_2} \quad E_y = -\frac{E_2}{E_1} E_x$$



- ① $t=0$: $\begin{cases} E_x = +E_1 \\ E_y = -E_2 \end{cases}$
- ② $t = \frac{\pi}{2\omega}$: $\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = 0 \end{cases}$
- ③ $t = \frac{\pi}{\omega}$: $\begin{cases} E_x = -E_1 \\ E_y = +E_2 \end{cases}$
- ④ $t = \frac{3\pi}{2\omega}$: $\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = 0 \end{cases}$

$$\varphi_0 = \frac{3}{2}\pi, \quad \cos \varphi_0 = 0, \quad \sin \varphi_0 = -1$$

$$\frac{E_x^2}{E_1^2} + \frac{E_y^2}{E_2^2} = 1$$



$$\textcircled{1} \quad t=0, \quad \begin{cases} E_x = E_1 \\ E_y = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad t = \frac{\pi}{2\omega} \quad \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_2 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \quad t = \frac{\pi}{\omega} \quad \begin{cases} E_x = -E_1 \\ E_y = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \quad t = \frac{3\pi}{2\omega} \quad \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = -E_2 \end{cases}$$

4.2.1. liniepolarierte Welle:

$$\vec{E} = E \cos(\omega t - kz) \cdot \vec{e}_x$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{2} E \cos(\omega t - kz) \cdot \vec{e}_x + \frac{1}{2} E \cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}) \cdot \vec{e}_y + \\ &\quad \frac{1}{2} E \cos(\omega t - kz) \cdot \vec{e}_x - \frac{1}{2} E \cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}) \cdot \vec{e}_y \\ &= \frac{1}{2} E \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + \frac{1}{2} E \cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}) \vec{e}_y + \\ &\quad \frac{1}{2} E \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + \frac{1}{2} E \cos(\omega t - kz + \frac{3\pi}{2}) \vec{e}_y \end{aligned}$$

= recht drehende zirkularpol. Welle +

links drehende zirkularpol. Welle.

4.2.2.

im Vakuum: Wellenwiderstand $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$

Geschwindigkeit: $v_0 = c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

$$n = \frac{c_0}{c} = \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{\sqrt{\epsilon_r \mu_0}} = \sqrt{\epsilon_r}$$

im Medium, x-Richtung: $Z_x = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_r \epsilon_x}} = \frac{Z_0}{n_x}$

$$v_x = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_0 \epsilon_x}} = \frac{c_0}{n_x}$$

y-Richtung: $Z_y = \frac{Z_0}{n_y}$

$$v_y = \frac{c_0}{n_y}$$

Fresnel'sche Formel, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

① für transmittierte Welle bei Einstrahlen

$$E_{tx} = E_1 \frac{2Z_x}{Z_x + Z_0} = E_1 \frac{2}{1 + n_x}$$

$$E_{ty} = E_2 \frac{2}{1 + n_y}$$

Wellenzahl $k_x = \omega \cdot \frac{1}{v} = \omega \cdot \frac{n}{c_0} = n \cdot k = \sqrt{\epsilon_r} \cdot k$ $k = \frac{\omega}{c_0} = \omega \cdot \sqrt{\epsilon_r \mu_0}$

$$E_t = E_1 \frac{2}{1 + \sqrt{\epsilon_x}} \cos(\omega t - \sqrt{\epsilon_x} k z) \vec{e}_x + E_2 \frac{2}{1 + \sqrt{\epsilon_y}} \cos(\omega t - \sqrt{\epsilon_y} k z + \varphi_0) \vec{e}_y$$

④

② für transmittierte Welle bei Wiederaustritt

$$E_{tx} = E_1 \cdot \frac{2}{1 + \sqrt{\epsilon_x}} \cdot \frac{2}{1 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_x}}} = \frac{4\sqrt{\epsilon_x}}{(1 + \sqrt{\epsilon_x})^2} E_1$$

$$E_{ty} = E_2 \cdot \frac{4\sqrt{\epsilon_y}}{(1 + \sqrt{\epsilon_y})^2}$$

unter Berücksichtigung des einmaligen Fresnel'schen Verlustes. Die Änderung des Betrags wird nicht betrachtet.

$$E_t = E_1 \cdot \frac{4\sqrt{\epsilon_x}}{(1 + \sqrt{\epsilon_x})^2} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + E_2 \cdot \frac{4\sqrt{\epsilon_y}}{(1 + \sqrt{\epsilon_y})^2} \cos(\omega t - kz + \varphi_0 + \varphi') \vec{e}_y$$

φ' : durch die anisotropische Eigenschaft verursachte ^{relative} Phasenverschiebung.

$$\varphi' = \varphi_y - \varphi_x$$

$$\begin{aligned}\varphi' &= \omega t - \sqrt{\epsilon_y} k z - (\omega t - \sqrt{\epsilon_x} k z) \\ &= (\sqrt{\epsilon_x} k - \sqrt{\epsilon_y} k) \cdot d\end{aligned}$$

$$d = \frac{\varphi'}{(\sqrt{\epsilon_x} - \sqrt{\epsilon_y}) k}$$

$$k = \frac{\omega}{c_0} = \omega \cdot \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$\Rightarrow d = \frac{\varphi'}{(\sqrt{\epsilon_x} - \sqrt{\epsilon_y}) \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$\frac{\lambda}{4} \text{-Platte} \Rightarrow \varphi' = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$d = \frac{\pi}{2 \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} (\sqrt{\epsilon_x} - \sqrt{\epsilon_y})} \quad (2)$$

$\varphi_0 = 0 \Rightarrow$ Die relative Phase nach dem Durchgang φ'

$$\varphi'_0 = \varphi_0 + \varphi' = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{Elliptische Polarisation.} \quad (1)$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi'_0 = \varphi_0 + \varphi' = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow \text{lineare Polarisation.} \quad (1)$$

1100

119

UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN
Fachbereich Elektrotechnik
Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik
und Optische Kommunikationstechnik
Prof. Dr.-Ing. R. Zengerle

13.10.2000

Diplomhauptprüfung (SS 2000)

Theoretische Elektrotechnik III

1. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
2. Außer Schreib- und Zeichenmaterial sind keine Hilfsmittel zugelassen (auch kein Taschenrechner)!
3. Die jeweils maximal erreichbare Punktzahl pro Teilaufgabe ist in Klammern am Ende jeder Teilaufgabe angegeben.
4. Es sind alle Aufgaben zu bearbeiten! Die Zusatzaufgaben sind optional.
5. Verwenden Sie ausschließlich die Ihnen ausgeteilten Doppelbögen; nur diese werden bewertet. Trennen Sie die Doppelbögen nicht. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Doppelbogen!
6. Schreiben Sie auf jeden Doppelbogen Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Aufgabe (inklusive der Teilaufgabe), die Sie bearbeiten!
7. Zeigen Sie den gewählten Lösungsweg auf. Geben Sie insbesondere Zwischenergebnisse und Begründungen an. Nur eindeutige Aussagen können bewertet werden!
8. Einige häufig gebrauchte Formeln finden Sie im Anhang.
9. **VIEL ERFOLG!!!**

1. Aufgabe: Elektrischer Dipol (13 Punkte + 4 Zusatzpunkte)

Gegeben sei ein elektrischer Dipol mit den entgegengesetzt gleichgroßen Ladungen $-Q$ und $+Q$ im Abstand d im Vakuum. Man bezeichnet $\vec{p} = Q \cdot \vec{d}$ als **elektrisches Dipolmoment** (siehe Abb. 1.1).

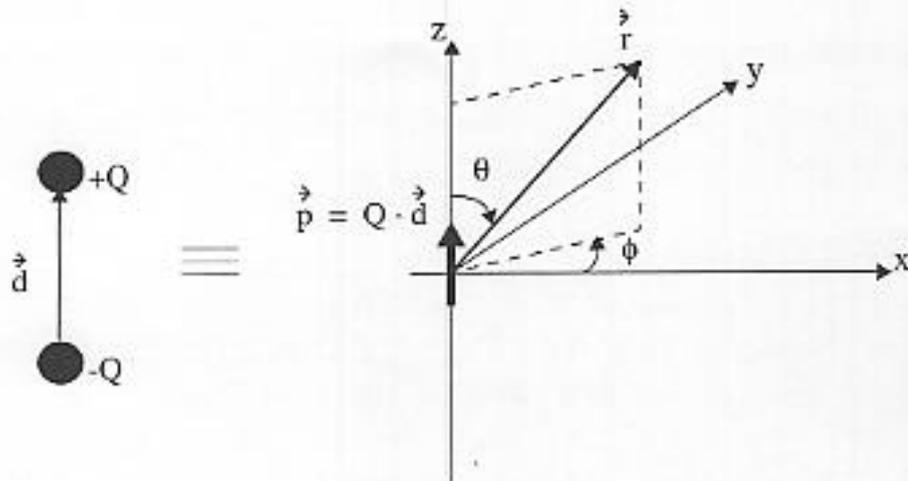


Abb. 1.1 Elektrischer Dipol

- 1.1 Berechnen Sie allgemein das elektrische **Potential** $\varphi(\vec{r})$ des Dipols. (2 Punkte)
- 1.2 Wenn $Q \rightarrow \infty$, $d \rightarrow 0$ und \vec{p} endlich bleibt, so entsteht ein **idealer Dipol**. Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses von Teilaufgabe 1.1 das elektrische **Potential des idealen elektrischen Dipols** in Abhängigkeit von \vec{p} . (Hinweis: Vernachlässigen Sie hierzu Terme höherer Ordnung und nutzen Sie Reihenentwicklungen) (5 Punkte)
- 1.3 Berechnen Sie die elektrische **Feldstärke** $\vec{E}(\vec{r})$ des idealen Dipols. (3 Punkte)
- 1.4 Skizzieren Sie **qualitativ** die **Feldlinien** und die **Äquipotentiallinien** des idealen Dipols in x - z -Ebene. Wie verlaufen die Feldlinien bei $\theta \rightarrow 0$ und $\theta \rightarrow 90^\circ$? (Begründung!) (3 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 1.Z.1 Die elektrische Feldstärke des idealen Dipols, der sich vor einem Halbraum mit sehr großer Leitfähigkeit ($\kappa \rightarrow \infty$) befindet, kann mit Hilfe der Spiegelungsmethode behandelt werden. Zeichnen Sie jeweils den **Bilddipol** für einen zur Grenzfläche parallel (Bild 1.2) und senkrecht (Bild 1.3) orientierten idealen elektrischen Dipol **mit Begründung!** (4 Punkte)

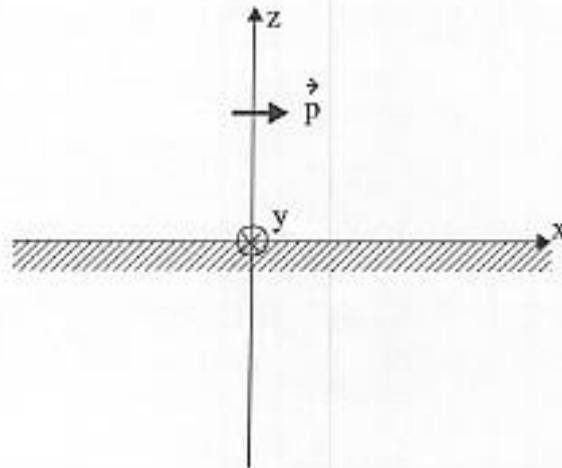


Abb. 1.2 Parallel orientierter Dipol

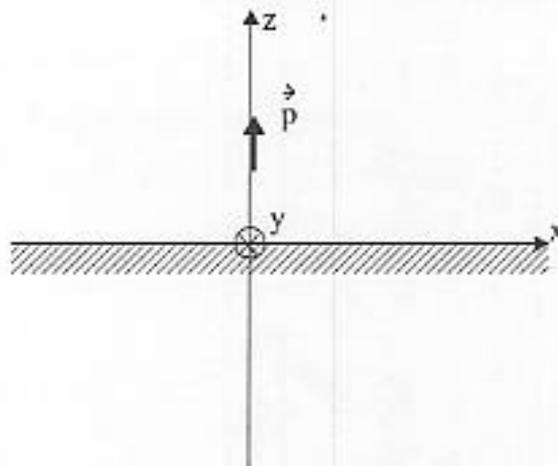


Abb. 1.3 Senkrecht orientierter Dipol

2. Aufgabe: Kapazität von Zylinderkondensatoren (12 Punkte + 4 Zusatzpunkte)

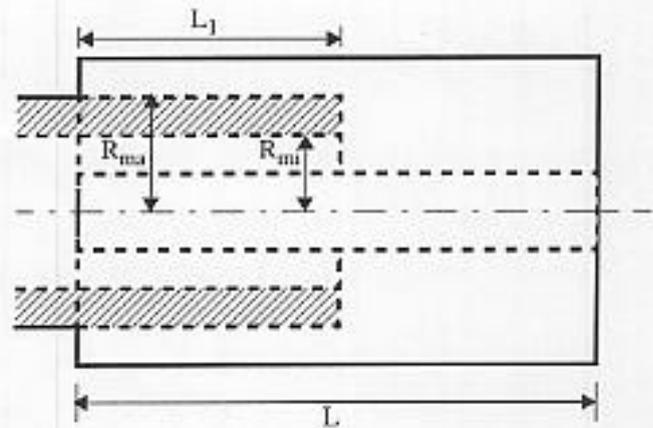
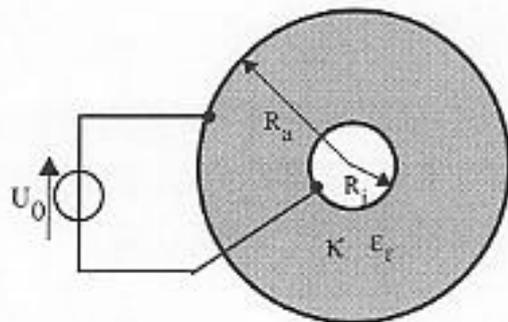


Abb. 2.1 Schnittbild des Zylinderkondensators Abb. 2.2 Ausrichtung des Zylinderkondensators

Abb. 2.1 zeigt einen Schnitt durch den Zylinderkondensator mit Länge L . Zwischen der inneren ($r = R_1$) und äußeren ($r = R_2$) Elektrode wird eine ideale Spannungsquelle der Spannung U_0 angelegt. Da $L \gg R_2$ gelten soll, sind Randeffekte vernachlässigbar.

- 2.1 Zwischen beiden unendlich gut leitenden Elektroden befindet sich ein Dielektrikum mit der relativen Dielektrizitätszahl $\epsilon_r = \text{konst.}$. Berechnen sie die **Kapazität** des **idealen** Zylinderkondensators ! (3 Punkte)
- 2.2 Das Dielektrikum sei jetzt **inhomogen** und es gelte: $\epsilon_r = k \cdot \frac{1}{r^2}$; $k = \text{konst.}$ für $r \in [R_1, R_2]$. Berechnen Sie die neue **Kapazität** des Zylinderkondensators ! (2 Punkte)
- 2.3 Nun gelte wieder $\epsilon_r = \text{konst.}$, aber das Dielektrikum sei **verlustbehaftet**, d. h. es besitzt die **Leitfähigkeit** $\kappa > 0$. Berechnen Sie die **Kapazität** des Zylinderkondensators ! (5 Punkte)
- 2.4 **Begründen** Sie den Unterschied in der Vorgehensweise zur Berechnung der Kapazität nach Teilaufgabe 2.1 und 2.3! (2 Punkte)

Zusatzaufgabe:

- 2.Z.1 Der Kondensator sei jetzt nur mit Luft gefüllt. Er ist durch Verschieben eines koaxialen leitfähigen Hohlmetallzylinders ($\kappa \rightarrow \infty$) der Dicke $d = R_{ma} - R_{mi}$ und Länge L **einstellbar**. Berechnen Sie unter Vernachlässigung von Randeffekten die **Kapazität** entsprechend Bild 2.2 ! (4 Punkte)

3. Aufgabe: Magnetostatik (14 Punkte + 3 Zusatzpunkte)

Als Anwendung des Biot-Savartschen Gesetzes sei das Magnetfeld in der Ebene einer ebenen Leiterschleife berechnet. Bild 3.1 zeigt eine in der x - z -Ebene liegende rechteckige Leiterschleife, in der ein Strom I fließt. Es soll das Magnetfeld in der Schleifenebene berechnet werden. Es gilt hier $\mu = \mu_0$.

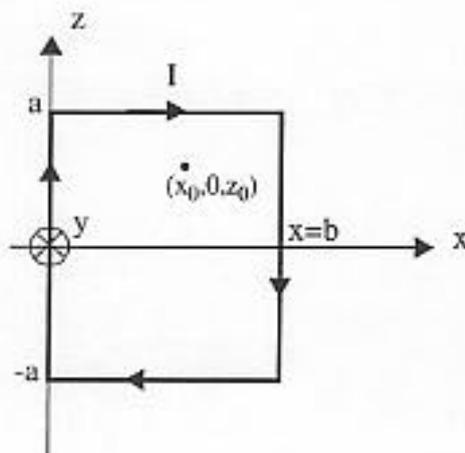


Abb. 3.1 Rechteckige Leiterschleife

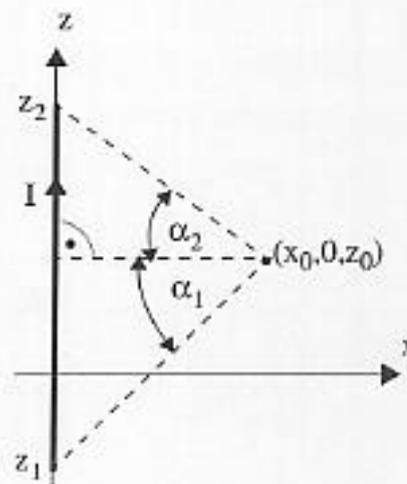


Abb. 3.2 Stromdurchflossener Leiterabschnitt

- 3.1 Welche **Richtung** hat das Magnetfeld \vec{B} am Punkt $(x_0, 0, z_0)$ im Bild 3.1 mit $0 < x_0 < b$ und $-a < z_0 < a$? (1 Punkte)
- 3.2 Um den Betrag von \vec{B} zu berechnen, müssen die einzelnen Teilstücke betrachtet werden. **Leiten** Sie aus dem Biot-Savartschen Gesetz her, daß ein allgemeiner von z_1 bis z_2 stromdurchflossener Leiterabschnitt (Bild 3.2) folgenden Beitrag liefert:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi x_0} (\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1) \quad (5 \text{ Punkte})$$

- 3.3 Wie groß ist den **Betrag** von \vec{B} der rechteckigen Leiterschleife im Bild 3.1? (4 Punkte)
- 3.4 Wie groß ist den **Betrag** von \vec{B} , wenn $b \rightarrow \infty$ und a endlich ist? (1 Punkte)
- 3.5 Wie groß ist den **Betrag** von \vec{B} , wenn $a \rightarrow \infty$ und b endlich ist? Wie könnte man das Ergebnis durch ein anderes **einfaches Verfahren** angeben? (3 Punkte)

Zusatzaufgabe:

- 3.Z.1 Berechnen Sie die **Selbstinduktivität** der rechteckigen Leiterschleife! Sie brauchen nur das zu lösende Integral mit allen bekannten Größen aufzustellen. (3 Punkte)

4. Aufgabe: Ebene Wellen (14 Punkte + 5 Zusatzpunkte)

Eine linear polarisierte harmonischen ebene Welle mit

$$\vec{E} = \vec{e}_x E_{0x} e^{j(\omega t - kz)} + \vec{e}_y E_{0y} e^{j(\omega t - kz)}$$

trifft vom **Vakuum** senkrecht auf eine ebene Platte der Dicke d , die in x - und y - Richtung unendlich ausgedehnt ist (Bild 4.1). Diese Platte besteht aus einem **anisotropen Dielektrikum** mit unterschiedlichen Brechzahlen in x - und y -Richtung ($n_x \neq n_y$). Hier soll das elektrische Feld der Welle nach Wechselwirkung mit dem Medium betrachtet werden. Im gesamten Raum gilt: $\mu = \mu_0$.

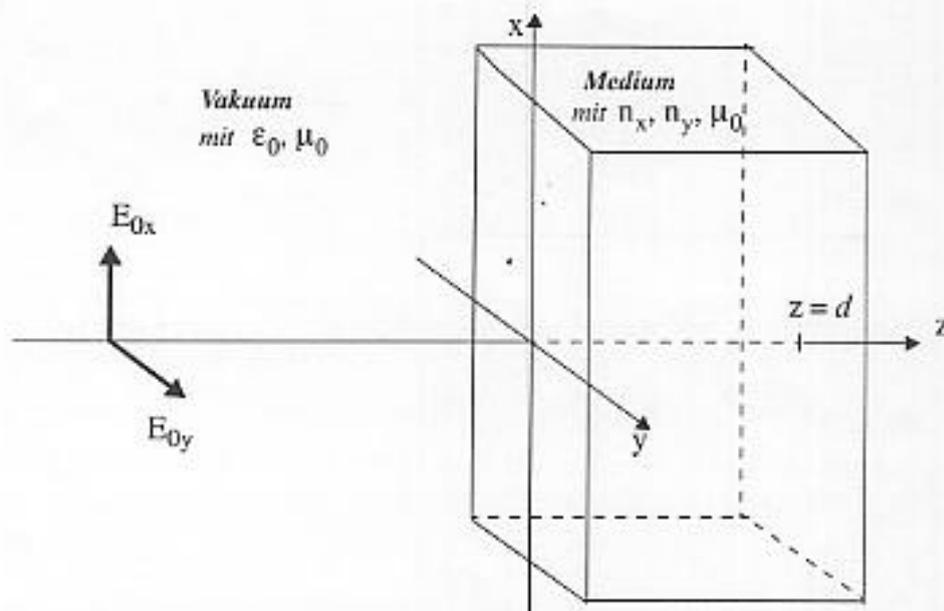


Abb. 4.1 Geometrie der ebenen Wellen und des Dielektrikums

- 4.1 Berechnen Sie die **reflektierte** Welle \vec{E}_r und die ins Medium **eindringende** Welle \vec{E}_t als Funktion von ω , n_x , n_y , μ_0 , ϵ_0 , E_{0x} und E_{0y} ! (6 Punkte)
- 4.2 Welche **Randbedingung** muß die elektrische Feldstärke an der Grenzfläche $z = 0$ erfüllen? Überprüfen Sie, ob Ihr Ergebnis in der Teilaufgabe 4.1 die Randbedingung erfüllt! (3 Punkte)
- 4.3 Infolge der Anisotropie erleiden die beiden Komponenten des transmittierten elektrischen Feldes eine **Phasenverschiebung** gegeneinander. Berechnen Sie die **Phasenunterschied** abhängig von der Laufstrecke in der Platte! (2 Punkte)
- 4.4 Was versteht man unter einer **zirkular polarisierten Welle**? Welche Bedingungen müssen die Dicke d , die Amplituden E_{0x} und E_{0y} erfüllen, wenn die wiederaustretende Welle eine zirkular polarisierte Welle sein soll? (3 Punkte)

Zusatzaufgabe:

4.Z.1 Leiten Sie ausgehend von den **allgemeinen** Maxwell'schen Gleichungen die **zeitfreie Wellengleichung** (Helmholtzgleichung) für die elektrische Feldstärke \vec{E} der im Vakuum ausbreitenden **harmonischen Welle** her! (5 Punkte)

Fresnelsche Formeln

mit den Wellenausbreitungsrichtungen $\vec{e}_e, \vec{e}_r, \vec{e}_t$!

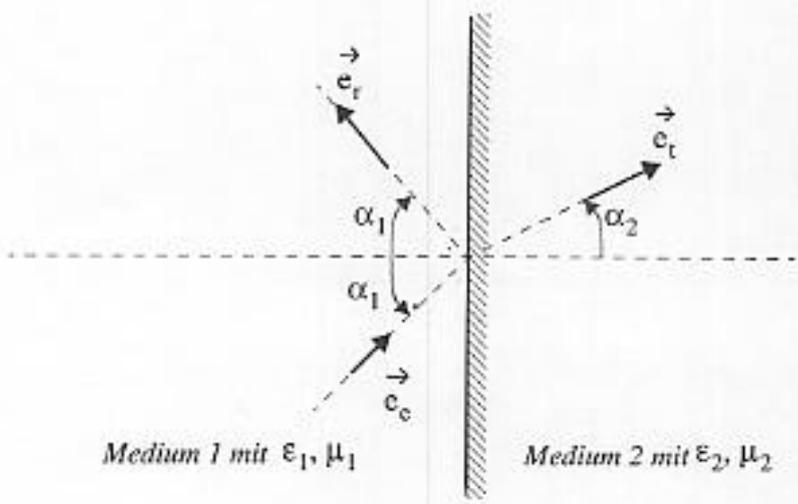


Tabelle 1: Fresnelsche Formeln

S-Polarisation	P-Polarisation
$\frac{E_r}{E_e} = \frac{Z_2 \cos \alpha_1 - Z_1 \cos \alpha_2}{Z_2 \cos \alpha_1 + Z_1 \cos \alpha_2}$	$\frac{E_r}{E_e} = \frac{Z_2 \cos \alpha_2 - Z_1 \cos \alpha_1}{Z_2 \cos \alpha_2 + Z_1 \cos \alpha_1}$
$\frac{E_t}{E_e} = \frac{2Z_2 \cos \alpha_1}{Z_2 \cos \alpha_1 + Z_1 \cos \alpha_2}$	$\frac{E_t}{E_e} = \frac{2Z_2 \cos \alpha_1}{Z_1 \cos \alpha_1 + Z_2 \cos \alpha_2}$

5. Vektoroperationen:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \quad \text{mit } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$$

6. Laplace-Operator und Gradient in Kugelkoordinaten

$$\Delta\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \right]$$

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \cdot \vec{e}_\phi$$

7. Näherungsformeln:

Für kleine Winkel α gilt: $\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$ und $\cos\alpha \approx 1$

Reihen: $\sin\phi \approx \phi - \frac{\phi^3}{3!}, \quad \cos\phi \approx 1 - \frac{\phi^2}{2!}$

8. Integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C,$$

$$\int \frac{x dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + C,$$

$$\int \frac{dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \cdot \sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

9. Feldtheoretische Zusammenhänge:

Biot-Savartsches Gesetz:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Formelsammlung

1. Zylinderkoordinaten:

$$\vec{e}_\rho(\phi) = \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\phi \cdot \vec{e}_y$$

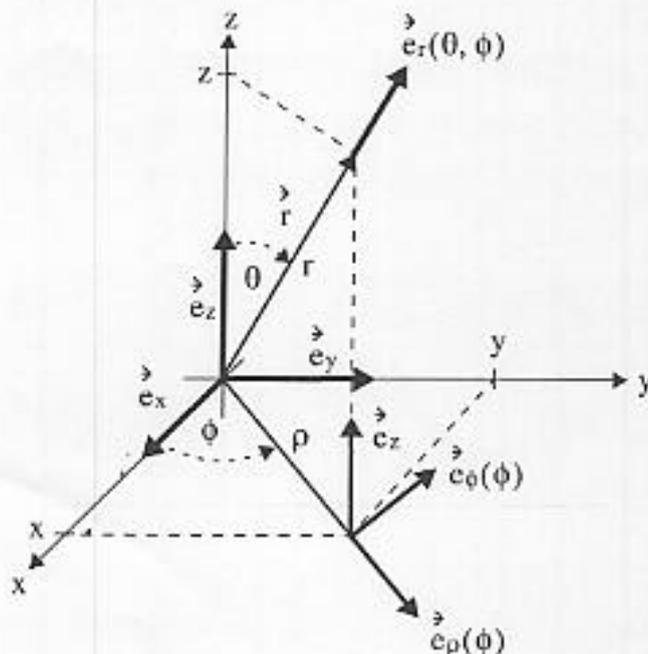
$$\vec{e}_\phi(\phi) = -\sin\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\phi \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{r}(\rho, \phi, z) = \rho \cdot \vec{e}_\rho(\phi) + z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [x\vec{e}_x + y\vec{e}_y]$$

$$\vec{e}_\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y]$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$



2. Kugelkoordinaten:

$$\vec{e}_r(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{e}_r(\theta, \phi) = \sin\theta \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\theta \sin\phi \cdot \vec{e}_y + \cos\theta \cdot \vec{e}_z$$

3. Oberflächen- und Volumenelemente:

$$d\vec{A}(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \cdot \vec{e}_r$$

$$dV(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$

$$d\vec{A}(\rho, \phi, z) = \rho d\phi dz \cdot \vec{e}_\rho$$

$$dV(\rho, \phi, z) = \rho d\rho d\phi dz$$

4. Divergenz und Rotation in Zylinderkoordinaten

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \{\rho A_\rho\} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \{A_\phi\} + \frac{\partial}{\partial z} \{A_z\}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{e}_\rho \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right] + \vec{e}_\phi \cdot \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] + \vec{e}_z \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right]$$

A1

1.1. Superpositionsprinzip:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +d/2 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d/2 \end{pmatrix}$$



$$\varphi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \frac{d}{2})^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + \frac{d}{2})^2}} \right]$$

2. Fernfeldnäherung $|\vec{r}| \gg d$

Kugelkoordinaten $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$

Betrachte die Wurzelausdrücke:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \frac{d}{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - zd + \frac{d^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - zd + \frac{d^2}{4}}}$$

$$= \frac{1}{r \sqrt{1 - \frac{zd}{r^2} + \left(\frac{d}{2r}\right)^2}}$$

Vernachlässigung des quadr. Terms

$$\text{da } d \ll r \Rightarrow \frac{d}{2r} \approx 0$$

$$\approx \frac{1}{r \sqrt{1 - \frac{zd}{r^2}}}$$

in Kugelkoordinaten $\frac{z}{r} = \cos\theta$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \frac{d}{2})^2}} \approx \frac{1}{r \sqrt{1 - \frac{d}{r} \cos\theta}}$$

Näherung: $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \frac{d}{2})^2}} \approx \frac{1}{r \left(1 - \frac{d}{2r} \cos\theta\right)}$$

$$\text{analog: } \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + \left(z + \frac{d}{2}\right)^2}} \approx \frac{1}{r \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta\right)}$$

$$\varphi(r) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r \left(1 - \frac{d}{2r} \cos \theta\right)} - \frac{1}{r \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta\right)} \right]$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{1 + \frac{d}{2r} \cos \theta - 1 + \frac{d}{2r} \cos \theta}{1 - \frac{d^2}{4r^2} \cos^2 \theta}$$

$$\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{\frac{d}{r} \cos \theta}{1}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{r^2} \cos \theta$$

$$\text{da: } d \cos \theta = \vec{d} \cdot \vec{e}_z \cdot \vec{e}_r = \vec{d} \cdot \vec{e}_r$$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{d} \cdot \vec{e}_r}{|\vec{r}|^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{|\vec{r}|^2}$$

AA

$$1.3. \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi$$

in kartesischen Koordinatensystem:

$$\varphi(r) = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\varphi(r) = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{3pxz}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{3pyz}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left(3 \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} - 1 \right)$$

Wegen der Rotationssymmetrie, nur x-z-Ebene betrachten ($y=0$)

$$E_x = \frac{3pxz}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{3p \cos\theta \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_y = 0$$

$$E_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2\theta - 1)$$

geht zur Kugelkoordinaten über, $E_\varphi = 0$.

$$E_r = E_x \sin\theta + E_z \cos\theta = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\varphi = E_r \cos\theta - E_z \sin\theta = \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

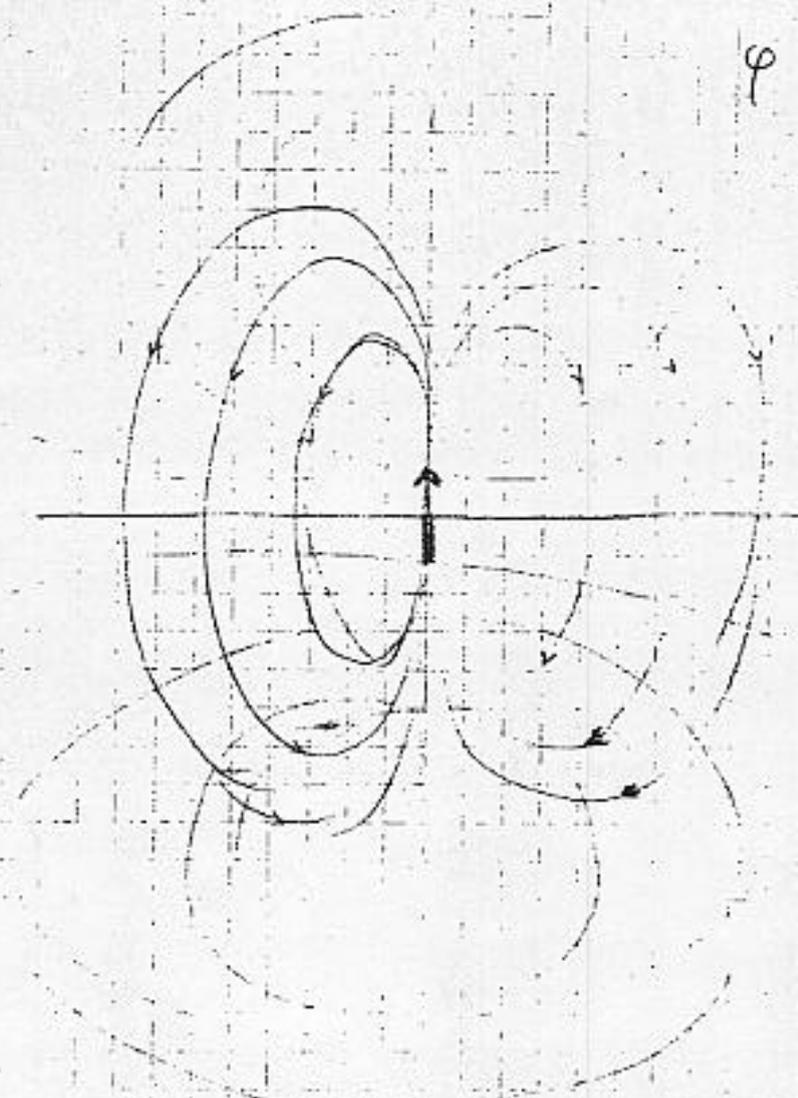
1.3 Alternativ:

in Kugelkoordinaten $\varphi(\vec{r}) = \frac{p \cdot \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = \begin{pmatrix} -\frac{\partial\varphi}{\partial r} \vec{e}_r \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \vec{e}_\theta \\ 0 \vec{e}_\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix}$$

~~1.4.~~



φ

$Q = 0^\circ \quad (x=0, y=0)$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{zP}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\varphi \end{matrix}$$

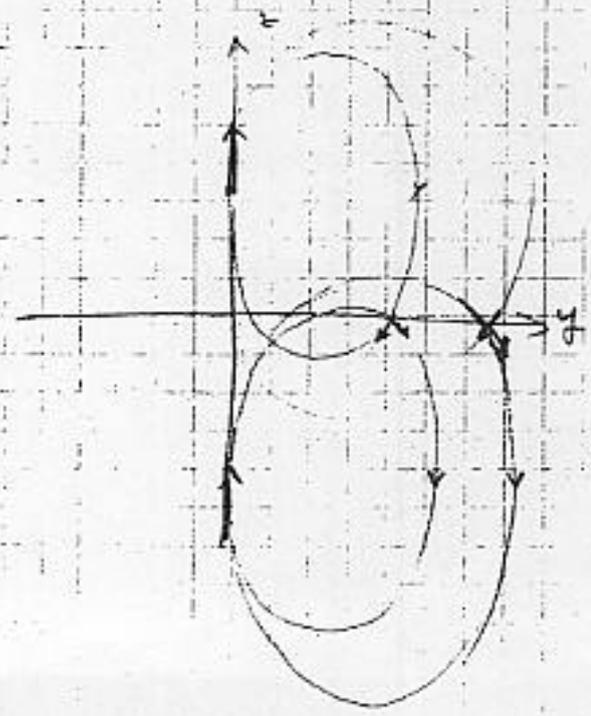
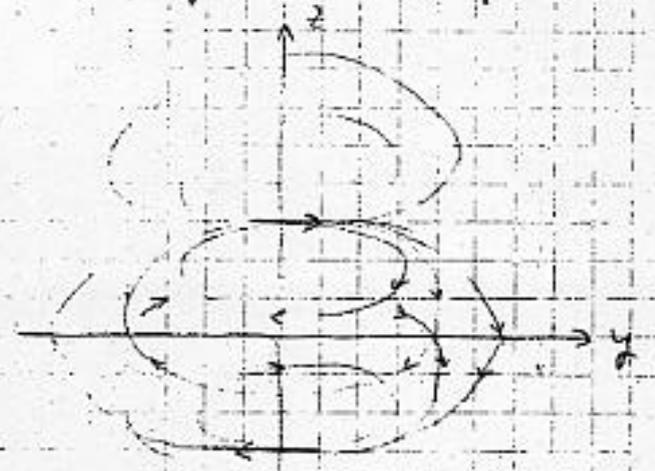
od. \vec{E} hat nur z-Komponent

$Q = 90^\circ \quad (y=0, z=0)$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\varphi \end{matrix}$$

od. \vec{E} hat nur z-Komponent

1.2.1. Es muss gelten, dass bei $z=0$ die Feldlinien senkrecht zur x-y-Ebene laufen.



Begründung durch \vec{E} -Feld oder

Bilder der Spindelader

A2.

2.1.

Annahme: Ladung Q wird von Spannung U aufgeladen.

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\int \vec{E} d\vec{s}}$$

elektr. Feld d. Zylinderkondensator.

$$\iint \vec{D} d\vec{A} = Q$$

$$D \cdot 2\pi g L = Q \quad g \in [R_i; R_a]$$

$$D = \frac{Q}{2\pi g L}$$

Symmetrie: D hat nur radiale Komponente $\Rightarrow \vec{D} = \frac{Q}{2\pi g L} \vec{e}_g$

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi g L \cdot \epsilon_0 \epsilon_r} \vec{e}_g$$

$$C = \frac{Q}{\int_{R_i}^{R_a} \frac{Q}{2\pi g L \epsilon_0 \epsilon_r} \vec{e}_g \cdot \vec{e}_g d\vec{g}}$$

$$= 2\pi L \epsilon_0 \epsilon_r \frac{1}{\ln \frac{R_a}{R_i}} = 2\pi L \epsilon_0 \epsilon_r \frac{1}{\ln \frac{R_a}{R_i}}$$

2.2 $\epsilon_r = k \rho^2$

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi g L \epsilon_0 k \rho^2} \vec{e}_g = \frac{Q \rho}{2\pi L \epsilon_0 k} \vec{e}_g$$

$$C = \frac{Q}{\int_{R_i}^{R_a} \frac{Q \rho}{2\pi L \epsilon_0 k} d\vec{g}} = 2\pi L \epsilon_0 k \frac{1}{\frac{1}{2} (R_a^2 - R_i^2)}$$

$$= 4\pi L \epsilon_0 k \frac{1}{R_a^2 - R_i^2}$$

2.3. $\kappa > 0$

$$C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{\oint \vec{D} \cdot d\vec{A}}{U_0}$$

\vec{D} über \vec{g} berechnen

$$\vec{g} = \kappa \cdot \vec{E} = \frac{1}{A} \cdot \vec{Q}_S = \frac{U_0/R}{A} \cdot \vec{e}_S$$

$$R = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{l}{A} \quad dR = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{ds}{2\pi s \cdot L}$$

$$R = \int_{R_i}^{R_a} \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{1}{2\pi L} \cdot \frac{ds}{s} = \frac{1}{2\pi \kappa L} \ln s \Big|_{R_i}^{R_a} = \frac{1}{2\pi \kappa L} \ln \frac{R_a}{R_i}$$

$$\vec{g} = \frac{U_0}{2\pi s \cdot L} \cdot \frac{1}{R} \cdot \vec{e}_S = \frac{U_0}{2\pi s \cdot L} \cdot 2\pi \kappa L \cdot \frac{1}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \cdot \vec{e}_S$$

$$= U_0 \cdot \kappa \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \cdot \vec{e}_S = \kappa \cdot \vec{E}$$

$$\vec{E} = U_0 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \cdot \vec{e}_S$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E}$$

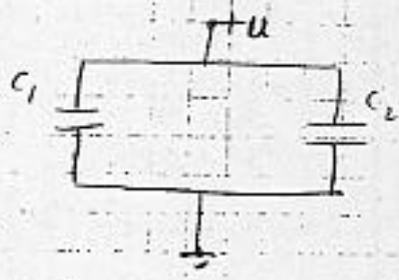
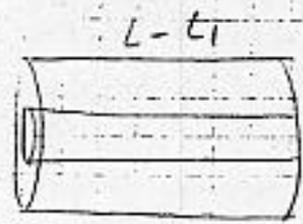
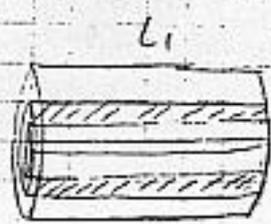
$$C = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}}{U_0} = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot L \cdot 2\pi s \cdot U_0}{U_0} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\ln \frac{R_a}{R_i}} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot 2\pi L \cdot \frac{1}{\ln \frac{R_a}{R_i}}$$

2.4. in 2.1 ist das Dielektrikum ideal, d. h. nicht leitfähig und somit bleiben die Ladungen auf den Elektroden für alle Zeiten erhalten
 $\Rightarrow Q = \text{konst} \rightarrow E \rightarrow U$

in 2.3 ist das Dielektrikum leitfähig und somit fließen die Ladungen von der inneren Elektrode zur äußeren. Sie würden sich ausgleichen. Wenn nicht eine ideale Spannungsquelle andauernd neue Ladungen auf die Elektroden bringen würde \Rightarrow Die Ladungsmenge Q ist nicht bekannt und muß bestimmt werden.

$$U_0 \rightarrow \vec{g} \rightarrow \vec{E} \rightarrow Q$$

2.2.1. Vernachlässigen der Randeffekte, die Kondensator kann in zwei Kondensatoren separiert werden.



$$C_2 = 2\pi(L-L_1)\epsilon_0 \frac{1}{\ln \frac{R_a}{R_i}}$$

C_1 berechnen

Annahme: Ladung Q wird von Spannung U aufgeladen in Metallzylinder. Innenseite wird Ladung $-Q$ induziert, außen wird Ladung $+Q$ induziert.



Die Rechnung ist analog wie 2.1.

$$\vec{E}_i = \frac{Q}{2\pi R L_1 \epsilon_0} \vec{e}_s \quad \vec{E}_a = \frac{Q}{2\pi R L_1 \epsilon_0} \vec{e}_s \quad E_m = 0$$

$$C_1 = \frac{Q}{\int_{R_i}^{R_{mi}} \frac{Q}{2\pi R L_1 \epsilon_0} ds + \int_{R_{mi}}^{R_a} 0 ds + \int_{R_a}^{R_o} \frac{Q}{2\pi R L_1 \epsilon_0} ds}$$

$$= 2\pi L_1 \epsilon_0 \left(\frac{1}{\ln \frac{R_{mi}}{R_i}} + \ln \frac{R_a}{R_{mi}} \right)$$

$$= 2\pi L_1 \epsilon_0 \frac{1}{\ln \frac{R_{mi}}{R_i} + \ln \frac{R_a}{R_{mi}}}$$

$$C = C_1 + C_2$$

$$= 2\pi \epsilon_0 \left(\frac{L_1}{\ln \frac{R_{mi}}{R_i} + \ln \frac{R_a}{R_{mi}}} + \frac{L-L_1}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \right)$$

1. Magnetfeld \vec{B} hat y-Richtung.

2.2. Biot-Savart: $\vec{B} = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

$$d\vec{B} = - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{r} - \vec{r}' = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ z_0 - z \end{pmatrix} \quad d\vec{s}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dz \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x_0^2 + (z_0 - z)^2}$$

$$(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{s}' = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_0 & 0 & z_0 - z \\ 0 & 0 & dz \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_0 dz \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d\vec{B} = + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{x_0 dz}{(x_0^2 + (z_0 - z)^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{x_0 dz}{[x_0^2 + (z_0 - z)^2]^{3/2}}$$

Sub. $z_0 - z = u \quad dz = -du$

$z = z_2 \rightarrow u = z_0 - z_2$

$z = z_1 \rightarrow u = z_0 - z_1$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I x_0}{4\pi} \int_{z_0 - z_1}^{z_0 - z_2} \frac{-du}{(x_0^2 + u^2)^{3/2}}$$

$$= - \frac{\mu_0 I x_0}{4\pi} \left. \frac{u}{x_0^2 \sqrt{x_0^2 + u^2}} \right|_{u=z_0-z_1}^{u=z_0-z_2}$$

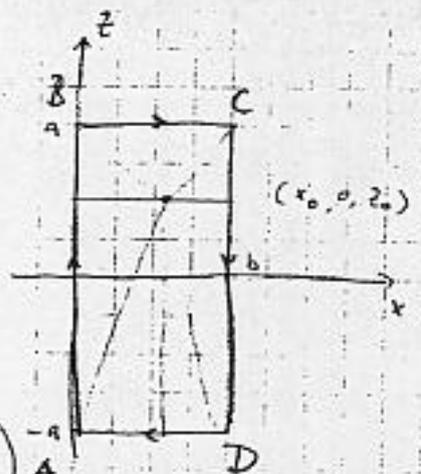
$$= - \frac{\mu_0 I}{4\pi x_0} \left(\frac{z_0 - z_2}{\sqrt{x_0^2 + (z_0 - z_2)^2}} - \frac{z_0 - z_1}{\sqrt{x_0^2 + (z_0 - z_1)^2}} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi x_0} \left(\frac{z_2 - z_0}{\sqrt{x_0^2 + (z_2 - z_0)^2}} + \frac{z_0 - z_1}{\sqrt{x_0^2 + (z_0 - z_1)^2}} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi x_0} (\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1)$$

3.3 Überlagerung der vier Teilstücke

$$\begin{aligned} \vec{B}_{AB} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi x_0} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) \vec{e}_y \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi x_0} \left(\frac{a-z_0}{\sqrt{x_0^2 + (a-z_0)^2}} + \frac{z_0+a}{\sqrt{x_0^2 + (z_0+a)^2}} \right) \vec{e}_y \end{aligned}$$



$$\vec{B}_{BC} = \frac{\mu_0 I}{4\pi (a-z_0)} \left(\frac{x_0}{\sqrt{(a-z_0)^2 + x_0^2}} + \frac{b-x_0}{\sqrt{(a-z_0)^2 + (b-x_0)^2}} \right) \vec{e}_y$$

$$\vec{B}_{CD} = \frac{\mu_0 I}{4\pi (b-x_0)} \left(\frac{a-z_0}{\sqrt{(b-x_0)^2 + (a-z_0)^2}} + \frac{z_0+a}{\sqrt{(b-x_0)^2 + (z_0+a)^2}} \right) \vec{e}_y$$

$$\vec{B}_{DA} = \frac{\mu_0 I}{4\pi (z_0+a)} \left(\frac{x_0}{\sqrt{(z_0+a)^2 + x_0^2}} + \frac{b-x_0}{\sqrt{(z_0+a)^2 + (b-x_0)^2}} \right) \vec{e}_y$$

$$\vec{B} = \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{BC} + \vec{B}_{CD} + \vec{B}_{DA}$$

3.4 $b \rightarrow \infty$

$$\vec{B}_{AB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi x_0} \left(\frac{a-z_0}{\sqrt{x_0^2 + (a-z_0)^2}} + \frac{z_0+a}{\sqrt{x_0^2 + (z_0+a)^2}} \right) \vec{e}_y$$

$$\vec{B}_{BC} = \frac{\mu_0 I}{4\pi (a-z_0)} \left(\frac{x_0}{\sqrt{(a-z_0)^2 + x_0^2}} + 1 \right) \vec{e}_y$$

$$\vec{B}_{CD} \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot 0 = 0$$

$$\vec{B}_{DA} = \frac{\mu_0 I}{4\pi (z_0+a)} \left(\frac{x_0}{\sqrt{(z_0+a)^2 + x_0^2}} + 1 \right) \vec{e}_y$$

3.5 $a \rightarrow \infty$

$$\vec{B}_{AB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi x_0} (1+1) \vec{e}_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi x_0}$$

$$\vec{B}_{BC} = 0$$

$$\vec{B}_{CD} = \frac{\mu_0 I}{4\pi (b-x_0)} (1+1) = \frac{\mu_0 I}{2\pi (b-x_0)}$$

$$\vec{B}_{DA} = 0$$

$a \rightarrow \infty$, Magnetfeldstärke von Teilstücke AB und CD kann durch Durchflutungsgesetz berechnet werden.

$$\oint H ds = \int \vec{j} d\vec{A}$$

$$H_{AB} \cdot 2\pi x_0 = I$$

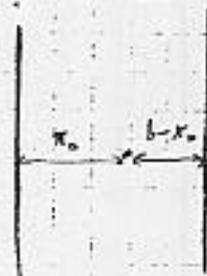
$$H_{CD} \cdot 2\pi (b-x_0) = I$$

$$H_{AB} = \frac{I}{2\pi x_0}$$

$$H_{CD} = \frac{I}{2\pi (b-x_0)}$$

$$B_{AB} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x_0}$$

$$B_{CD} = \frac{\mu_0 I}{2\pi (b-x_0)}$$



ergibt sich das selbe Ergebnis.

3.2.1 Durchflutung durch die Rechteckschleife

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{x} d\vec{z}$$

$$= \int_0^b \int_{-a}^a \frac{\mu_0 I}{4\pi} [\dots] dx dz$$

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^b \int_{-a}^a \left[\frac{1}{x_0} \left(\frac{a-z_0}{\sqrt{x_0^2 + (a-z_0)^2}} + \frac{z_0+a}{\sqrt{x_0^2 + (z_0+a)^2}} \right) + \frac{1}{a-z_0} \left(\frac{x_0}{\sqrt{(a-z_0)^2 + x_0^2}} + \frac{b-x_0}{\sqrt{(a-z_0)^2 + (b-x_0)^2}} \right) + \frac{1}{b-x_0} \left(\frac{a-z_0}{\sqrt{(b-x_0)^2 + (a-z_0)^2}} + \frac{z_0+a}{\sqrt{(b-x_0)^2 + (z_0+a)^2}} \right) + \frac{1}{z_0+a} \left(\frac{x_0}{\sqrt{(z_0+a)^2 + x_0^2}} + \frac{b-x_0}{\sqrt{(z_0+a)^2 + (b-x_0)^2}} \right) \right] dx dz$$

prinzipiell kann man die Induktivität von Stromkreisen beliebiger Form berechnen (Kupfermüller S. 283).

$$L = \frac{\mu}{4\pi} \oint ds_1 \oint \frac{ds_2 \cos \alpha}{r_{12}}$$

Liefert nur die äußere Induktivität.

$$r = \sqrt{b^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

$$L_{13} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-a}^a dz_1 \int_{-a}^a \frac{dz_2}{\sqrt{b^2 + (z_1 - z_2)^2}}$$

$$= \frac{\mu}{4\pi} \int_{-a}^a dz_1 \left[-\ln(b + \sqrt{b^2 + (z_1 - z_2)^2}) \right] \Big|_{z_2 = -a}^a$$

$$= \frac{\mu}{4\pi} \int_{-a}^a \left[\ln(b + \sqrt{b^2 + (z_1 + a)^2}) - \ln(b + \sqrt{b^2 + (z_1 - a)^2}) \right] dz_1$$

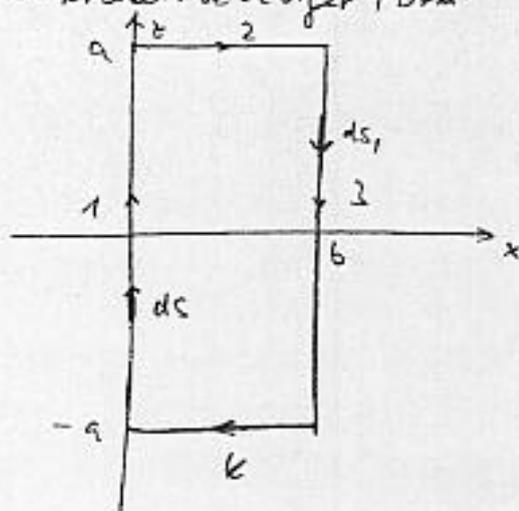
$$L_{12} = L_{14} = L_{21} = L_{23} = L_{32} = L_{34} = L_{41} = L_{43} \equiv 0$$

$$L_{11} = L_{33} = ?$$

$$L_{31} = L_{13}$$

$$L_{24} = L_{42}$$

$$L_{22} = L_{44} = ?$$



AV

v_n im Vakuum: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Wellenwiderstand } z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \\ \text{Geschwindigkeit; } v_0 = c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \end{array} \right.$

$$n = \frac{c_0}{c} = \frac{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\epsilon_r}$$

im Medium $\left\{ \begin{array}{l} \text{x-Richtung } z_x = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_r \epsilon_{rx}}} = \frac{z_0}{n_x} \\ v_x = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_{rx} \mu_0}} = \frac{c_0}{n_x} \\ \text{y-Richtung } z_y = \frac{z_0}{n_y} \\ v_y = \frac{c_0}{n_y} \end{array} \right.$

Fresnelsche Formel $\alpha_i = \alpha_r = 0$

$$\frac{E_{rx}}{E_{ox}} = \frac{z_x - z_0}{z_x + z_0} = \frac{\frac{z_0}{n_x} - z_0}{\frac{z_0}{n_x} + z_0} = \frac{1 - n_x}{1 + n_x}$$

$$\frac{E_{ry}}{E_{oy}} = \frac{z_y - z_0}{z_y + z_0} = \frac{1 - n_y}{1 + n_y}$$

$$\frac{E_{tx}}{E_{ox}} = \frac{z_x + z_0}{z_x + z_0} = \frac{z_x + z_0}{\frac{z_0}{n_x} + z_0} = \frac{2}{1 + n_x}$$

$$\frac{E_{ty}}{E_{oy}} = \frac{2}{1 + n_y}$$

k beschrieben durch $\omega, n, \epsilon_0, \mu_0$

für eine bestimmte Phase, z.B. $\omega t - k z = 0$

$$\frac{d}{dt} \omega - k \frac{dz}{dt} = 0$$

$$k = \omega \frac{1}{v} = \omega \frac{n}{c_0} = \omega n \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

$$\vec{E}_r = \vec{e}_x \left(\frac{1 - n_x}{1 + n_x} E_{ox} \right) e^{j(\omega t - \omega n \sqrt{\epsilon_r \mu_r} z)} + \vec{e}_y \left(\frac{1 - n_y}{1 + n_y} \right) E_{oy} e^{j(\omega t - \omega n \sqrt{\epsilon_r \mu_r} z)}$$

$$\vec{E}_t = \vec{e}_x \left(\frac{2}{1 + n_x} E_{ox} \right) e^{j(\omega t - \omega n \sqrt{\epsilon_r \mu_r} z)} + \vec{e}_y \left(\frac{2}{1 + n_y} \right) E_{oy} e^{j(\omega t - \omega n \sqrt{\epsilon_r \mu_r} z)}$$

4.2. Randbedingung der elektrischen Feldstärke

Die zur Grenzfläche parallel liegenden Komponenten müssen stetig sein
überprüfen die Ergebnisse in 4.1.

bei $z=0^+$ und $z=0^-$

$$\vec{E}_r(z=0^+) = \vec{e}_x \left(\frac{1-n_x}{1+n_x} E_{0x} \right) e^{j\omega t} + \vec{e}_y \left(\frac{1-n_y}{1+n_y} \right) E_{0y} e^{j\omega t}$$

$$\vec{E}_t(z=0^+) = \vec{e}_x \left(\frac{2}{1+n_x} E_{0x} \right) e^{j\omega t} + \vec{e}_y \left(\frac{2}{1+n_y} \right) E_{0y} e^{j\omega t}$$

$$\vec{E}_e(z=0^-) = \vec{e}_x E_{0x} e^{j\omega t} + \vec{e}_y E_{0y} e^{j\omega t}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_r(z=0^+) + \vec{E}_e(z=0^-) &= \vec{e}_x \left(\frac{1-n_x}{1+n_x} + 1 \right) E_{0x} e^{j\omega t} + \\ &\quad + \vec{e}_y \left(\frac{1-n_y}{1+n_y} + 1 \right) E_{0y} e^{j\omega t} \\ &= \vec{e}_x \frac{2}{1+n_x} E_{0x} e^{j\omega t} + \vec{e}_y \frac{2}{1+n_y} E_{0y} e^{j\omega t} \\ &= \vec{E}_t(z=0^+) \end{aligned}$$

4.3. Phasenunterschied:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= |\varphi_x - \varphi_y| = \left| \omega t - \omega n_x \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} z - \omega t + \omega n_y \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} z \right| \\ &= \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} z |n_y - n_x| \end{aligned}$$

4.4. Zirkular polarisierte Welle $\left\{ \begin{array}{l} E_x = E_y \\ \varphi_x - \varphi_y = \frac{2n+1}{2} \pi \end{array} \right.$

$$\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} d |n_y - n_x| = \frac{2n+1}{2} \pi \quad \text{spez. all. } \pm \frac{1}{2} \pi$$

$$d = \frac{\pi(2n+1)}{2 \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} |n_y - n_x|}$$

$$= \frac{\pi}{2} c_0 \frac{2n+1}{2\pi f} \frac{1}{|n_y - n_x|} = \frac{\lambda_0}{4} \frac{2n+1}{|n_y - n_x|} \quad n=0, 1, 2$$

Zwei Komponenten mit gleich großen Amplituden:

$$E_{tx} = E_{ty} \Rightarrow \frac{2}{1+n_x} E_{0x} = \frac{2}{1+n_y} E_{0y} \quad \frac{E_{0x}}{E_{0y}} = \frac{1+n_x}{1+n_y}$$

$$4.2.1 \quad \text{rot } \vec{e} = -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{h} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{d}}{\partial t}$$

harmonische Felder. Ansatz: $\vec{e} = \text{Re} \{ \vec{E} \cdot e^{j\omega t} \}$

Fouriertransformation: $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$

$$\vec{e}_0 \rightarrow \vec{E}$$

$$\vec{h}_0 \rightarrow \vec{H}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -j\omega \vec{B} \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} + j\omega \vec{D} \end{aligned} \right\} \text{Maxwell'sche Gleichungen für harmonische Wellen.}$$

in Vakuum $\left\{ \begin{array}{l} \text{keine Ladungsdichte} \Rightarrow \rho = 0 \\ \text{keine Leitungsstrom} \Rightarrow \vec{J} = 0 \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{E} = -j\omega \mu_0 \vec{H} \quad (1) \quad \text{div } \vec{D} = \rho \Rightarrow \epsilon_0 \text{div } \vec{E} = \rho = 0 \quad (3)$$

$$\text{rot } \vec{H} = j\omega \epsilon_0 \vec{E} \quad (2)$$

$$\text{rot } (1): \quad \text{rot rot } \vec{E} = -j\omega \mu_0 \text{rot } \vec{H}$$

$$\text{mit } (2): \quad \text{rot rot } \vec{E} = -j\omega \mu_0 j\omega \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\text{rot rot } \vec{E} = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\text{rot rot } \vec{E} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \cdot \vec{\nabla} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$$

$$\text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\text{mit } (3) \quad \text{grad}(\text{div } \vec{E}) = \text{grad}(0) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} + \omega \mu_0 \epsilon_0 \vec{E} = 0$$

700

UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN
Fachbereich Elektrotechnik
Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik
und Optische Kommunikationstechnik
Prof. Dr.-Ing. R. Zengerle

07.04.2000

Diplomhauptprüfung (WS 2000)

Theoretische Elektrotechnik III

1. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
2. Außer Schreib- und Zeichenmaterial sind keine Hilfsmittel zugelassen (auch kein Taschenrechner)!
3. Die jeweils maximal erreichbare Punktzahl pro Teilaufgabe ist in Klammern am Ende jeder Teilaufgabe angegeben.
4. Es sind alle Aufgaben zu bearbeiten! Die Zusatzaufgaben sind optional.
5. Verwenden Sie ausschließlich die Ihnen ausgeteilten Doppelbögen; nur diese werden bewertet. Trennen Sie die Doppelbögen nicht. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Doppelbogen!
6. Schreiben Sie auf jeden Doppelbogen Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Aufgabe (inklusive der Teilaufgabe), die Sie bearbeiten!
7. Zeigen Sie den gewählten Lösungsweg auf. Geben Sie insbesondere Zwischenergebnisse und Begründungen an. Nur eindeutige Aussagen können bewertet werden!
8. Einige häufig gebrauchte Formeln finden Sie im Anhang.
9. VIEL ERFOLG!!!

1. Aufgabe: Linienladung vor einer unendlich gut leitenden, geerdeten Ebene
(13 Punkte + 5 Zusatzpunkte)

Gegeben ist eine unendlich gut leitende, geerdete Ebene, welche bei $z = 0$ den gesamten Raum in zwei Hälften zerteilt, siehe Abb. 1.1. Im Halbraum $z > 0$ befindet sich eine Linienladung der Länge L mit homogen verteilter, positiver Gesamtladung $Q > 0$. Die Linienladung liegt nach Abb. 1.1 auf der z -Achse. Die Dielektrizitätszahl ϵ sei überall ϵ_0 !

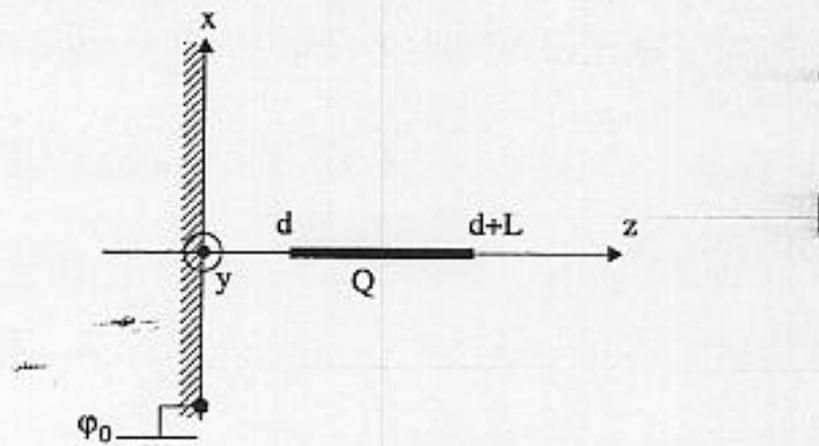


Abb. 1.1 Linienladung vor unendlich gut leitender, geerdeter Ebene

- 1.1 **Skizzieren** Sie **qualitativ** den Verlauf der elektrischen Feldstärke \vec{E} in der Halbebene $y = 0$ und $z > 0$. **Erklären** Sie das Verhalten des Feldstärkeverlaufes bei $z = 0^+$!
(2 Punkte)
- 1.2 **Berechnen** Sie das elektrische Potential $\varphi(x, y, z)$ im **gesamten** Raum (mit Begründung)! Es gilt: Erdpotential = Bezugspotential.
(5 Punkte)
- 1.3 **Berechnen** Sie mit Hilfe des **Coulombschen Gesetzes** das elektrische Feld $\vec{E}(x, y, z)$ in der Nähe der leitenden Ebene, also bei $z = 0^+$!
(3 Punkte)
- 1.4 **Berechnen** Sie die auf der leitenden Ebene bei $z = 0$ beeinflusste Flächenladungsdichte $\sigma(x, y)$!
(3 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 1.Z.1 Berechnen Sie die auf der leitenden Ebene beeinflusste **gesamte Ladung**! (2 Punkte)
- 1.Z.2 Geben Sie zu 1.3 eine **alternative Lösungsmöglichkeit** an! (3 Punkte)

2. Aufgabe: Plattenkondensator (11 Punkte + 7 Zusatzpunkte)

Bild 2.1 zeigt einen geladenen Plattenkondensator. Seine beiden Platten mit jeweils der Fläche A tragen die Ladungen $\pm Q_0$. Zwei sehr dünne leitfähige Platten mit gleicher Fläche A werden einander berührend (und dadurch leitfähig miteinander verbunden) in den Kondensator gebracht (Bild 2.1) und dann voneinander getrennt (Bild 2.2). Der Kondensator soll als idealer ebener Kondensator behandelt werden. Die Plattenabmessungen sind viel größer als d , deshalb können Randeffekte vernachlässigt werden. Dasselbe gilt für die die Dicke der eingebrachten Platten. Es sei $\epsilon = \epsilon_0$.

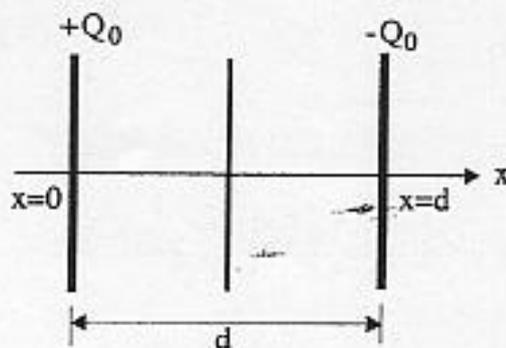


Abb. 2.1 Kondensator mit verbundenen Platten

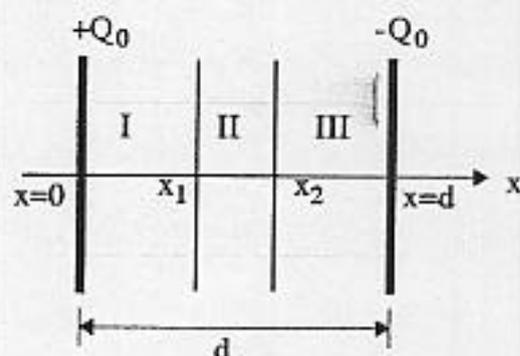


Abb. 2.2 Kondensator mit getrennten Platten

- 2.1 Welche **Ladungen** befinden sich auf den eingebrachten Platten? Berechnen Sie das elektrische Feld \vec{E} , die elektrische **Flußdicht** \vec{D} und die elektrische **Energiedichte** w in den Gebieten I, II, III! (4 Punkte)
- 2.2 Welche **Spannung** U_0 herrscht zwischen den beiden äußeren Kondensatorplatten? (2 Punkte)
- 2.3 Geben Sie die gesamte im Kondensator vorhandene **Energie** W_0 als Funktion von Q_0 , A , D , x_1 und x_2 ! (1 Punkte)
- 2.4 Die beiden eingebrachten Platten werden in vorgegebenen Positionen x_1 und x_2 unbeweglich fixiert. Die beiden äußeren Kondensatorplatten werden über einen Widerstand R leitfähig verbunden (Bild 2.3). Welche **Ladungen** befinden sich auf den äußeren Kondensatorplatten **nach langer Zeit**? Wird der Kondensator **feldfrei** sein? Welche **Energie** W_∞ hat der Kondensator am Ende des ganzen Vorgangs? Wie groß ist die **Energiedifferenz** $\Delta W = W_0 - W_\infty$? **Wofür** ist diese Energie gebraucht? (4 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 2.Z.1 Geben Sie die **Differentialgleichung** für die Ladung $Q_1(t)$ auf den äußeren Platten (siehe Bild 2.3) an und lösen sie. Berechnen Sie den sich so ergebenden **Endzustand** und die gesamte während des Entladevorganges auftretende **Stromwärme**. Vergleichen

Sie die Ergebnisse mit den unter 2.4 gewonnenen, um die Richtigkeit Ihrer Rechnungen nachzuprüfen.

(5 Punkte)

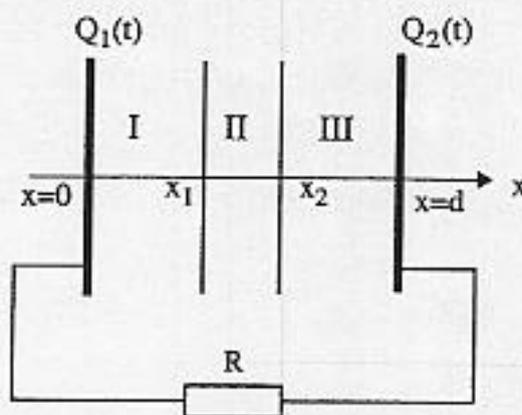


Abb. 2.3 Kondensator mit Widerstand verbunden

- 2.Z.2 Wenn die Platten **getrennt** parallel zu den Kondensatorplatten **eingbracht** werden und ihre Flächen nur halb so groß wie die Kondensatorplatten sind (Bild 2.4), welche **Ladungen** befinden sich auf den eingebrachten Platten? **Skizzieren** Sie qualitativ den Verlauf des elektrischen **Feldes** im ganzen Raum! (2 Punkte)

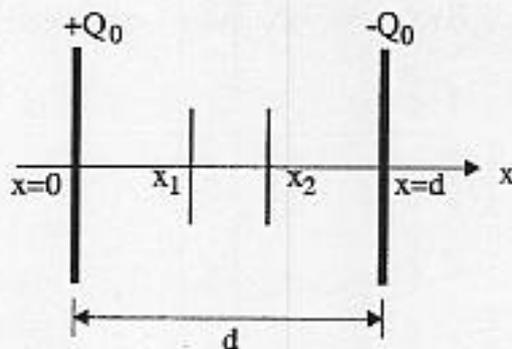


Abb. 2.4 Kondensator mit getrennten Platten

3. Aufgabe: Magnetisches Feld und Induktion (12 Punkte + 2 Zusatzpunkte)

Längs eines **unendlich langen, hohlzylinderförmigen Leiters** mit Innenradius R_i und Außenradius R_a , dessen Symmetrieachse mit der y -Achse zusammenfällt, fließt ein zeitlich veränderlicher, homogen über den Leiterquerschnitt verteilter Gesamtstrom $I(t) = I_0 \cos \omega t$ in entgegengesetzter Richtung der y -Achse. In der x - y -Ebene befindet sich weiterhin eine quadratische Leiterschleife. Der linke untere Eckpunkt der Schleife habe die im allgemeinen zeitabhängigen Koordinaten $x(t)$ und $y(t)$. Die Seiten der Schleife haben die Länge a und liegen stets parallel zu den Koordinatenachsen (siehe Abb. 3).

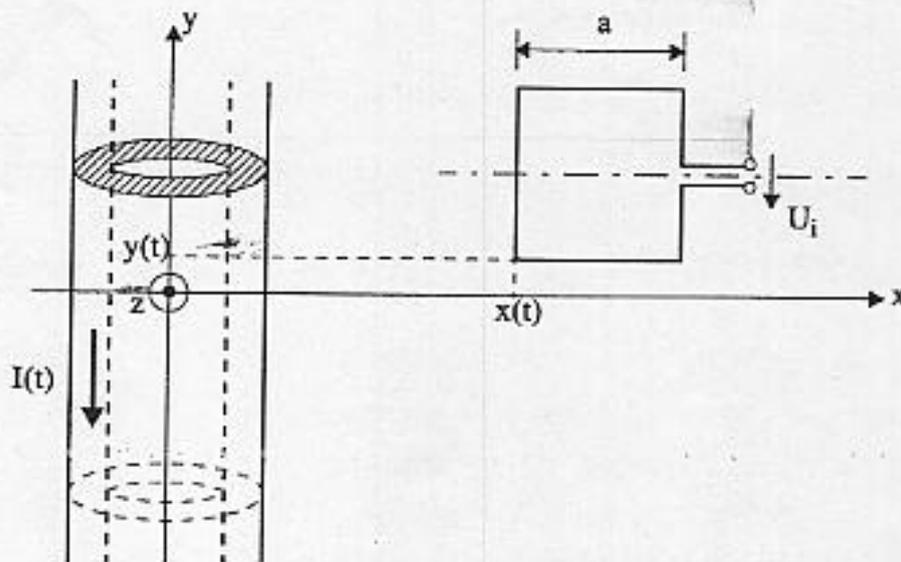


Abb 3.1 Hohlzylinder mit quadratischer Leiterschleife

- 3.1 Berechnen Sie das vom Strom $I(t)$ erzeugte Magnetfeld $\vec{H}(\vec{r})$ im ganzen Raum. (Wählen Sie dazu ein geeignetes Koordinatensystem.) (4 Punkte)
- 3.2 Berechnen Sie für den Leiter die Eigeninduktivität pro Längeneinheit. (2 Punkte)
- 3.3 Berechnen Sie den magnetischen Fluß durch die Schleifenfläche und **vorzeichenrichtig** die Induktionsspannung U_i , wenn die Schleife im Punkt (x_0, y_0) liegt. **Begründen** Sie Ihre vorzeichenwahl! (3 Punkte)
- 3.4 Vom Punkt (x_0, y_0) aus bewege sich die Schleife mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y$ in der x - y -Ebene. Berechnen Sie die Induktionsspannung U_i der Anordnung nach Abb3.1! (3 Punkte)

Zusatzaufgabe:

- 3.Z.1 Zusätzlich zur Bewegung in 3.4 **rotiere** noch die Leiterschleife um ihre Symmetrieachse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_0 . Wie groß ist die induzierte Spannung jetzt? (2 Punkte)

4. Aufgabe: Ebene Welle (14 Punkte + 6 Zusatzpunkte)

Eine rechteckförmige elektromagnetische **ebene** Welle läuft nach Abb. 4.1 senkrecht auf die bei $z = 0$ befindliche Grenzfläche zwischen dem Vakuum (links) und einem verlustlosen Dielektrikum mit $\epsilon = 4\epsilon_0$ (rechts) zu. Im Bild ist das elektrische Feld $\vec{E}_e = E_{xc} \cdot \vec{e}_x$ der einfallenden Welle gezeigt. Die räumliche Impulslänge der Welle sei l_1 . Im gesamten Raum gilt: $\mu = \mu_0$.

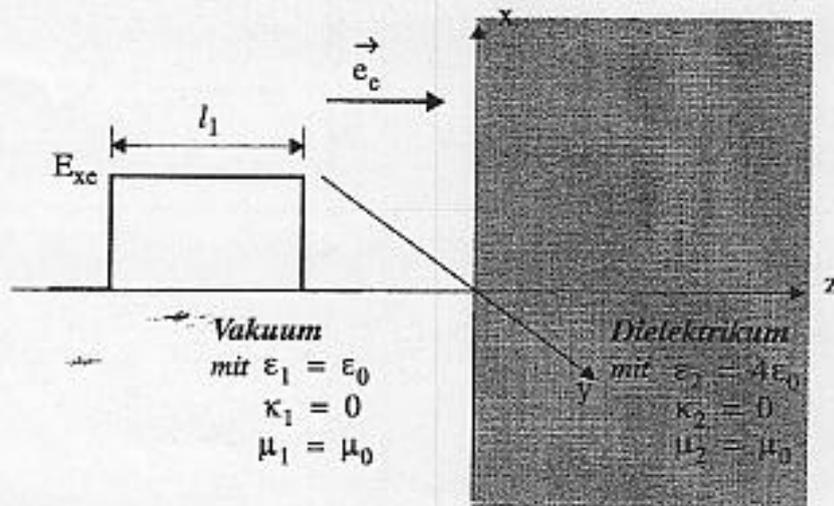


Abb. 4.1 rechteckförmige ebene Welle

- 4.1 **Geben** Sie die zur einfallenden Welle gehörte magnetische Feldstärke \vec{H}_e als Funktion von μ_0 , ϵ_0 und E_{xc} an. **Skizzieren** Sie dieses Feld vorzeichenrichtig in einem Bild wie Abb 4.1. (2 Punkt)
- 4.2 **Welche Randbedingungen** müssen die elektrischen und magnetischen Feldstärken an der Grenzfläche $z = 0$ erfüllen? (2 Punkte)
- 4.3 **Berechnen** Sie unter Verwendung der Fresnelschen Formeln die reflektierte Welle \vec{E}_r , \vec{H}_r und die ins Dielektrikum eindringende Welle \vec{E}_t , \vec{H}_t als Funktion von μ_0 , ϵ_0 und E_{xc} ! (4.5 Punkte)
- 4.4 **Berechnen** Sie die räumliche Impulslänge l_2 im Dielektrikum! (1.5 Punkt)
- 4.5 **Skizzieren** Sie den räumlichen Verlauf der elektrischen und der magnetischen Feldstärken für folgende Zeitpunkte:
 - a) für den Zeitpunkt, zu dem gerade der halbe Rechteckimpuls die Grenzfläche erreicht hat (wobei einfallende und reflektierte Welle getrennt gezeichnet werden sollen).
 - b) für einen Zeitpunkt nach Abschluß des Reflexionsvorganges. (4 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 4.Z.1 Berechnen Sie die Poyntingvektoren \vec{S}_e , \vec{S}_r und \vec{S}_t , die Energiedichten w_e , w_r und w_t aller drei Wellen in 4.5 b). (4 Punkte)
- 4.Z.2 Warum ist zwar $|\vec{S}_e| = |\vec{S}_r| + |\vec{S}_t|$, nicht jedoch $w_e = w_r + w_t$? Ist die Gesamtenergie erhalten? (2 Punkte)

Bekannt sind die Fresnelschen Formeln mit den Wellenausbreitungsrichtungen \vec{c}_e , \vec{e}_r , \vec{e}_t !

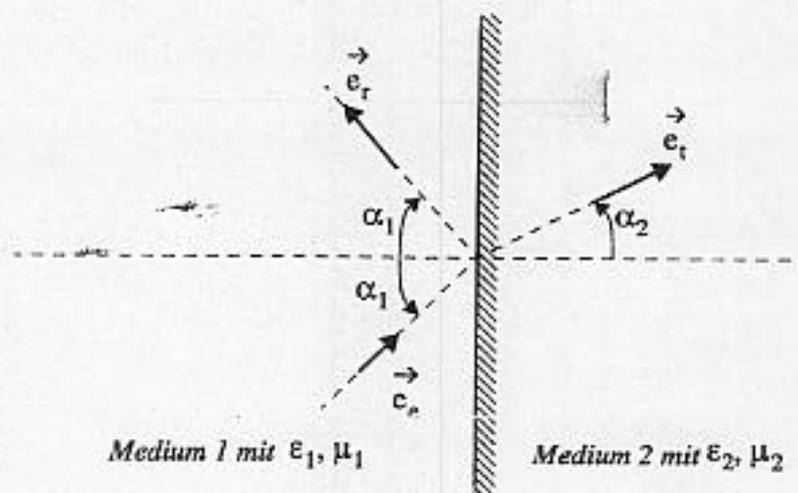


Tabelle 1: Fresnelsche Formeln

S-Polarisation	P-Polarisation
$\frac{E_r}{E_e} = \frac{Z_2 \cos \alpha_1 - Z_1 \cos \alpha_2}{Z_2 \cos \alpha_1 + Z_1 \cos \alpha_2}$	$\frac{E_r}{E_e} = \frac{Z_2 \cos \alpha_2 - Z_1 \cos \alpha_1}{Z_2 \cos \alpha_2 + Z_1 \cos \alpha_1}$
$\frac{E_t}{E_e} = \frac{2Z_2 \cos \alpha_1}{Z_2 \cos \alpha_1 + Z_1 \cos \alpha_2}$	$\frac{E_t}{E_e} = \frac{2Z_2 \cos \alpha_1}{Z_1 \cos \alpha_1 + Z_2 \cos \alpha_2}$

Formelsammlung

1. Zylinder- und Kugelkoordinaten:

$$\vec{e}_\rho(\phi) = \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\phi \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\phi(\phi) = -\sin\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\phi \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{r}(\rho, \phi, z) = \rho \cdot \vec{e}_\rho(\phi) + z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [x\vec{e}_x + y\vec{e}_y]$$

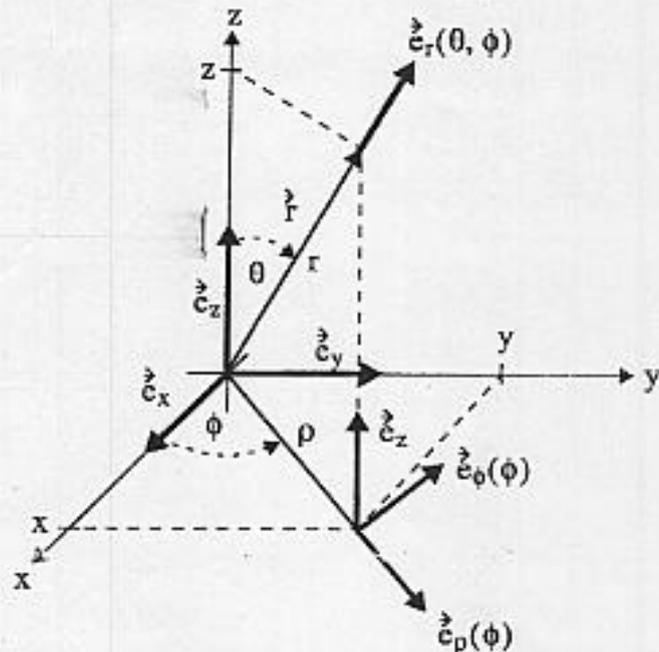
$$\vec{e}_\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y]$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{e}_r(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{e}_r(\theta, \phi) = \sin\theta \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\theta \sin\phi \cdot \vec{e}_y + \cos\theta \cdot \vec{e}_z$$



2. Oberflächen- und Volumenelemente:

$$d\vec{A}(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \cdot \vec{e}_r$$

$$dV(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$

$$d\vec{A}(\rho, \phi, z) = \rho d\phi dz \cdot \vec{e}_\rho$$

$$dV(\rho, \phi, z) = \rho d\rho d\phi dz$$

3. Vektoren:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \text{ mit } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$$

4. Divergenz und Rotation in Zylinderkoordinaten

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \{\rho A_\rho\} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \{A_\phi\} + \frac{\partial}{\partial z} \{A_z\}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \hat{e}_\rho \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right] + \hat{e}_\phi \cdot \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] + \hat{e}_z \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right]$$

5. Laplace-Operator und Gradient in Kugelkoordinaten

$$\Delta \varphi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \right]$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \cdot \hat{e}_\phi$$

6. Näherungsformeln:

Für kleine Winkel α gilt: $\sin \alpha = \tan \alpha = \alpha$ und $\cos \alpha \approx 1$

Reihen: $\sin \phi = \phi - \frac{\phi^3}{3!}, \quad \cos \phi \approx 1 - \frac{\phi^2}{2!}, \quad \frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x$

7. Integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C,$$

$$\int \frac{x dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + C,$$

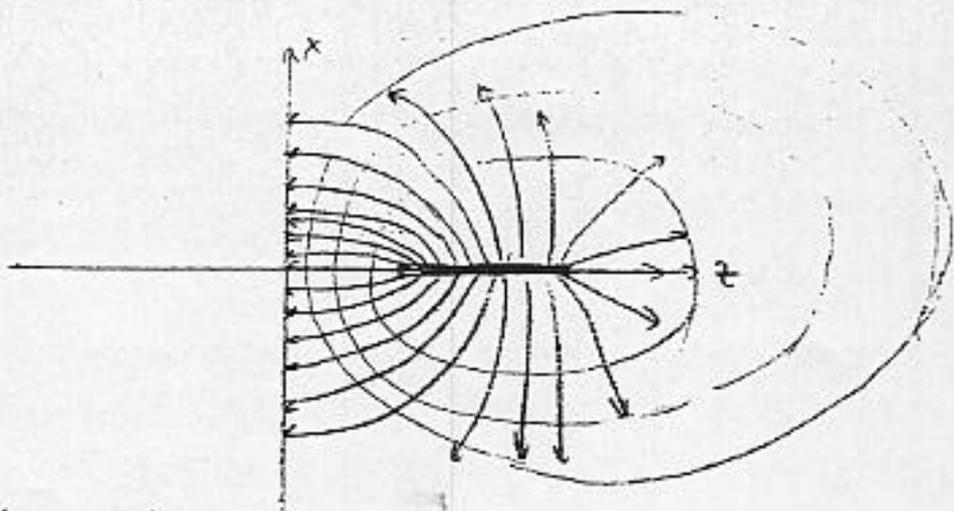
$$\int \frac{dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \cdot \sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

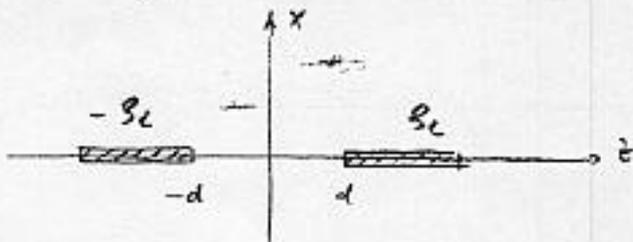
A1.

1.1



bei $z=0^+$ geerdete Ebene ist Äquipotential fläche $\Rightarrow \vec{E}$ steht \perp darauf.
 \Rightarrow Feldlinien sind senkrecht auf leitender Ebene bei $z=0^+$.

1.2 Spiegelungsmethode.



$$\rho_L = \frac{Q}{L} = \text{konst.}$$

a. Im Halbraum $z < 0$ ist keine Ladung vorhanden $\Rightarrow \Phi_z = \text{konst.}$

Da Ebene $z=0$ geerdet ist, $\Rightarrow \Phi = 0$.

b. $z \geq 0$.

$$\text{allg. } \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_Q \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dQ$$

$$dQ = \rho_L \cdot dz'$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_d^{d+L} \frac{\rho_L}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dz' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-d-L}^{-d} \frac{-\rho_L}{|\vec{r} - \vec{r}''|} dz''$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$\vec{r}' = z'\vec{e}_z \quad \vec{r}'' = z''\vec{e}_z$$

1.2b.

$$\varphi = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_{z'=d}^{d+L} \frac{dz'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}} - \int_{z''=-d-L}^{-d} \frac{dz''}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z'')^2}} \right\}$$

Anhang: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$

Sub: $u = z - z' \rightarrow du = -dz'$

$z' = d \rightarrow u = z - d$

$z' = d+L \rightarrow u = z - d - L$

$u = z - z'' \rightarrow du = -dz''$

$z'' = -d \rightarrow u = z + d$

$z'' = -d-L \rightarrow u = z + d + L$

$$\varphi = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left\{ - \int_{u=z-d}^{z-d-L} \frac{du}{\sqrt{x^2+y^2+u^2}} + \int_{u=z+d+L}^{z+d} \frac{du}{\sqrt{x^2+y^2+u^2}} \right\}$$

$$= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left\{ - \ln(u + \sqrt{u^2+x^2+y^2}) \Big|_{u=z-d}^{z-d-L} + \ln(u + \sqrt{u^2+x^2+y^2}) \Big|_{u=z+d+L}^{z+d} \right\}$$

$$= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \ln \frac{z-d + \sqrt{(z-d)^2+x^2+y^2}}{z-d-L + \sqrt{(z-d-L)^2+x^2+y^2}} + \ln \frac{z+d + \sqrt{(z+d)^2+x^2+y^2}}{z+d+L + \sqrt{(z+d+L)^2+x^2+y^2}} \right\}$$

mit $\rho_L = \frac{Q}{L}$

$$\varphi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \cdot \ln \frac{(z-d + \sqrt{(z-d)^2+x^2+y^2}) (z+d + \sqrt{(z+d)^2+x^2+y^2})}{(z-d-L + \sqrt{(z-d-L)^2+x^2+y^2}) (z+d+L + \sqrt{(z+d+L)^2+x^2+y^2})}$$

1.3. Coulombsches Gesetz: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{Q}} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\mathcal{Q}$

hier: $\vec{E} \Big|_{z=0} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_{z'=d}^{d+L} \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (z^0 - z')\vec{e}_z}{[x^2+y^2+(z^0-z')^2]^{3/2}} dz' \right.$

$$\left. - \int_{z''=-d-L}^{-d} \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (z^0 - z'')\vec{e}_z}{[x^2+y^2+(z^0-z'')^2]^{3/2}} dz'' \right\}$$

$$\vec{E}|_{z=0} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_{z'=d}^{d+L} \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{[x^2+y^2+z'^2]^{3/2}} dz' - \int_{z''=-d-L}^{-d} \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{[x^2+y^2+z''^2]^{3/2}} dz'' \right\} + \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_{z'=d}^{d+L} \frac{-z'\vec{e}_z}{[x^2+y^2+z'^2]^{3/2}} dz' + \int_{z''=-d-L}^{-d} \frac{z''\vec{e}_z}{[x^2+y^2+z''^2]^{3/2}} dz'' \right\}$$

Weil $f(z) = \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}}$ eine gerade Funktion ist.

$$\int_{z=d}^{d+L} \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}} dz + \int_{-d}^{-d-L} \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}} dz \stackrel{!}{=} 0$$

$$\vec{E}|_{z=0} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_d^{d+L} \frac{-z\vec{e}_z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dz + \int_{-d-L}^{-d} \frac{z\vec{e}_z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dz \right\}$$

Abkürzung: $\int \frac{x dx}{[x^2+a^2]^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + C$

$$\vec{E}|_{z=0} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Big|_{z=d}^{d+L} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Big|_{z=-d-L}^{-d} \right\} \vec{e}_z$$

$$= \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(d+L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}} \right\} \vec{e}_z$$

$$\vec{E}(x, y, z=0) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(d+L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}} \right\} \vec{e}_z$$

\vec{E} bei $z=0$ hat nur z -Komponente $\Rightarrow \vec{E}$ tritt senkrecht in leitende Ebene ein.

1. v. $D_{n1} - D_{n2} = \sigma$, Normalkomponente = z -Komponente!

$$\Rightarrow \epsilon_0 \cdot E_z(z=0^+) - \epsilon_0 E_z(z=0^-) = \sigma(x, y)$$

\rightarrow Weil kein E -feld für $z < 0$

$$\sigma(x, y) = \frac{Q}{2\pi L} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(d+L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}} \right\}$$

$$1. \text{E.1 } Q_i = \iint_{xy} \sigma(x, y) dx \cdot dy.$$

$$\text{od. } x^2 + y^2 = s^2.$$

$$Q_i = \int_{s=0}^{\infty} \sigma(s) 2\pi s ds.$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{Q}{2\pi L} \left(\frac{1}{\sqrt{s^2 + (d+L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{s^2 + d^2}} \right) 2\pi s ds.$$

$$= \frac{Q}{L} \left(\int_0^{\infty} \frac{s ds}{\sqrt{s^2 + (d+L)^2}} - \int_0^{\infty} \frac{s ds}{\sqrt{s^2 + d^2}} \right)$$

$$= \frac{Q}{L} \left(\left. \sqrt{s^2 + (d+L)^2} \right|_{s=0}^{\infty} - \left. \sqrt{s^2 + d^2} \right|_{s=0}^{\infty} \right)$$

$$= \frac{Q}{L} \left[\underbrace{\left(\sqrt{s^2 + (d+L)^2} - \sqrt{s^2 + d^2} \right)}_{=0} \Big|_{s=0}^{\infty} - (d+L - d) \right]$$

$$= \frac{Q}{L} \cdot (-L) = -Q.$$

1. z. 2. Methode von 1.3: $\vec{E} = -\text{grad } \phi$

In der Ebene $z=0^+$ steht \vec{E} senkrecht auf dieser Ebene.

$$\Rightarrow \vec{E}(x, y, 0^+) = -\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, 0^+) \vec{e}_z$$

nach 1.2

$$\phi = \frac{q_L}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_{z'=d}^{d+L} \frac{dz'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}} - \int_{z''=-d-L}^{-d} \frac{dz''}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z'')^2}} \right\}$$

differenziere unter dem Integral:

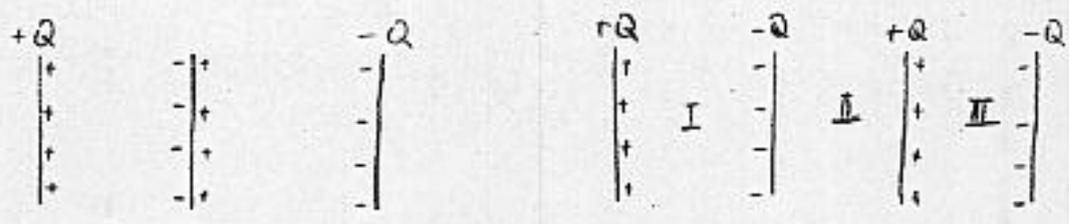
$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{q_L}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{z'=d}^{d+L} \frac{-(z-z') dz'}{[x^2+y^2+(z-z')^2]^{3/2}} - \int_{z''=-d-L}^{-d} \frac{-(z-z'') dz''}{[x^2+y^2+(z-z'')^2]^{3/2}} \right) \\ &= \frac{q_L}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}} \Big|_{z'=d}^{d+L} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z'')^2}} \Big|_{z''=-d-L}^{-d} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, z=0) = \frac{q}{2\pi L \epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(d+L)^2}} \right]$$

$$\vec{E}(x, y, 0^+) = \frac{q}{2\pi L \epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(d+L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}} \right] \vec{e}_z$$

A2.

2.1.

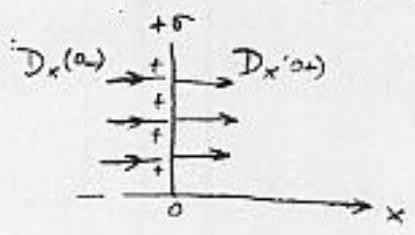


bei $x = x_1$, $Q_2 = -Q$, bei $x = x_2$, $Q_3 = +Q$.

idealer ebener Kondensator, $d \ll$ lateralabmessung \Rightarrow Feld hat nur x -Komponente

Feld eines unendlich großen Platte mit Flächenladung $+\sigma$

$D_x(0+) = \frac{\sigma}{2}$ $D_x(0-) = -\frac{\sigma}{2}$



Hier $\sigma = \pm \frac{Q}{A}$

Gebiet I: $D_{Ix} = D_{1x} + D_{2x} + D_{3x} + D_{4x}$
 $= \frac{Q}{2A} + \frac{Q}{2A} - \frac{Q}{2A} + \frac{Q}{2A} = \frac{Q}{A}$

$E_{Ix} = \frac{D_{Ix}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$ $W_I = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{Ix}^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A^2}$

Gebiet II: $D_{IIx} = D_{1x} + D_{2x} + D_{3x} + D_{4x}$
 $= \frac{Q}{2A} - \frac{Q}{2A} - \frac{Q}{2A} + \frac{Q}{2A} = 0$

$E_{IIx} = 0$ $W_{II} = 0$

Gebiet III: $D_{IIIx} = D_{1x} + D_{2x} + D_{3x} + D_{4x}$
 $= \frac{Q}{2A} - \frac{Q}{2A} + \frac{Q}{2A} + \frac{Q}{2A} = \frac{Q}{A}$

$E_{IIIx} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$ $W_{III} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{IIIx}^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A^2}$

2.2. $\varphi_1 = \varphi_{\text{Bezug}} - \int_{\text{Bezug}}^{x=0} E_x \cdot dx$ $\varphi_x = \varphi_{\text{Bezug}} - \int_{\text{Bezug}}^{x=d} E_x \cdot dx$

$U_{1x} = \varphi_1 - \varphi_x = - \int_{x=d}^{x=0} E_x \cdot dx$

$= - \int_{x=d}^{x=x_2} E_{IIx} \cdot dx - \int_{x=x_2}^{x=x_1} E_{IIx} \cdot dx - \int_{x=x_1}^{x=0} E_{IIIx} \cdot dx$

$= - \frac{Q}{\epsilon_0 A} \cdot (x_2 - d) - 0 - \frac{Q}{\epsilon_0 A} \cdot (d - x_1)$

$$2.3. \quad W_0 = W_2 \cdot A \cdot x_1 + W_3 \cdot A \cdot (d - x_2) \\ = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A} (x_1 + d - x_2)$$

2.4. nach langer Zeit, $U_{12} = 0$.

Annahme: Ladung bei Platte $x=0$: $+Q'$

Ladung bei Platte $x=d$: $-Q'$

$$E_{Ix} = \frac{Q'}{2\epsilon_0 A} + \frac{Q}{2\epsilon_0 A} - \frac{Q}{2\epsilon_0 A} + \frac{Q'}{2\epsilon_0 A} = \frac{Q'}{\epsilon_0 A}$$

$$E_{IIx} = \frac{Q'}{\epsilon_0 A} - \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

$$E_{IIIx} = \frac{Q'}{\epsilon_0 A}$$

$$U_{12} = E_{Ix} \cdot x_1 + E_{IIx} \cdot (x_2 - x_1) + E_{IIIx} \cdot (d - x_2) \\ = \frac{Q'}{\epsilon_0 A} \cdot x_1 + \left(\frac{Q'}{\epsilon_0 A} - \frac{Q}{\epsilon_0 A} \right) \cdot (x_2 - x_1) + \frac{Q'}{\epsilon_0 A} (d - x_2) \\ = \frac{1}{\epsilon_0 A} \left[Q' (x_1 + x_2 - x_1 + d - x_2) - Q (x_2 - x_1) \right] = 0$$

$$\Rightarrow Q' = \frac{x_2 - x_1}{d} Q$$

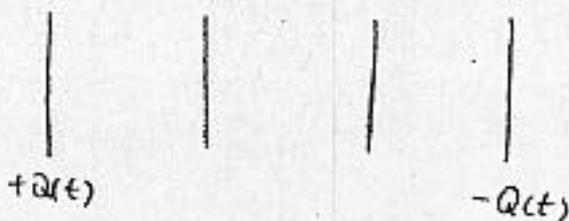
nach langer Zeit wird der Kondensator nicht feldfrei!

$$W_{\text{neu}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{Ix}^2 \cdot A \cdot x_1 + \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{IIx}^2 \cdot A \cdot (x_2 - x_1) + \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{IIIx}^2 \cdot A \cdot (d - x_2) \\ = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} \left[\left(\frac{x_2 - x_1}{d} \right)^2 \cdot x_1 + \left(\frac{x_2 - x_1}{d} - 1 \right)^2 \cdot (x_2 - x_1) + \left(\frac{x_2 - x_1}{d} \right)^2 (d - x_2) \right] \\ = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} \cdot \left(x_2 - x_1 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{d} \right)$$

$$\Delta W = W_0 - W_{\text{neu}} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} \left[x_1 + d - x_2 - x_2 + x_1 + \frac{(x_2 - x_1)^2}{d} \right] \\ = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} \left[2x_1 - 2x_2 + d + \frac{(x_2 - x_1)^2}{d} \right]$$

Diese Energie ist in der Widerstand als Wärme verlustet.

2. z. n.



$$-\frac{dQ(t)}{dt} = I(t).$$

$$I(t) \cdot R = U_{AV}$$

$$-\frac{dQ(t)}{dt} \cdot R = \frac{1}{\epsilon_0 A} [Q(t) \cdot (x_1 + x_2 - x_1 + d - x_2) - Q(x_2 - x_1)]$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0 A} [Q(t) \cdot d - Q(x_2 - x_1)]$$

$$Q(t) + \frac{\epsilon_0 A \cdot R}{d} \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{x_2 - x_1}{d} \cdot Q.$$

homogene Gleichung: $Q(t) + \frac{\epsilon_0 A \cdot R}{d} \frac{dQ(t)}{dt} = 0.$

Ansatz: $Q(t) = C \cdot e^{-\lambda t}$

$$C \cdot e^{-\lambda t} + \frac{\epsilon_0 A \cdot R}{d} \cdot (-\lambda) \cdot e^{-\lambda t} = 0.$$

$$\lambda = \frac{d}{\epsilon_0 A R}$$

Lösung der homogene Gleichung: $Q(t)_{\text{hom}} = C \cdot e^{-\frac{d}{\epsilon_0 A R} t}$

Inhomogene Gleichung: $Q(t) + \frac{\epsilon_0 A \cdot R}{d} \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{x_2 - x_1}{d} Q.$

Eine spezielle Lösung der Inhomogene Gleichung wird dadurch gegeben, dass bei stationärer Fall $\frac{dQ(t)}{dt} = 0$ gilt.

$$Q(t)_{\text{inhom}} = \frac{x_2 - x_1}{d} Q.$$

$$Q(t) = Q(t)_{\text{hom}} + Q(t)_{\text{inhom}} = C \cdot e^{-\frac{d}{\epsilon_0 A R} t} + \frac{x_2 - x_1}{d} Q$$

Anfangsbedingung: $t=0, Q(t) = Q.$

$$C + \frac{x_2 - x_1}{d} Q = Q \Rightarrow C = Q - \frac{x_2 - x_1}{d} Q = Q \cdot \frac{d - x_2 + x_1}{d}$$

$$Q(t) = \frac{d - x_2 + x_1}{d} Q \cdot e^{-\frac{d}{\epsilon_0 A R} t} + \frac{x_2 - x_1}{d} Q.$$

Endzustand $t = \infty$ $Q(t) \Big|_{t=\infty} = \frac{x_2 - x_1}{d} Q.$

Stromwärme: $W_R = \int_{t=0}^{t=\infty} R \cdot \dot{Q}(t) dt = \int_{t=0}^{\infty} R \left(\frac{dQ(t)}{dt} \right)^2 dt$

$$\begin{aligned} \frac{dQ(t)}{dt} &= \frac{d-x_2+x_1}{d} \cdot \left(-\frac{d}{\epsilon_0 AR} \right) \cdot Q \cdot e^{-\frac{d}{\epsilon_0 AR} t} \\ &= -\frac{d-x_2+x_1}{\epsilon_0 AR} Q \cdot e^{-\frac{d}{\epsilon_0 AR} t} \end{aligned}$$

$$W_R = \int_0^{\infty} R \cdot \left(-\frac{d-x_2+x_1}{\epsilon_0 AR} Q \right)^2 \cdot e^{-\frac{2d}{\epsilon_0 AR} t} dt.$$

$$= R \cdot \left(\frac{d-x_2+x_1}{\epsilon_0 AR} Q \right)^2 \cdot \left(-\frac{\epsilon_0 AR}{2d} \right) \cdot e^{-\frac{2d}{\epsilon_0 AR} t} \Big|_0^{\infty}$$

$$= -\frac{(d-x_2+x_1)^2}{2d\epsilon_0 A} \cdot Q^2 \cdot [0-1]$$

$$= \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} \cdot \frac{(d-x_2+x_1)^2}{d}$$

$$= \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} \cdot \frac{d^2 + x_2^2 + x_1^2 + 2dx_2 + 2dx_1 - 2x_1x_2}{d}$$

$$= \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} \left[2x_1 - 2x_2 + d + \frac{(x_2-x_1)^2}{d} \right]$$

Das ist das gleiche Ergebnis, wie das in 2.4 gewonnen wurde.

A3.

3.1: nach Durchflutungsgesetz: $\oint \vec{H} d\vec{s} = \iint \vec{j} d\vec{A}$

1. Fall, $s < R_i \Rightarrow \vec{j} = 0 \Rightarrow \vec{H} = 0$.

2. Fall, $R_i < s < R_a$.

$$\vec{j} = \frac{I(t)}{A} \cdot \vec{e}_y = \frac{-I(t)}{\pi R_a^2 - \pi R_i^2} \vec{e}_y \quad \vec{j} \text{ ist keine Fkt' von Ort.}$$

in Zylinderkoordinaten,

$$H \cdot 2\pi s = \iint \frac{-I(t)}{\pi R_a^2 - \pi R_i^2} \cdot \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y dA$$

$$= \frac{-I(t)}{\pi R_a^2 - \pi R_i^2} \cdot (\pi s^2 - \pi R_i^2)$$

$$= -\frac{s^2 - R_i^2}{R_a^2 - R_i^2} \cdot I(t)$$

$$H = \frac{-I(t)}{2\pi s} \cdot \frac{s^2 - R_i^2}{R_a^2 - R_i^2}$$

"rechte Hand Regel", \vec{H} hat aus Symmetriegrund nur \vec{e}_ϕ -Komponente

$$\vec{H}(s, t) = -\frac{I(t)}{2\pi s} \cdot \frac{s^2 - R_i^2}{R_a^2 - R_i^2} \cdot \vec{e}_\phi$$

3. Fall, $s > R_a$

$$H \cdot 2\pi s = -I(t)$$

$$\vec{H}(s, t) = -\frac{1}{2\pi s} I(t) \cdot \vec{e}_\phi$$

$$3.2. \quad \frac{1}{2} L_i \cdot I(t)^2 \stackrel{!}{=} W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dV = \frac{1}{2} \mu_0 \int |\vec{H}|^2 dV$$

$$|\vec{H}| = \frac{I(t)}{2\pi s} \cdot \frac{s^2 - R_i^2}{R_a^2 - R_i^2} \quad \text{nach 3.1 in hohlzylinderrf6rmigen Leiter.}$$

$$\Rightarrow W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \mu_0 \int_{z=0}^L \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{s=R_i}^{R_a} \left(\frac{I(t)}{2\pi s} \cdot \frac{s^2 - R_i^2}{R_a^2 - R_i^2} \right)^2 s ds d\phi dz$$

$$\begin{aligned}
 W_{\text{mag}} &= \frac{\mu_0 I(t) \cdot L \cdot 2\pi}{8\pi^2 (R_a^2 - R_i^2)^2} \cdot \int_{\rho=R_i}^{R_a} \frac{(s^2 - R_i^2)^2}{s} ds \\
 &= \frac{\mu_0 I(t) \cdot L}{4\pi (R_a^2 - R_i^2)^2} \cdot \int_{\rho=R_i}^{R_a} (s^3 - 2sR_i^2 + \frac{R_i^4}{s}) ds \\
 &= \frac{\mu_0 I(t) \cdot L}{4\pi (R_a^2 - R_i^2)^2} \left(\frac{s^4}{4} - R_i^2 s^2 + R_i^4 \ln s \right) \Big|_{R_i}^{R_a} \\
 &= \frac{\mu_0 I(t) \cdot L}{4\pi (R_a^2 - R_i^2)^2} \left(\frac{R_a^4 - R_i^4}{4} - R_i^2 R_a^2 + R_i^4 + R_i^4 \ln \frac{R_a}{R_i} \right) \\
 &= \frac{1}{2} L_i I(t)
 \end{aligned}$$

$$L_i = \frac{L_i}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi (R_a^2 - R_i^2)^2} \left(\frac{R_a^4 - R_i^4}{4} - R_i^2 R_a^2 + R_i^4 + R_i^4 \ln \frac{R_a}{R_i} \right)$$

3.3. Umschalten ins kartesisches Koordinatensystem.
 in x-y-Ebene; magn. Feld hat nur z-Komponente

$$s > R_a, \quad \vec{H} = \frac{1}{2\pi x} \cdot I(t) \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \int_A \mu_0 \vec{H} d\vec{A} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \int_{y_0}^{y_0+a} \int_{x_0}^{x_0+a} \frac{1}{x} dx dy \\
 &= \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} (y_0+a - y_0) \cdot \ln x \Big|_{x_0}^{x_0+a} \\
 &= \frac{\mu_0 I(t) \cdot a}{2\pi} \cdot \ln \frac{x_0+a}{x_0}
 \end{aligned}$$

3.4. bei den gegebene Umlaufzinn von L_i gilt

$$U_i = + \frac{d}{dt} \Phi(t) \quad \text{wegen linksschraubensystem.}$$

$$\phi(t) = \int \vec{B} d\vec{A} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \int_{y_0+u_y t}^{y_0+u_y t+a} \int_{x_0+u_x t}^{x_0+u_x t+a} \frac{1}{x} dx dy$$

$$= \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \cdot a \cdot \ln x \left[\begin{array}{l} x = x_0 + u_x t + a \\ x = x_0 + u_x t \end{array} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \cdot a \cdot \ln \frac{x_0 + u_x t + a}{x_0 + u_x t}$$

$$\frac{x_0 + u_x t + a}{x_0 + u_x t} = 1 + \frac{a}{x_0 + u_x t}$$

$$U_i = \frac{d}{dt} \phi(t) = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \left[\dot{I}(t) \ln \frac{x_0 + u_x t + a}{x_0 + u_x t} + I(t) \cdot \frac{x_0 + u_x t}{x_0 + u_x t + a} \cdot \frac{-v_x \cdot a}{(x_0 + u_x t)^2} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 a}{2\pi} \left[\dot{I}(t) \ln \frac{x_0 + u_x t + a}{x_0 + u_x t} - I(t) \cdot \frac{v_x \cdot a}{(x_0 + u_x t + a)(x_0 + u_x t)} \right]$$

$$I(t) = I_0 \cos \omega t$$

$$\dot{I}(t) = -I_0 \omega \sin \omega t$$

$$U_i = -\frac{\mu_0 a I_0}{2\pi} \left[\omega \sin \omega t \cdot \ln \frac{x_0 + u_x t + a}{x_0 + u_x t} + \cos \omega t \cdot \frac{v_x \cdot a}{(x_0 + u_x t + a)(x_0 + u_x t)} \right]$$

3.2.1. $\phi(t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} a \cdot \ln \frac{x_0 + u_x t + a}{x_0 + u_x t} \cdot \cos 2\pi f_0 t$

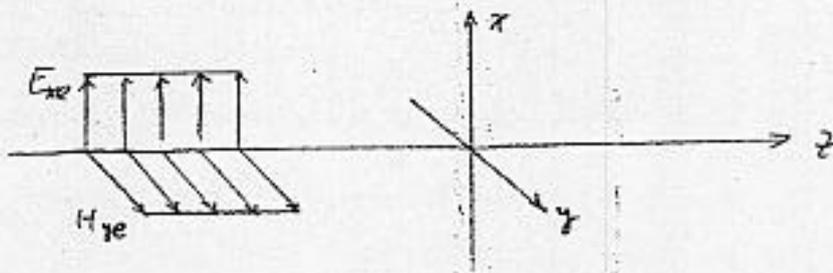
$$U_i = \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\phi(t) \cdot \cos 2\pi f_0 t \right)$$

$$= -\frac{\mu_0 a I_0}{2\pi} \cos 2\pi f_0 t \left[\omega \sin \omega t \cdot \ln \frac{x_0 + u_x t + a}{x_0 + u_x t} + \cos \omega t \cdot \frac{v_x \cdot a}{(x_0 + u_x t + a)(x_0 + u_x t)} \right]$$

$$- 2\pi f_0 \sin 2\pi f_0 t \cdot \frac{\mu_0 I_0 \cos \omega t}{2\pi} a \cdot \ln \frac{x_0 + u_x t + a}{x_0 + u_x t}$$

AU.

$$4.1. \quad \vec{H}_z = \frac{\vec{e}_z \times \vec{E}_z}{z_0} = \frac{\vec{e}_z \times E_{xe} \cdot \vec{e}_x}{z_0} = \frac{E_{xe}}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} \cdot \vec{e}_y$$



4.2. Randbedingungen:

die Tangentialkomponente von \vec{E} ist stetig, hier $E_t = E_x$

die Tangentialkomponente von \vec{H} ist stetig, hier $H_t = H_y$.

(Da die Felder keine Normalkomponenten bezüglich der Grenzfläche $z=0$ haben, erübrigen sich die Randbedingungen für B_n und D_n)

4.3. Wellenwiderstand:

$$\text{Vakuum. } z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

$$\text{Dielektrikum } z_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\epsilon_0}} = \frac{1}{2} z_1$$

Fresnelsche Formeln mit $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

$$\frac{E_r}{E_e} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} = \frac{\frac{1}{2} z_1 - z_1}{\frac{1}{2} z_1 + z_1} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{also } \vec{E}_r = -\frac{1}{3} E_{xe} \cdot \vec{e}_x$$

$$\frac{E_t}{E_e} = \frac{2z_2}{z_1 + z_2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} z_1}{z_1 + \frac{1}{2} z_1} = \frac{2}{3}$$

$$\vec{E}_t = \frac{2}{3} E_{xe} \cdot \vec{e}_x$$

Für die magnetischen Feldstärken:

$$\vec{H}_r = \frac{(-\vec{e}_z) \times (-\frac{1}{3} E_{xe} \cdot \vec{e}_x)}{z_1} = \frac{1}{3} \frac{E_{xe}}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} \vec{e}_y = \frac{1}{3} \vec{H}_e$$

$$\vec{H}_t = \frac{\vec{e}_z \times (\frac{2}{3} E_{xe} \cdot \vec{e}_x)}{z_2} = \frac{\frac{2}{3} E_{xe} \cdot \vec{e}_y}{\frac{1}{2} z_1} = \frac{4}{3} \frac{E_{xe}}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} \vec{e}_y = \frac{4}{3} \vec{H}_e$$

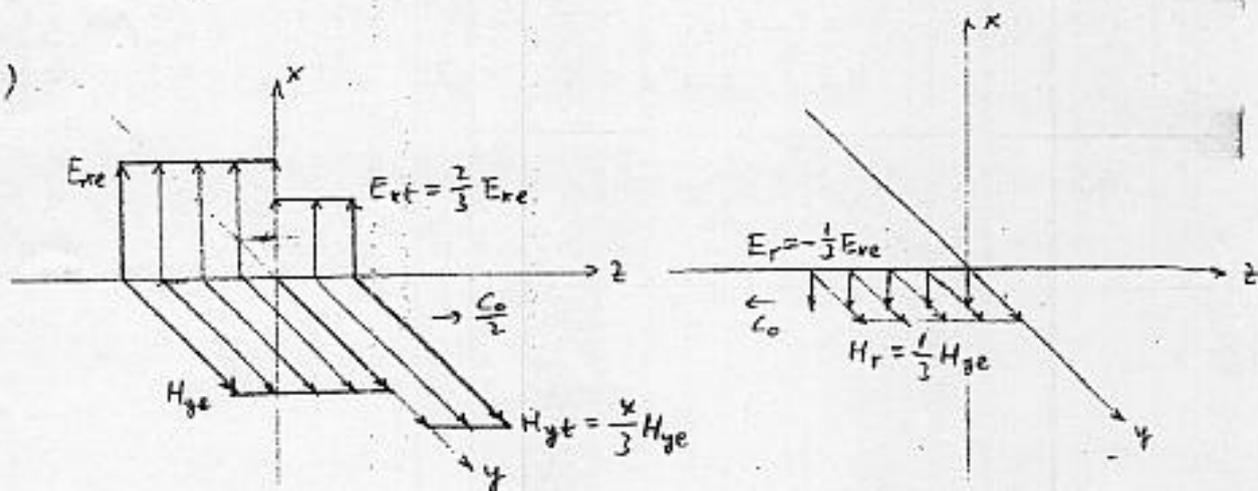
4.4 Die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Dielektrikum ist

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{4 \epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{2} c_1 \quad c_1 = c_0 = \text{Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.}$$

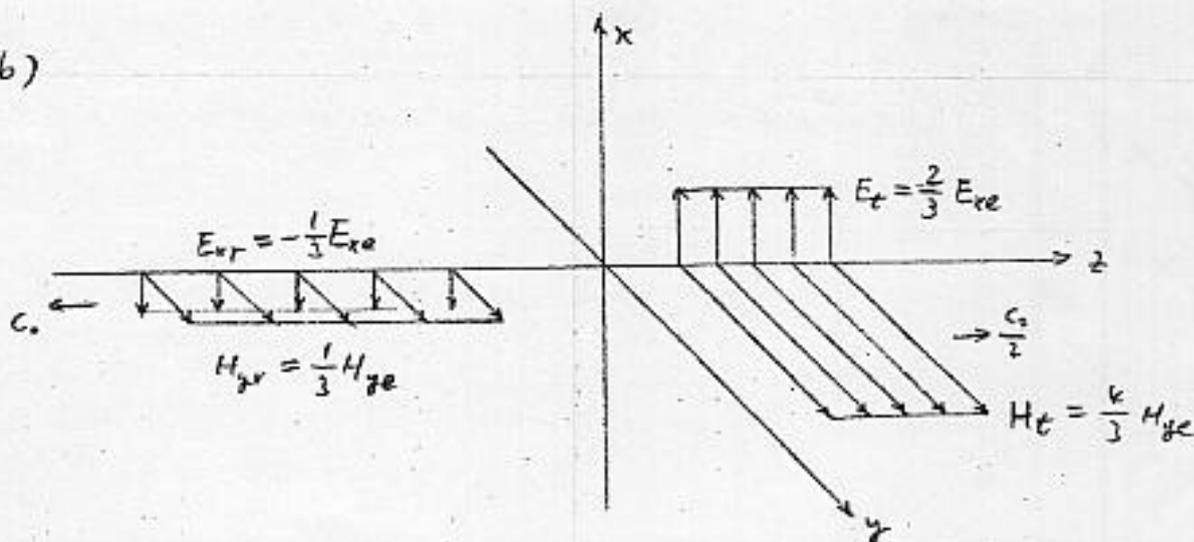
Da die Impulsdauer im Vakuum und im Dielektrikum gleich sein muss, $\tau = \frac{l_1}{c_1} = \frac{l_2}{c_2}$

$$\Rightarrow l_2 = \frac{c_2}{c_1} l_1 = \frac{1}{2} l_1.$$

4.5 a)



b)



4.2.1. Poynting-Vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$.

$$\vec{S}_e = E_{xe} \cdot \vec{e}_x \times \frac{E_{xe}}{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \vec{e}_y = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{xe}^2 \vec{e}_z$$

$$\vec{S}_r = -\frac{1}{3} E_{xe} \vec{e}_x \times \frac{1}{3} \frac{E_{xe}}{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \vec{e}_y = -\frac{1}{9} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{xe}^2 \vec{e}_z$$

$$\vec{S}_t = \frac{2}{3} E_{xe} \cdot \vec{e}_x \times \frac{4}{3} \frac{E_{xe}}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} \vec{e}_y = \frac{8}{9} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{xe}^2 \vec{e}_z$$

elektromagnetische Energiedichte $w = \frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}$

$$w_e = \frac{\epsilon_0}{2} E_{xe}^2 + \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{E_{xe}}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} \right)^2 = \epsilon_0 \cdot E_{xe}^2$$

$$w_r = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3} E_{xe} \right)^2 + \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{1}{3} \frac{E_{xe}}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} \right)^2 = \frac{1}{18} \epsilon_0 \cdot E_{xe}^2 + \frac{1}{18} \epsilon_0 \cdot E_{xe}^2 = \frac{1}{9} \epsilon_0 \cdot E_{xe}^2$$

$$w_t = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} E_{xe} \right)^2 + \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{4}{3} \frac{E_{xe}}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} \right)^2 = \frac{8}{9} \epsilon_0 \cdot E_{xe}^2 + \frac{8}{9} \epsilon_0 \cdot E_{xe}^2 = \frac{16}{9} \epsilon_0 \cdot E_{xe}^2$$

4.2.2. Man sieht $|\vec{S}_e| = |\vec{S}_r| + |\vec{S}_t|$

aber nicht $w_e = w_r + w_t$.

Dies rührt daher, daß die Pulse zwar die gleiche Zeitdauer haben, aber nicht die gleiche Länge.

Der Poyntingsche Vektor gibt nach Betrag und Richtung den momentanen Leistungsfluß an, so muß gelten $|\vec{S}_e| = |\vec{S}_r| + |\vec{S}_t|$.

Da der gebrochene Impuls um den Faktor 2 kürzer ist als der einfallende Impuls, ist seine Energiedichte natürlich verdoppelt.

Die Energie des einfallenden Pulses pro Flächeneinheit:

$$\frac{w_e}{A} = w_e \cdot l_0 = \epsilon_0 \cdot E_{xe}^2 \cdot l_0$$

analog erhält man für den reflektierten Impuls

$$\frac{W_r}{A} = W_r \cdot l_0 = \frac{1}{g} \epsilon_0 \cdot \vec{E}_{\text{ref}}^2 \cdot l_0$$

und für den gebrochenen Impuls:

$$\frac{W_t}{A} = W_t \cdot \frac{l_0}{v} = \frac{8}{g} \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}_{\text{ref}}^2 \cdot l_0.$$

Da: $W_e = W_r + W_t$ gilt, ist der Energieerhaltungsgesetz erfüllt die Gesamtenergie bleibt konstant.

Diplomhauptprüfung (SS 99)

Theoretische Elektrotechnik III

1. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
2. Außer Schreib- und Zeichenmaterial sind keine Hilfsmittel zugelassen (auch kein Taschenrechner)!
3. Die jeweils maximal erreichbare Punktzahl pro Teilaufgabe ist in Klammern am Ende jeder Teilaufgabe angegeben.
4. Es sind alle Aufgaben zu bearbeiten! Die Zusatzaufgaben sind optional.
5. Verwenden Sie ausschließlich die Ihnen ausgeteilten Doppelbögen; nur diese werden bewertet. Trennen Sie die Doppelbögen nicht. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Doppelbogen!
6. Schreiben Sie auf jeden Doppelbogen Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Aufgabe (inklusive der Teilaufgabe), die Sie bearbeiten!
7. Zeigen Sie den gewählten Lösungsweg auf. Geben Sie insbesondere Zwischenergebnisse und Begründungen an. Nur eindeutige Aussagen können bewertet werden!
8. Einige häufig gebrauchte Formeln finden Sie im Anhang.
9. VIEL ERFOLG!!!

1. Aufgabe: Elektrostatik (11 Punkte + 3 Zusatzpunkte)

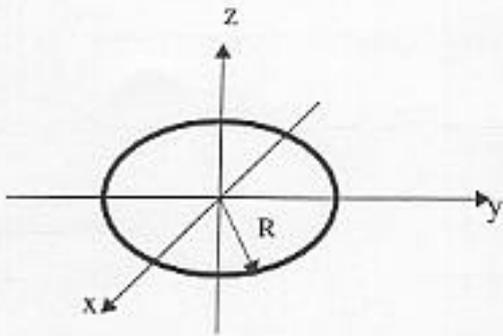


Abb. 1.1: Geometrie des Linienkreisrings

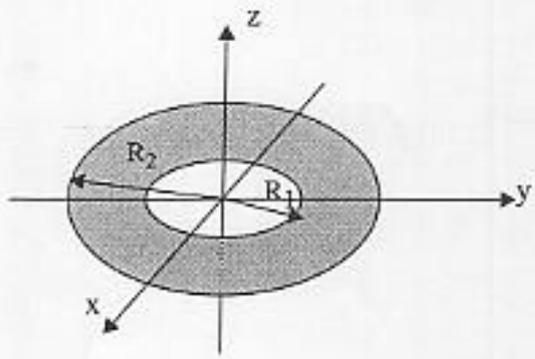


Abb. 1.2: Geometrie des Scheibekreisrings

Ein unendlich dünner **Linienkreisring** mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung befinde sich in der Ebene $z = 0$ (siehe Abb. 1.1). Die Gesamtladung $Q > 0$ sei gleichmäßig über den Linienkreisring verteilt.

1.1 Zeigen Sie, daß das Potential $\varphi(\vec{r})$ der Ladungsverteilung für einen Beobachtungspunkt mit den Zylinderkoordinaten $\vec{r}(\rho, \phi, z)$ durch einen Ausdruck der Form

$$\varphi(\rho, z) = C \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{A(\rho, z) - B(\rho) \cos \alpha}} d\alpha$$

gegeben ist. Bestimmen Sie die Konstante C, die Funktionen A(ρ, z) und B(ρ).

(3 Punkte)

1.2 Berechnen Sie das Potential $\varphi(\vec{r})$ längs der z-Achse.

(1 Punkt)

1.3 Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ längs der z-Achse

(3 Punkte)

Nun ist ein mit der Flächenladung σ homogen elektrisch geladener **Scheibekreisring** mit dem Innenradius R_1 und dem Außenradius R_2 zu untersuchen (siehe Abb.1.2).

1.4 Berechnen Sie das Potential $\varphi(\vec{r})$ und die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ auf der z-Achse.

Was ergibt sich näherungsweise für $\varphi(\vec{r})$ und $\vec{E}(\vec{r})$ für einen großen Abstand von der Scheibe?

(4 Punkte)

Zusatzaufgaben:

1.Z.1 Geben Sie die elektrische Feldstärke von 1.4 für die folgenden Spezialfälle an

a) $R_1 = 0, R_2 = R$

b) $R_1 = R, R_2 = \infty$

In beiden Fällen ist die Stelle $z = 0$ zu erforschen. Welcher Randbedingung entsprechen die Ergebnisse ?

(2 Punkte)

1.Z.2 Überlagern Sie die beiden Felder der Fälle a) und b). Was ist zu erwarten? Stimmt das Ergebnis mit der Erwartung überein?

(1 Punkte)

2. Aufgabe: Magnetfeld von zwei stromdurchflossenen Zylinderspulen (13 Punkte + 5 Zusatzpunkte)

Gegeben seien zwei **unendlich lange koaxiale Zylinderspulen** mit kreisförmigen Querschnitten, deren Radius jeweils R_1 und R_2 ist (siehe Abb. 2). Spule 1 sei mit n_1 Windungen pro Längeneinheit und Spule 2 mit n_2 Windungen pro Längeneinheit ideal dicht bewickelt. In der Spule 1 fließe der Strom I_1 , in der Spule 2 der Strom I_2 . Die Stromrichtungen sind wie im Bild gezeichnet! Es gilt $\mu = \mu_0$.

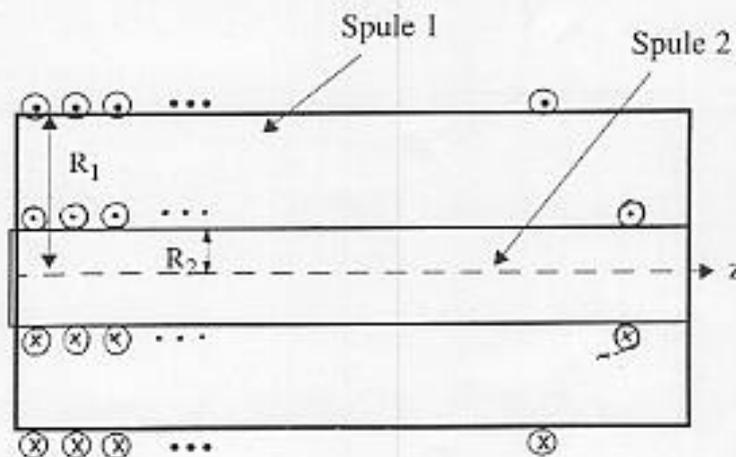


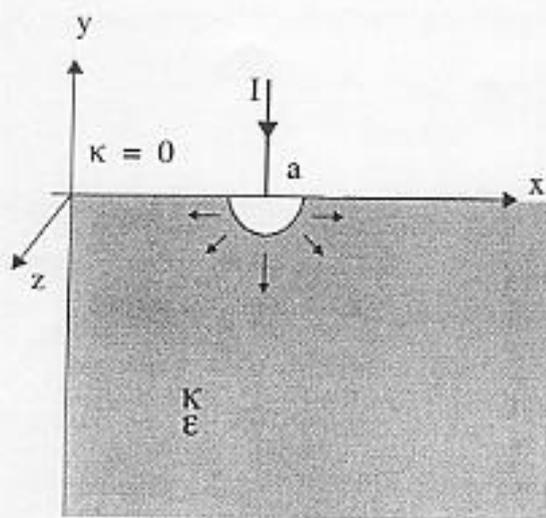
Abb 2: Koaxiale Zylinderspulen

- 2.1 Berechnen Sie das Magnetfeld \vec{H} im ganzen Raum.
Begründen Sie die einzelnen Rechenschritte! (6 Punkte)
- 2.2 Berechnen Sie den mit einer Windung der Spule 1 und der Spule 2 verketteten magnetischen Fluß Φ_1 und Φ_2 ! (2 Punkte)
- 2.3 Berechnen Sie die magnetische Feldenergie pro Längeneinheit W/l . (2 Punkte)
- 2.4 Bestimmen Sie die Selbstinduktivitätsbeläge l_{11}, l_{22} und den Gegeninduktivitätsbelag l_{21} . (3 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 2.Z.1 Leiten Sie aus dem Durchflutungsgesetz für stationäre Magnetfelder die Differentialgleichung für das **quellenfreie** Vektorpotential $\vec{V}_m(\vec{r})$ her! (2 Punkte)
- 2.Z.2 Für die obigen koaxialen Zylinderspulen hat das Vektorpotential nur eine azimutale Komponente $V_{m\phi}(\vec{r})$. Berechnen Sie diese Komponente $V_{m\phi}(\vec{r})$ im ganzen Raum. (3 Punkte)

3. Aufgabe: Strömungsfeld und elektrisches Feld eines Halbkugelerders in einem Viertelraum (13 Punkte + 4 Zusatzpunkte)



Der unendlich ausgedehnte Viertelraum ist mit einem leitfähigen Stoff (Leitfähigkeit $\kappa > 0$, Dielektrizitätszahl $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$; $\epsilon_r = \text{konst}$) ausgefüllt und mit einem nichtleitenden Medium verbunden. Ein Halbkugelerder mit Radius R , dessen ebener Oberflächenanteil in der x - z -Ebene liegt, wird an der Stelle $\vec{r} = (a, 0, 0)$ mit dem Gleichstrom I gespeist (vgl. Abb. 3). Es wird angenommen, daß $a \gg R$ gilt.

Abb. 3: Halbkugelerder im Viertelraum

- 3.1 Berechnen Sie die Stromdichte \vec{g} im leitfähigen Medium ($x \geq 0, y \leq 0$) und außerhalb des leitfähigen Mediums ($x < 0, y > 0$)! (3 Punkte)
- 3.2 Berechnen Sie die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ im Viertelraum $x \geq 0, y \leq 0$! (1 Punkte)
- 3.3 Berechnen Sie das elektrische Potential $\varphi(\vec{r})$ für $x \geq 0, y \leq 0$! (3 Punkte)
- 3.4 Skizzieren Sie qualitativ den Verlauf der elektrischen Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ in der Ebene $z = 0, x \geq 0, y \leq 0$. Erklären Sie das Verhalten des Feldstärkeverlaufs an den Grenzflächen anschaulich. (3 Punkte)
- 3.5 Berechnen Sie die Raumladungsdichte $\rho(\vec{r})$ im Medium (d. h. $x \geq 0, y \leq 0$)! (3 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 3.Z.1 Berechnen Sie die Flächenladungsdichte $\sigma(\vec{r})$ an den Grenzen! (2 Punkte)
- 3.Z.2 Der Strom I sei nun zeitabhängig, d. h. $I = i(t)$. Welches Verfahren erlaubt eine einfache Berechnung der Stromdichte \vec{g} und des elektrischen Feldes $\vec{E}(\vec{r})$? Geben Sie den Rechengang und die Grenzen des Verfahrens an! (2 Punkte)

4. Aufgabe: Harmonische elektromagnetische Wellen (13 Punkte + 6 Zusatzpunkte)

Gegeben sei das elektrische Feld $\vec{E}(z, t)$ einer **harmonischen** elektromagnetischen Welle, welche sich im **Vakuum** ausbreitet mit

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-jkz} \cdot \vec{e}_y; \quad E_0, \omega, k = \text{konst} > 0.$$

- 4.1 Um welche Wellenform handelt es sich! Leiten Sie Ihre Aussage mathematisch her! (2 Punkte)
- 4.2 In welche Richtung und mit welcher Geschwindigkeit breitet sich die Welle aus? Leiten Sie auch hier Ihre Aussage mathematisch her! (3 Punkte)
- 4.3 Berechnen Sie das zum elektrischen Feld $\vec{E}(z, t)$ gehörige magnetische Feld $\vec{H}(z, t)$! (4 Punkte)
- 4.4 Wie muß das magnetische Feld einer zweiten Welle beschaffen sein, damit sich der resultierende Feldvektor, der durch Überlagerung der beiden magnetischen Felder entsteht, in einer Ebene $z = \text{const}$ gegen den Uhrzeigersinn auf einer elliptischen Bahn, deren in x- und y-Richtung zeigenden Achsen jeweils a und b sind, dreht (bei Blickrichtung in positiver z-Richtung)? Beweisen Sie Ihre Aussage mathematisch! (4 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 4.Z.1 Berechnen Sie den Augenblickswert und die Richtung der Energieflußdichte (Leistungsdichte) der elektromagnetischen Welle! Geben Sie die Richtung der Energieflußdichte explizit an! (3 Punkte)
- 4.Z.2 Leiten Sie die zeitfreie Wellengleichung (Helmholtzgleichung) für die elektrische Feldstärke $\vec{E}(z, \omega)$ her.

(3 Punkte)

A1.

1.1. Ladung ist homogen verteilt $\Rightarrow dQ = \frac{Q}{2\pi R} \cdot ds = \frac{Q}{2\pi R} \cdot R d\phi' = \frac{Q}{2\pi} d\phi'$

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= s \vec{e}_s(\phi) + z \vec{e}_z \\ \vec{r}' &= R \vec{e}_s(\phi') \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{r} - \vec{r}' = s \vec{e}_s(\phi) - R \vec{e}_s(\phi') + z \vec{e}_z$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{s^2 + R^2 + z^2 - 2sR \cos(\phi - \phi')} \quad (0.5)$$

$$\begin{aligned} \varphi(r, \phi, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Ladung}} \frac{dQ}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{\sqrt{s^2 + R^2 + z^2 - 2sR \cos(\phi - \phi')}} \quad (1) \end{aligned}$$

Symmetrie ausnutzen: da Q rotationsymmetrisch, homogen verteilt ist, ist φ unabhängig von ϕ , d.h. $\varphi(r, \phi, z) = \varphi(r, z)$.

\Rightarrow setze: $\phi = 0$ im Nenner (0.5)

$$\varphi(r, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{\sqrt{s^2 + R^2 + z^2 - 2sR \cos\phi'}}$$

$$C = \frac{Q}{8\pi^2\epsilon_0} \quad (1)$$

$$A(r, z) = s^2 + R^2 + z^2 \quad B(r) = 2sR$$

1.2. auf z-Achse: $s = 0$

$$\varphi(0, z) = \frac{Q}{8\pi^2\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{\sqrt{R^2 + z^2 - 0}} = \frac{Q}{8\pi^2\epsilon_0} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} \quad (0.5)$$

1.3.
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Ladung}} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') dQ}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$= \frac{Q}{8\pi^2\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{s \vec{e}_s(\phi) - R \vec{e}_s(\phi') + z \vec{e}_z}{\left(\sqrt{s^2 + R^2 + z^2 - 2sR \cos(\phi - \phi')}\right)^3} d\phi' \quad (1)$$

Symmetrie $\Rightarrow \phi = 0$ im Nenner setzen $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(r, z)$

$$\vec{e}_s(\phi) = \vec{e}_x \quad \vec{e}_s(\phi') = \cos\phi' \cdot \vec{e}_x + \sin\phi' \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{E}(s, z) = \frac{Q}{8\pi^2 \epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{s \vec{e}_r - R \cos\phi' \vec{e}_x - R \sin\phi' \vec{e}_y + z \vec{e}_z}{(s^2 + R^2 + z^2 - 2sR \cos\phi')^{3/2}} d\phi' \quad (0.5)$$

Längs der z-Achse: $s = 0$.

$$\begin{aligned} \vec{E}(0, z) &= \frac{Q}{8\pi^2 \epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{-R \cos\phi' \vec{e}_x - R \sin\phi' \vec{e}_y + z \vec{e}_z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\phi' \\ &= \frac{Q}{8\pi^2 \epsilon_0} \frac{z \vec{e}_z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot 2\pi = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(od.) } \vec{E}(0, z) &= -\text{grad. } \varphi(0, z) \quad (1) \\ &= - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{s} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \varphi(0, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{z} \frac{z^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \end{pmatrix} \quad (1) \end{aligned}$$

1.4

$$dQ = \sigma \cdot 2\pi s \cdot ds \quad (0.5)$$

Ergebnis von 1.1 nutzen: $Q \rightarrow dQ$, $R \rightarrow s$.

$$\begin{aligned} \vec{E}(0, z) &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{z \vec{e}_z}{(s^2 + z^2)^{3/2}} \sigma \cdot 2\pi s \cdot ds \quad (0.5) \\ &= \frac{\sigma \cdot z}{2\epsilon_0} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{s \vec{e}_z}{(s^2 + z^2)^{3/2}} ds \\ &= \frac{\sigma \cdot z \vec{e}_z}{2\epsilon_0} \left(-\frac{1}{\sqrt{s^2 + z^2}} \right) \Big|_{R_1}^{R_2} \\ &= \frac{\sigma \cdot z \vec{e}_z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{R_1^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} \right] \quad (1) \end{aligned}$$

für $z \gg R_1$ und $z \gg R_2$: $\frac{1}{\sqrt{R_1^2 + z^2}} \approx \frac{1}{|z|}$, $\frac{1}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} \approx \frac{1}{|z|}$

$$\vec{E}(0, z) \approx 0 \quad (0.5)$$

$$\varphi(0, z) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \sigma \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sqrt{\rho^2 + z^2} \Big|_{R_1}^{R_2} \quad (1)$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R_2^2 + z^2} - \sqrt{R_1^2 + z^2} \right)$$

für $z \gg R_1$ und R_2

$$\varphi(0, z) \approx 0 \quad (0,5)$$



1.2.1 a) $R_1 = 0, R_2 = R$

$$\vec{E}(0, z) = \frac{\sigma \cdot z}{2 \epsilon_0} \vec{e}_z \cdot \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

 $z > 0, \vec{E}(0, z) = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \frac{z}{|z|} \vec{e}_z$ (0.4)

$$\vec{E}(0, z_{0+}) = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \vec{e}_z$$

$$\vec{E}(0, z_{0-}) = -\frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \vec{e}_z$$

$$\epsilon_0 \cdot (E(0, z_{0+}) - E(0, z_{0-})) = \epsilon_0 \cdot \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \sigma$$

Das entspricht der Randbeding.
 $D_{n1} - D_{n2} = \sigma$

b) $R_1 = R, R_2 = \infty$

$$\vec{E}(0, z) = \frac{\sigma \cdot z \vec{e}_z}{2 \epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$
 (0.5)
 $z=0 \vec{E}(0, 0) = 0$ (0.6)

1.2.2
$$\vec{E}(0, z) = \frac{\sigma \cdot z \vec{e}_z}{2 \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

$$= \frac{\sigma \cdot z \cdot \vec{e}_z}{2 \epsilon_0} \cdot \frac{1}{|z|}$$

$$= \begin{cases} -\frac{\sigma}{2 \epsilon_0} & \text{für } z < 0 \\ +\frac{\sigma}{2 \epsilon_0} & \text{für } z > 0 \end{cases}$$
 (0.5)

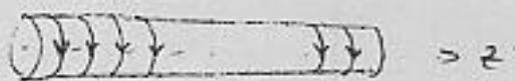
$$\vec{E}(0, z=0+) - \vec{E}(0, z=0-) = +\frac{\sigma}{2 \epsilon_0} - \left(-\frac{\sigma}{2 \epsilon_0}\right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$
 (0.5)

Das ist genau der Gauß-Ansatz.

2.1. Feld einer unendlich langen, ideal dicht gewickelten Spule

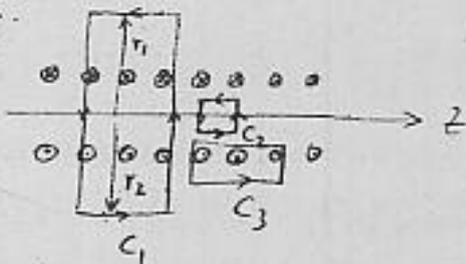
Feld unabhängig von z und φ .

Feld hat nur H_z -Komponente (0.5)



geschlossene Weg C_1 für Außenfeldberechnung.

$$\oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{s} = [H_{za}(r_1) - H_{za}(r_2)] \cdot ds = 0$$



$\Rightarrow H_{za}$ hängt nicht vom Radius ab (0.5)

analog: H_{zi} hängt nicht vom Radius ab (0.5)

H_{za} muss 0 sein, weil für $r \rightarrow \infty$ $H_{za} = 0$ (1.0)

geschlossene Kurve C_3 für H_{zi} berechnen.

$$H_{zi} ds = n ds \cdot I \quad (1)$$

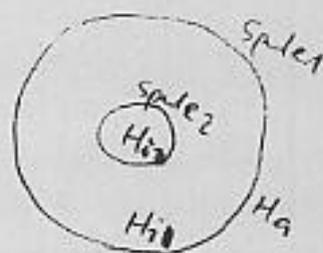
$$\Rightarrow H_{zi} = nI$$

$$H_{zi1} = n_1 I_1$$

$$H_{zi2} = n_2 I_2 \quad (0.5)$$

$$\Rightarrow H_{zi} = n_1 I_1 \quad (1)$$

$$H_{zi} = n_1 I_1 + n_2 I_2 \quad (1)$$



Biot-Savart'sches Gesetz.

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$2.2. \quad \Phi_1 = \vec{B} \cdot \vec{A} = \vec{B}_{i1} \cdot (\pi R_1^2 - \pi R_2^2) + \vec{B}_{i2} \cdot \pi R_2^2 \quad (1)$$

$$= \mu_0 n_1 I_1 (\pi R_1^2 - \pi R_2^2) + \mu_0 (n_1 I_1 + n_2 I_2) \pi R_2^2$$

$$\Phi_2 = \vec{B}_{i2} \pi R_2^2 = \mu_0 (n_1 I_1 + n_2 I_2) \pi R_2^2 \quad (1)$$

$$n_1 \Phi_1 = \frac{L_{11}}{l} \cdot I_1 + \frac{L_{12}}{l} \cdot I_2 \Rightarrow \frac{L_{11}}{l} = \mu_0 \pi n_1 (R_1^2 - R_2^2) + \mu_0 n_1 \pi R_2^2 = \mu_0 \pi n_1^2 R_1^2$$

$$\frac{L_{12}}{l} = \mu_0 n_1 n_2 \pi R_2^2$$

$$\frac{L_{22}}{l} = \mu_0 n_2^2 R_2^2$$

$$2.3. \frac{W}{l} = \frac{1}{2} \int B H dV \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \mu_0 H_{i1}^2 \cdot \pi (R_1^2 - R_2^2) + \frac{1}{2} \mu_0 H_{i2}^2 \cdot \pi R_2^2$$

$$= \frac{1}{2} \mu_0 \left[(n_1 I_1)^2 \pi (R_1^2 - R_2^2) + (n_1 I_1 + n_2 I_2)^2 \pi R_2^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \mu_0 \pi \left[(n_1^2 R_1^2 - n_1^2 R_2^2 + n_1^2 R_2^2) I_1^2 + \right.$$

$$\left. (n_2^2 R_2^2) I_2^2 + 2 n_1 n_2 R_2^2 I_1 I_2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \mu_0 \pi \left[n_1^2 R_1^2 I_1^2 + 2 n_1 n_2 R_2^2 I_1 I_2 + n_2^2 R_2^2 I_2^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{L_{11}}{l} I_1^2 + \frac{L_{12}}{l} I_1 I_2 + \frac{1}{2} \frac{L_{22}}{l} I_2^2 \quad (1)$$

$$(2.4) \Rightarrow \frac{L_{11}}{l} = \mu_0 \pi n_1^2 R_1^2 \quad (1)$$

$$\frac{L_{12}}{l} = \mu_0 \pi n_1 n_2 R_2^2 \quad (1)$$

$$\frac{L_{22}}{l} = \mu_0 \pi n_2^2 R_2^2 \quad (1)$$

2.2.1. Maxwell'sche Gl. differential Form:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (0.5)$$

$$\text{stat. Magnetfelder} \Rightarrow \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \quad (0.5)$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{H} = \vec{j}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \Rightarrow \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (1)$$

$$\text{Einführen: } \vec{B} = \text{rot } \vec{V}_m \quad (2)$$

$$(2) \rightarrow (1): \text{rot}(\text{rot } \vec{V}_m) = \mu_0 \vec{j}$$

$$\text{Graesmann: } \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}_m) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_m) \cdot \vec{\nabla} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{V}_m = \mu_0 \vec{j}$$

$$\text{quellfrei } \vec{V}_m \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_m = \text{div } \vec{V}_m = 0 \quad (0.5)$$

$$(3): -(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{V}_m = -\Delta \vec{V}_m = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \Delta \vec{V}_m = -\mu_0 \vec{j} \quad (0.5)$$

2.2.2.

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int \text{rot } \vec{V}_m \cdot d\vec{A} \xrightarrow{\text{Stokes}} \Phi = \oint \vec{V}_m \cdot d\vec{s} = V_{m\phi} \cdot 2\pi r$$

$$\Rightarrow V_{m\phi} = \frac{\Phi}{2\pi r} = \frac{\mu_0 A \cdot H}{2\pi r} \quad (1.5)$$

$$R_2: V_{m\phi R_2} = \frac{\mu_0 \cdot \pi r^2 \cdot H_{i2}}{2\pi r} = \frac{\mu_0 \cdot \pi r^2 \cdot (n_1 I_1 + n_2 I_2)}{2\pi r}$$

$$= \frac{\mu_0 r (n_1 I_1 + n_2 I_2)}{2} \quad (0.5)$$

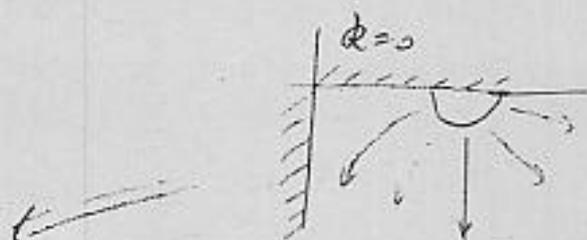
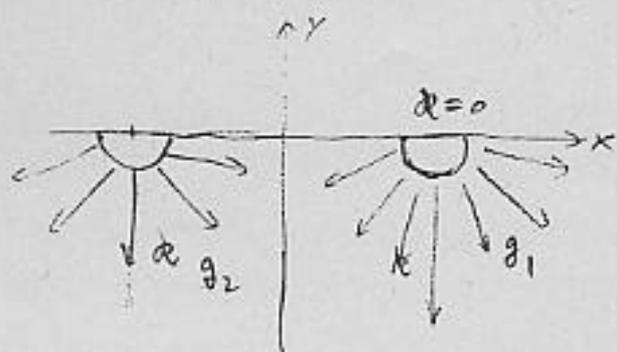
$$r < R_1: V_{m\phi r} = \frac{\mu_0 [H_{i2} \cdot \pi R_2^2 + H_{i1} \cdot \pi (r^2 - R_2^2)]}{2\pi r}$$

$$= \frac{\mu_0 [(n_1 I_1 + n_2 I_2) R_2^2 + n_1 I_1 r^2 - n_1 I_1 R_2^2]}{2r} = \frac{\mu_0}{2r} (n_2 I_2 R_2^2 + n_1 I_1 r^2) \quad (0.5)$$

$$r > R_1: V_{m\phi A} = \frac{\mu_0 (H_{i2} \cdot \pi R_2^2 + H_{i1} \cdot \pi R_1^2)}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2r} (n_1 I_1 R_1^2 + n_2 I_2 R_2^2) \quad (0.5)$$

A3.

3.1. Spiegelmethode: (0,5)



Weil für $z > 0$, $\alpha = 0$ ist, gibt keine Stromdichte, $\vec{j}(z > 0) = 0$.

Der Strom wird radial von Halbkugeloberfläche nach außen fließen

$$j = \frac{I}{2\pi r^2}$$

Feld \vec{j} eines Erdens im Ursprung: $\vec{j} = \frac{I}{2\pi r^2} \vec{e}_z = \frac{I}{2\pi} \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ für $z \leq 0$ (0,5)

Verschiebung nach $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{j}_1(x, y, z) = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x-a \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

für $z \leq 0$.

$$\vec{j}_2(x, y, z) = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x+a \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Im leitfähigen Medium:

$$\vec{j}(x, y, z) = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$$

$$= \frac{I}{2\pi} \left[\frac{\begin{pmatrix} x-a \\ y \\ z \end{pmatrix}}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{\begin{pmatrix} x+a \\ y \\ z \end{pmatrix}}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right] \quad (0,5)$$

auperhalb des leitfähigen Mediums: $\vec{j} = 0$ weil $\alpha = 0$. (0,5)

Kontrolle: (1) für $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow (x-z\text{-Ebene})$

$$\vec{g}(x, 0, z) = \frac{I}{2\pi} \left[\frac{\begin{pmatrix} x-a \\ 0 \\ z \end{pmatrix}}{[(x-a)^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{\begin{pmatrix} x+a \\ 0 \\ z \end{pmatrix}}{[(x+a)^2 + z^2]^{3/2}} \right]$$

$$g_x = g_y = 0.$$

② für $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow (y-z\text{-Ebene}).$

$$\begin{aligned} \vec{g}(0, y, z) &= \frac{I}{2\pi} \left[\frac{\begin{pmatrix} -y \\ 0 \\ z \end{pmatrix}}{[a^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{\begin{pmatrix} y \\ 0 \\ z \end{pmatrix}}{[a^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right] \\ &= \frac{I}{\pi} \cdot \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}}{[a^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

$$g_x = g_y = 0.$$

3.2. $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \vec{g}$ (0.5)

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{I}{2\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{\begin{pmatrix} x-a \\ y \\ z \end{pmatrix}}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{\begin{pmatrix} x+a \\ y \\ z \end{pmatrix}}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right] \quad (0.5)$$

3.3. $\vec{E} = -\text{grad}\varphi = - \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix}$ (0)

$$E_x = \frac{I}{2\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{x-a}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{x+a}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right]$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = - \int E_x dx + C_1(y, z)$$

$$= - \frac{I}{2\pi\epsilon_0} \cdot \left[\int \frac{x-a}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} dx + \int \frac{x+a}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} dx \right] + C_1(y, z)$$

$$= - \frac{I}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{d[(x-a)^2 + y^2 + z^2]}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{d[(x+a)^2 + y^2 + z^2]}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right] + C_1(y, z)$$

$$= - \frac{I}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot \left[\frac{1}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} + \frac{1}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \right] + C_1(y, z).$$

$$= \frac{I}{2\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} + \frac{1}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \right] + C_1(y, z). \quad (0.5)$$

analog. $\varphi_2 = -\int E_y dy + C_2(x, z)$

$$= \frac{1}{2\pi\kappa} \left[\frac{1}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{1}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right] + C_2(x, z) \quad (0.5)$$

$$\varphi_3 = -\int E_z dz + C_3(x, y) \quad (0.5)$$

$$= \frac{1}{2\pi\kappa} \left[\frac{1}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{1}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right] + C_3(x, y)$$

$$\Rightarrow \varphi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi\kappa} \left[\frac{1}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{1}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right] \quad (0.5)$$

alternativ:

elek. Felder und Potential von ein Punktladung:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad \varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

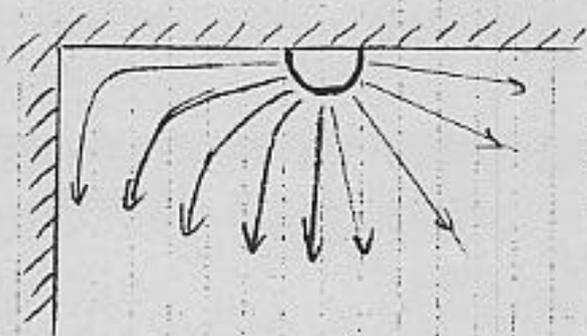
$\vec{E}(\vec{r})$ von 3.2 ist analog zur Punktladung: $Q \rightarrow 2I$
 $\epsilon_0 \rightarrow \kappa$

$$\vec{r}': \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi\kappa} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= \frac{1}{2\pi\kappa} \left[\frac{1}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{1}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right]$$

3.4



in der Grenze $x > 0, y = 0, z = 0$

$$\vec{E}(x, 0, 0) = \frac{1}{2\pi\kappa} \left[\frac{\begin{pmatrix} x-a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{(x-a)^3} + \frac{\begin{pmatrix} x+a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{(x+a)^3} \right] \text{ hat nur } x\text{-Komponente.} \quad (0.5)$$

in der Grenze $x=0$ $y < 0$, $z=0$.

$$\vec{E}(0, y, 0) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{\begin{pmatrix} -a \\ y \\ 0 \end{pmatrix}}{[a^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{\begin{pmatrix} a \\ y \\ 0 \end{pmatrix}}{[a^2 + y^2]^{3/2}} \right] \quad (0.5)$$

$$= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}}{[a^2 + y^2]^{3/2}} \quad \text{hat nur } y\text{-Komponente.}$$

3.5. $\rho = \text{div } \vec{D} = \text{div}(\epsilon \cdot \vec{E}) = \epsilon \cdot \text{div } \vec{E} = \epsilon \cdot \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] \quad (0.5)$

3.2.1. $D_{n1} - D_{n2} = \sigma \quad (0.5)$

in der Grenze $x > 0$, $y = 0$.

$$\epsilon \cdot E_y|_{y=0^-} - \epsilon \cdot E_y|_{y=0^+} = \sigma \quad (0.5)$$

σ kein Feld, da $\vec{g} = 0$ außerhalb des Viertelraums.

aus 3.1) $g_y = 0|_{y=0} \Rightarrow E_y|_{y=0} = 0 \Rightarrow \sigma = 0 \quad (0.5)$

Analog in der Grenz $x=0$, $y < 0$.

$$\epsilon \cdot E_x|_{x=0^+} - \epsilon \cdot E_x|_{x=0^-} = \sigma \quad (0.5)$$

aus 3.1) $g_x|_{x=0^+} = 0 \Rightarrow E_x|_{x=0^+} = 0 \Rightarrow \sigma = 0.$

3.2.2. Quasistationär Näherung: bei nicht starker zeitlicher Änderungen kann Verschiebungsstrom $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ vernachlässigt werden.

Maxwellsche Gl. für Quasist. Näherung: (1)

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

\Rightarrow durch Vernachlässigung des Verschiebstroms:

\vec{j} wie 3.1 berechnen, aber \vec{j} ist zeitabhängig \Rightarrow

\vec{E} ist zeitabhängig. Rechnen wie 3.2. (1)

4.1 Betrachte für feste Zeitpunkt $t = t_0 = \text{konst.}$, Punkte konstanter Phase.
d.h. $e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \text{konst.}$ (1)

$$e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = C_1 \Rightarrow -j\vec{k}\cdot\vec{r} = C_2$$

od. $\vec{k}\cdot\vec{r} = C$ Normalenform der Vektoralgebra einer Ebene

\Rightarrow Ebene Welle (1)

4.2 Ausbreitungsrichtung: Betrachte Fläche konstanter Phasen (1)

$$\Rightarrow \varphi(\omega t - kz) = C$$

$$\Rightarrow z = \frac{\omega t}{k} - C'$$

Geschwindigkeit $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\omega}{k} > 0 \Rightarrow$ in pos. z -Richtung (1)

4.3 2. Maxwell'sche Gleichung: $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ (1)

harmonische Felder $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H} \quad (1)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-jkz} & 0 \end{vmatrix} = -j\omega\mu_0 \vec{H}$$

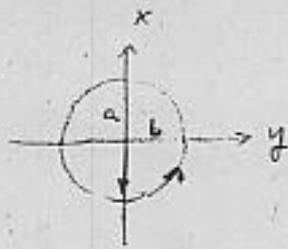
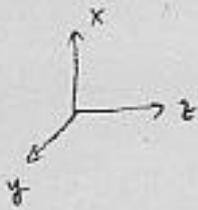
$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \left(-\frac{\partial}{\partial z} (E_0 e^{j\omega t} e^{-jkz}) \vec{e}_x \right) \quad (1)$$

$$= -\frac{1}{j\omega\mu_0} \cdot E_0 \cdot jk \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-jkz} \vec{e}_x$$

$$= -\frac{kE_0}{\omega\mu_0} e^{j\omega t} \cdot e^{-jkz} \vec{e}_x \quad (1) \quad \text{mit } k = 2\pi f \cdot \frac{1}{c} = \omega \cdot \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$= -\frac{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E_0}{\omega\mu_0} e^{j\omega t} \cdot e^{-jkz} \vec{e}_x = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-jkz} \vec{e}_x$$

k.4.



Berechnete Welle hat x-Richtung.

⇒ gesuchte Welle hat y-Richtung

Betrachte $z=0$.

1. $\vec{h} = \text{Re}\{\vec{H}\} = -\frac{kE_0}{\omega\mu_0} \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_x$ für $t=0$ \vec{h}_x ist min.

Zweite Welle h_y muss 0 sein

2. bei $\omega t = \frac{\pi}{2}$ muss $\vec{h}_x = 0$ sein.

h_y muss max.

h_y ändert sich gemäß $\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$.

Ellipsebahn ⇒ $\frac{|h_y|}{|h_x|} = \frac{b}{a}$

$$\vec{H}_y = \frac{b}{a} \cdot \frac{kE_0}{\omega\mu_0} \cdot e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} \cdot e^{-jkz} \cdot \vec{e}_y$$

$$= \frac{bkE_0}{a\omega\mu_0} \cdot e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2} - kz)} \cdot \vec{e}_y$$

in Ebene $z=0$.

$$\vec{h}_x = -\frac{kE_0}{\omega\mu_0} \cos \omega t \vec{e}_x$$

$$\vec{h}_y = \frac{bkE_0}{a\omega\mu_0} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \vec{e}_y = \frac{bkE_0}{a\omega\mu_0} \sin \omega t \vec{e}_y$$

Bahnkurve: ωt als Parameter.

$$\cos^2 \omega t = \left(-\frac{\omega\mu_0}{kE_0} h_x\right)^2 \quad \sin^2 \omega t = \left(\frac{a\omega\mu_0}{bkE_0} h_y\right)^2$$

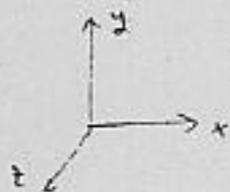
$$\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1 \Rightarrow \left(\frac{\omega\mu_0}{kE_0}\right)^2 (h_x^2 + \frac{a^2}{b^2} h_y^2) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{h_x^2}{a^2} + \frac{h_y^2}{b^2} = \left(\frac{kE_0}{a\omega\mu_0}\right)^2$$

⇒ Bahnkurve ist eine Ellipse.

4.2.1. Energiefloedichte = Poyntingsche Vektor \vec{S}

$$\begin{aligned}\vec{S}(\vec{r}, t) &= \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re}\{\vec{E}\} \times \operatorname{Re}\{\vec{H}\} \quad (1) \\ &= E_0 \cdot \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y \times \left(-\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0\right) \cos(\omega t - kz) \cdot \vec{e}_x \\ &= +E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \cos^2(\omega t - kz) \cdot \vec{e}_z \quad (1)\end{aligned}$$



Betrag zeit- und ortsabhängig = $E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos^2(\omega t - kz)$ (0.5)

Richtung: positive z-Richtung (0.5)

4.2.2. Maxwell'schen Gleichungen:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (3) \quad \checkmark \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = 0 \quad (4)$$

Vakuum = $\kappa = 0$, $\epsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$, freie Ladung $\rho = 0$

$$\Rightarrow \vec{j} = \kappa \vec{E} = 0$$

$$(1): \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$(4): \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{D}) = \frac{\partial}{\partial t} (0) = 0$$

Gesucht ist Wellengleichung für $\vec{E}(\vec{r}, t) \Rightarrow \vec{H}$ ist zu eliminieren.

$$\text{aus (1): } \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \vec{H}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = -\operatorname{rot} \left(\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}\right) = +\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{H})$$

$$= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \vec{E})}_{\operatorname{div} \vec{E}} - \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})}_{0} \vec{E}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \operatorname{div} \vec{D} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

zeitfreie Wellengleichung durch Fouriertransformation:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \longleftrightarrow (j\omega)^2 = -\omega^2 \quad \vec{E}(z, t) \longleftrightarrow \vec{E}(z, \omega)$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E}(z, \omega) + \mu_0 \epsilon_0 \cdot \omega^2 \cdot \vec{E}(z, \omega) = 0$$

Diplomhauptprüfung (WS 98/99)

Theoretische Elektrotechnik III

(Elektromagnetische Feldtheorie)

1. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
2. Außer Schreib- und Zeichenmaterial sind keine Hilfsmittel zugelassen (auch kein Taschenrechner)!
3. Die jeweils maximal erreichbare Punktzahl pro Teilaufgabe ist in Klammern am Ende jeder Teilaufgabe angegeben.
4. Es sind alle Aufgaben zu bearbeiten! Die Zusatzaufgaben sind optional.
5. Verwenden Sie ausschließlich die Ihnen ausgeteilten Doppelbögen; nur diese werden bewertet. Trennen Sie die Doppelbögen nicht. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Doppelbogen!
6. Schreiben Sie auf jeden Doppelbogen Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Aufgabe (inklusive der Teilaufgabe), die Sie bearbeiten!
7. Zeigen Sie den gewählten Lösungsweg auf. Geben Sie insbesondere Zwischenergebnisse und Begründungen an. Nur eindeutige Aussagen können bewertet werden!
8. Einige häufig gebrauchte Formeln finden Sie im Anhang.
9. **VIEL ERFOLG!!!**

1. Aufgabe: 2 Punktladungen vor einer ideal leitfähigen Ebene (12 Punkte + 6 Zusatzpunkte)

Gegeben ist eine unendlich gut leitende, geerdete Ebene, die mit der x - y -Ebene übereinstimmt, siehe Abb. 1.1. Im Halbraum $z > 0$ befinden sich 2 Punktladungen $+Q$ und $-Q$. Die Punktladungen liegen in der Ebene $y = 0$ im Abstand d von der x -Achse und sind symmetrisch zur z -Achse ausgerichtet (mit den Abständen $\pm a$), siehe Abb. 1.1. Die Dielektrizitätszahl sei überall ϵ_0 !

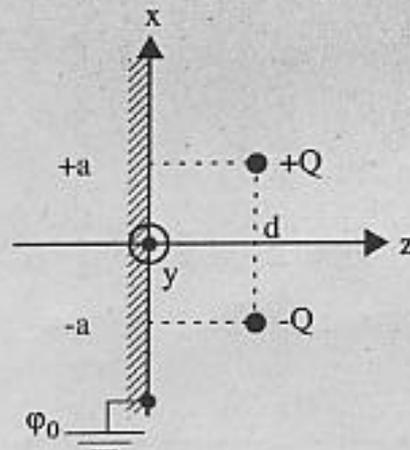


Abb. 1.1 Zwei Punktladungen vor unendlich gut leitender Ebene

- 1.1 **Skizzieren Sie qualitativ** den Verlauf der elektrischen Feldstärke \vec{E} in der Halbebene $y = 0$ und $z \geq 0$. **Erklären Sie** das Verhalten des Feldstärkeverlaufes bei $z = 0^+$! (2 Punkte)
- 1.2 **Berechnen Sie** das elektrische Potential $\varphi(x, y, z)$ im **gesamten** Raum (mit Begründung)! Es gilt: Erdpotential = Bezugspotential. (4 Punkte)
- 1.3 **Berechnen Sie** das elektrische Feld $\vec{E}(x, y, z)$ in der Nähe der leitenden Ebene, also bei $z = 0^+$! (3 Punkte)
- 1.4 **Berechnen Sie** die auf der leitenden Ebene bei $z = 0$ beeinflusste Flächenladungsdichte $\sigma(x, y)$! (3 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 1.Z.1 **Berechnen Sie** die auf der leitenden Ebene beeinflusste Gesamtladung Q_{ges} ! **Begründen Sie** das Ergebnis! (3 Punkte)
- 1.Z.2 **Leiten Sie** die Poissonsche Gleichung für das elektrische Potential φ her! (3 Punkte)

2. Aufgabe: Kapazität von Kugelkondensatoren (12 Punkte + 3 Zusatzpunkte)

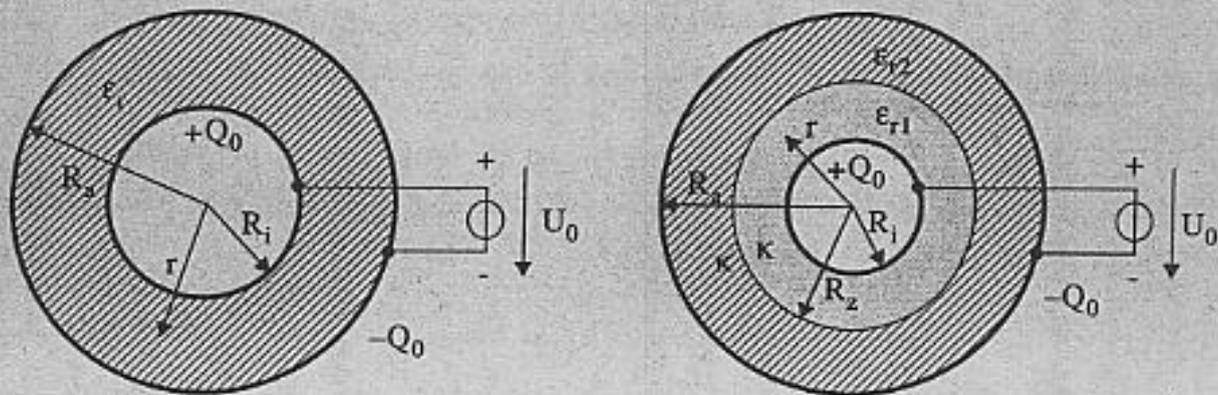


Abb. 2.1: Kugelkondensator mit einem Dielektrikum Abb. 2.2: Kugelkondensator mit 2 Dielektrika

Abb. 2.1 zeigt einen Kugelkondensator, dessen innere ($r = R_1$) und äußere ($r = R_2$) Elektrode durch eine ideale Spannungsquelle der Spannung U_0 auf die Ladung $+Q_0$ (bzw. $-Q_0$) aufgeladen werden. Zwischen beiden unendlich gut leitenden Elektroden befindet sich ein Dielektrikum mit der relativen Dielektrizitätszahl $\epsilon_r = \text{konst.}$

- 2.1 Berechnen Sie die Kapazität des **idealen** Kugelkondensators nach Abb. 2.1 (als Funktion der Geometriegrößen und der Dielektrizitätszahl)! (3 Punkte)
- 2.2 Das Dielektrikum sei jetzt **inhomogen** und es gelte: $\epsilon_r = k \cdot \frac{1}{r^2}$; $k = \text{konst.}$ für $r \in [R_1, R_2]$. Berechnen Sie die neue Kapazität des Kugelkondensators nach Abb. 2.1 (als Funktion der Geometriegrößen und der Dielektrizitätszahl)! (2 Punkte)
- 2.3 Nun gelte wieder $\epsilon_r = \text{konst.}$, aber das Dielektrikum sei **verlustbehaftet**, d. h. es besitzt die Leitfähigkeit $\kappa > 0$. Berechnen Sie abermals die Kapazität des Kugelkondensators nach Abb. 2.1 (als Funktion der Geometriegrößen und der Dielektrizitätszahl)! (5 Punkte)
- 2.4 Begründen Sie den Unterschied in der Vorgehensweise zur Berechnung der Kapazität nach Teilaufgabe 2.1 und 2.3! (2 Punkte)

Zusatzaufgabe:

- 2.Z.1 Die Dielektrika mit ϵ_{r1} und ϵ_{r2} ($\epsilon_{r1} \neq \epsilon_{r2}$) nach Abb. 2.2 sind **verlustbehaftet**, d. h. sie haben beide die **gleiche** Leitfähigkeit $\kappa > 0$. Berechnen Sie die Kapazität dieses nichtidealen, 2-schichtigen Kugelkondensators nach Abb. 2.2 (als Funktion der Geometriegrößen und der Dielektrizitätszahlen)! (3 Punkte)

3. Aufgabe: Magnetfeld und Induktivität einer Koaxialleitung (14 Punkte + 3 Zusatzpunkte)

In Abb. 3.1 ist die Frontansicht bei $z = 0$ auf eine Koaxialleitung aus Kupfer der Länge L mit dem inneren Radius r_1 und den äußeren Radien r_2 und r_3 zu sehen. Die z -Achse ist die Symmetrieachse, siehe Abb. 3.2. Der Raum zwischen r_1 und r_2 sei mit Luft gefüllt. Im inneren Leiter fließe der homogen verteilte Wechselstrom $i_1(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t)$ (mit I_0 und $\omega = \text{konst.}$) in positive z Richtung (Hinleiter) und im Außenleiter fließe der selbe, homogen verteilte Wechselstrom $i_2(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t)$ in negative z Richtung (Rückleiter). Es gelte die Quasistationäre Näherung und im gesamten Raum gilt: $\mu = \mu_0$.

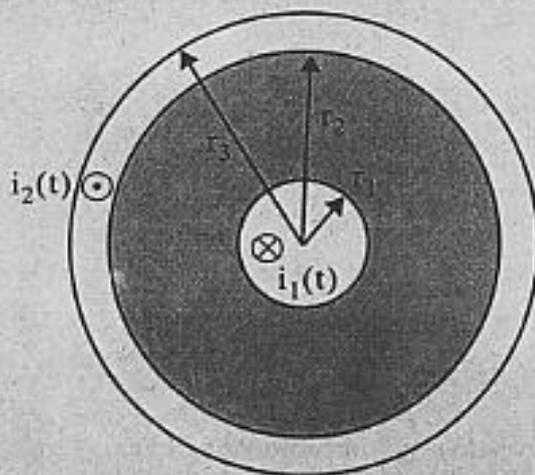


Abb. 3.1 Schnittbild durch den Koaxialleiter

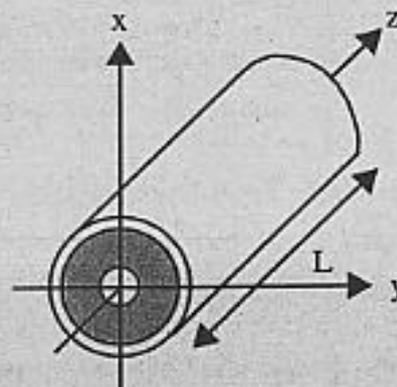


Abb. 3.2 Ausrichtung des Koaxialleiters

- 3.1 Was versteht man unter der **Quasistationären Näherung**? Geben Sie ein **Beispiel** an, für die Quasistationäre Näherung nicht mehr gilt! (2 Punkte)
- 3.2 Berechnen Sie das **Magnetfeld** $\vec{H}(\vec{r}, t)$ im gesamten Raum! **Begründen** Sie die einzelnen Rechenschritte! (7 Punkte)
- 3.3 Berechnen Sie den inneren Induktivitätsbelag L_i' des Innenleiters, d. h. den Induktivitätsbelag des Leiters mit dem Radius $\rho \leq r_1$! (2 Punkte)
- 3.4 Berechnen Sie den Gegeninduktivitätsbelag M' des Koaxialleiters, d. h. den Gegeninduktivitätsbelag, der z. B. als Ursache den Strom $i_1(t)$ hat, die Wirkung aber mit $i_2(t)$ verknüpft ist! (3 Punkte)

Zusatzaufgabe:

- 3.Z.1 Geben Sie die vollständigen Maxwell'schen Gleichungen in Differentialform für den Fall der **Quasistationären Näherung** an (inkl. Nebenbedingungen und Materialgleichungen)! (3 Punkte)

4. Aufgabe: Schräg einfallende ebene Welle (11 Punkte + 5 Zusatzpunkte)

Eine ebene harmonische Welle fällt (Index „E“) schräg auf eine ebene, unendlich ausgedehnte, nichtleitende Grenzfläche, siehe Abb. 4.1. Beide Teilräume sind nichtleitend und haben die Brechzahl n_1 bzw. n_2 . An der Grenzfläche (bei $z = 0$) wird ein Teil der Welle reflektiert (Index „R“) ein anderer Teil transmittiert (Index „T“). Für die elektrischen Feldvektoren gilt allgemein:

$$\vec{E}_{E,R,T} = E_{E,R,T} \cdot e^{-j(\vec{k}_{E,R,T} \cdot \vec{r})} \cdot \vec{e}_y,$$

wobei der zeitliche (= harmonische) Term $e^{j\omega t}$ nicht explizit aufgeführt wurde. $E_{E,R,T}$ ist die konstante reelle Amplitude der einfallenden, reflektierten bzw. der transmittierten Welle. Im gesamten Raum gilt: $\mu = \mu_0$.

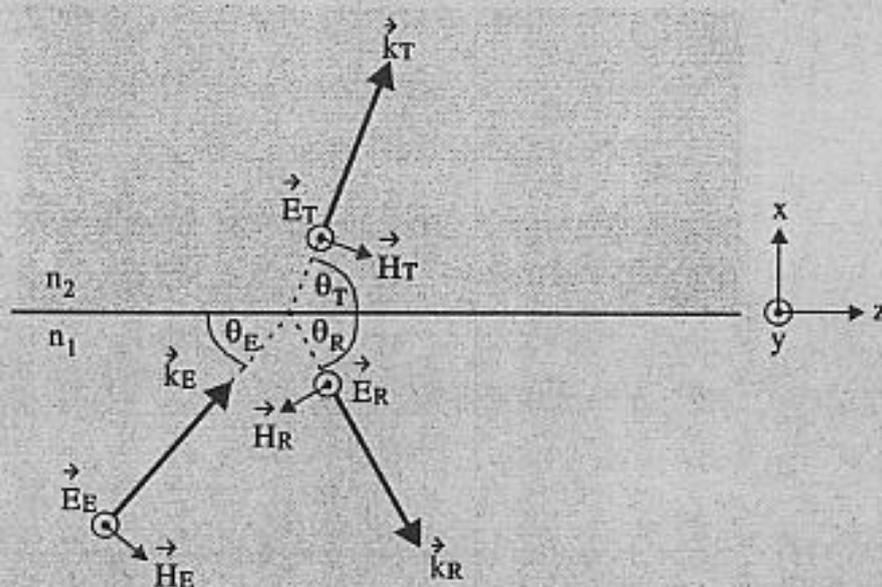


Abb. 4.1 Geometrie der ebenen Wellen bei schrägem Einfall

- 4.1 Ist die einfallende Welle nach Abb. 4.1 TE- oder TM-polarisiert (mit Begründung)? (1 Punkt)
- 4.2 Stellen Sie die elektrischen Feldvektoren $\vec{E}_{E,R,T}(x, y, z)$ explizit als Funktion von n_1 , n_2 , λ , x , y und/oder z dar! (4 Punkte)
- 4.3 Berechnen Sie den magnetischen Feldvektor $\vec{H}_E(x, y, z)$ der einfallenden Welle! (3 Punkte)
- 4.4 Berechnen Sie den Augenblickswert der Energieflußdichte der einfallenden Welle! In welche Richtung wird die Energie transportiert? (3 Punkte)

Zusatzaufgabe:

- 4.Z.1 Leiten Sie unter Verwendung der **Grenzflächenbedingungen** für das elektrische Feld das Brechungsgesetz, das Reflexionsgesetz und eine Bedingung für die Amplituden der Wellen her (mit Begründung)! (3 Punkte)
- 4.Z.2 Erläutern Sie die Besonderheiten des Falles „*Brewsterwinkel*“! (2 Punkte)

Formelsammlung

1. Zylinder- und Kugelkoordinaten:

$$\vec{e}_\rho(\phi) = \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\phi \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\phi(\phi) = -\sin\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\phi \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{r}(\phi, \theta, z) = \rho \cdot \vec{e}_\rho(\phi) + z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [x\vec{e}_x + y\vec{e}_y]$$

$$\vec{e}_\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y]$$

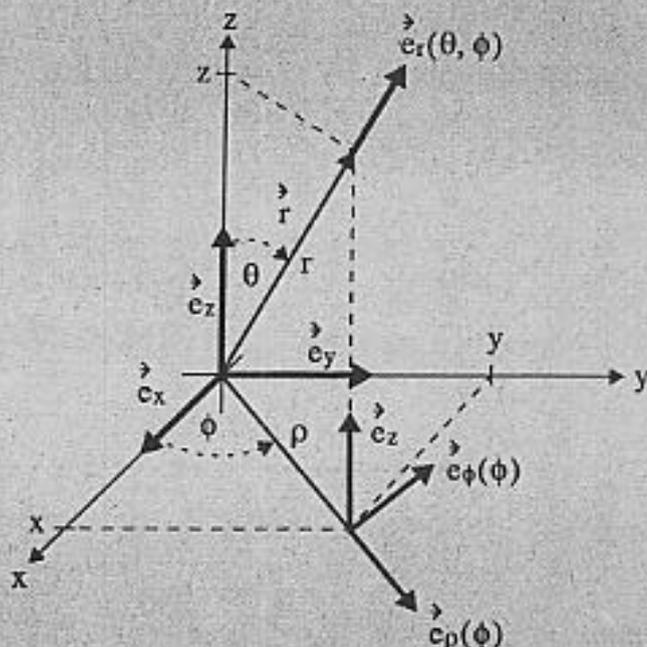
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{e}_r(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{e}_r(\theta, \phi) = \sin\theta \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\theta \sin\phi \cdot \vec{e}_y + \cos\theta \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{r}(\phi, \theta, z) = r \cdot \vec{e}_r(\theta, \phi)$$



2. Oberflächen- und Volumenelemente:

$$d\vec{A}(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \cdot \vec{e}_r$$

$$dV(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$

$$d\vec{A}(\rho, z, \phi) = \rho d\phi dz \cdot \vec{e}_\rho$$

$$dV(\rho, z, \phi) = \rho d\rho d\phi dz$$

3. Vektoren:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \quad \text{mit } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$$

4. Divergenz und Rotation in Zylinderkoordinaten

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \{\rho A_\rho\} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \{A_\phi\} + \frac{\partial}{\partial z} \{A_z\}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{e}_\rho \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right] + \vec{e}_\phi \cdot \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] + \vec{e}_z \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right]$$

5. Laplace-Operator und Gradient in Kugelkoordinaten

$$\Delta \varphi(\phi, \theta, z) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \right]$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \cdot \vec{e}_\phi$$

6. Näherungsformeln:

Für kleine Winkel α gilt: $\sin \alpha \approx \tan \alpha = \alpha$ und $\cos \alpha = 1$

Reihen: $\sin \phi \approx \phi - \frac{\phi^3}{3!}, \quad \cos \phi \approx 1 - \frac{\phi^2}{2!}, \quad \frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x$

7. Integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C,$$

$$\int \frac{x dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + C,$$

$$\int \frac{dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \cdot \sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Formelsammlung

$$\vec{e}_\theta = \vec{e}_x \cos\theta \cos\phi + \vec{e}_y \cos\theta \sin\phi - \vec{e}_z \sin\theta$$

1. Zylinder- und Kugelkoordinaten:

$$\vec{e}_\rho(\phi) = \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\phi \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\phi(\phi) = -\sin\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\phi \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{r}(\phi, \theta, z) = \rho \cdot \vec{e}_\rho(\phi) + z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [x\vec{e}_x + y\vec{e}_y]$$

$$\vec{e}_\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y]$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

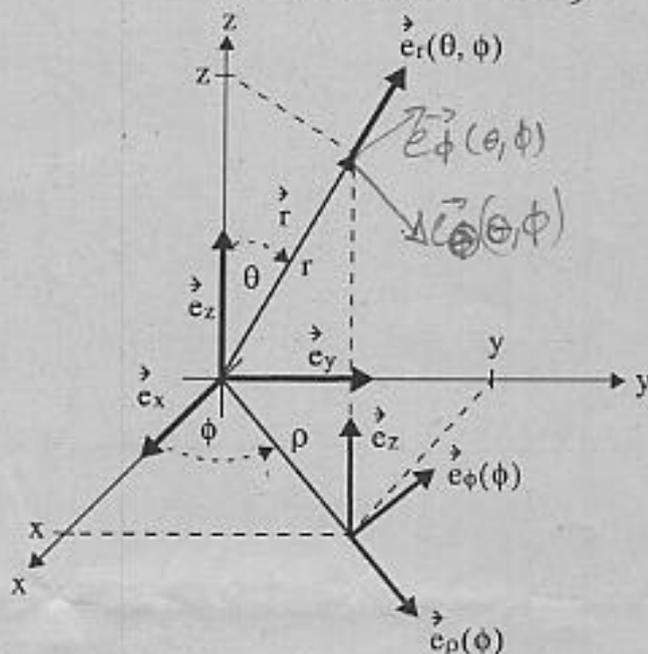
$$\vec{e}_r(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{e}_r(\theta, \phi) = \sin\theta \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\theta \sin\phi \cdot \vec{e}_y + \cos\theta \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{r}(\phi, \theta, z) = r \cdot \vec{e}_r(\theta, \phi)$$

($\vec{e}_\phi = -\sin\theta \sin\phi \vec{e}_x + \sin\theta \cos\phi \vec{e}_y$
 (steht im Lerner))



2. Oberflächen- und Volumenelemente:

$$d\vec{A}(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \cdot \vec{e}_r$$

$$dV(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$

$$d\vec{A}(\rho, z, \phi) = \rho d\phi dz \cdot \vec{e}_\rho$$

$$dV(\rho, z, \phi) = \rho d\rho d\phi dz$$

3. Vektoren:

Geht über

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \text{ mit } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$$

4. Divergenz und Rotation in Zylinderkoordinaten

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \{\rho A_\rho\} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \{A_\phi\} + \frac{\partial}{\partial z} \{A_z\}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{e}_\rho \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right] + \vec{e}_\phi \cdot \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] + \vec{e}_z \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right]$$

5. Laplace-Operator und Gradient in Kugelkoordinaten

$$\Delta \varphi(\phi, \theta, z) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \right]$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \cdot \vec{e}_\phi$$

6. Näherungsformeln:

Für kleine Winkel α gilt: $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$ und $\cos \alpha \approx 1$

Reihen: $\sin \phi = \phi - \frac{\phi^3}{3!}, \quad \cos \phi = 1 - \frac{\phi^2}{2!}, \quad \frac{1}{1 \pm x} \approx 1 \mp x$

7. Integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C,$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + C,$$

$$\int \frac{x}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2) + C$$

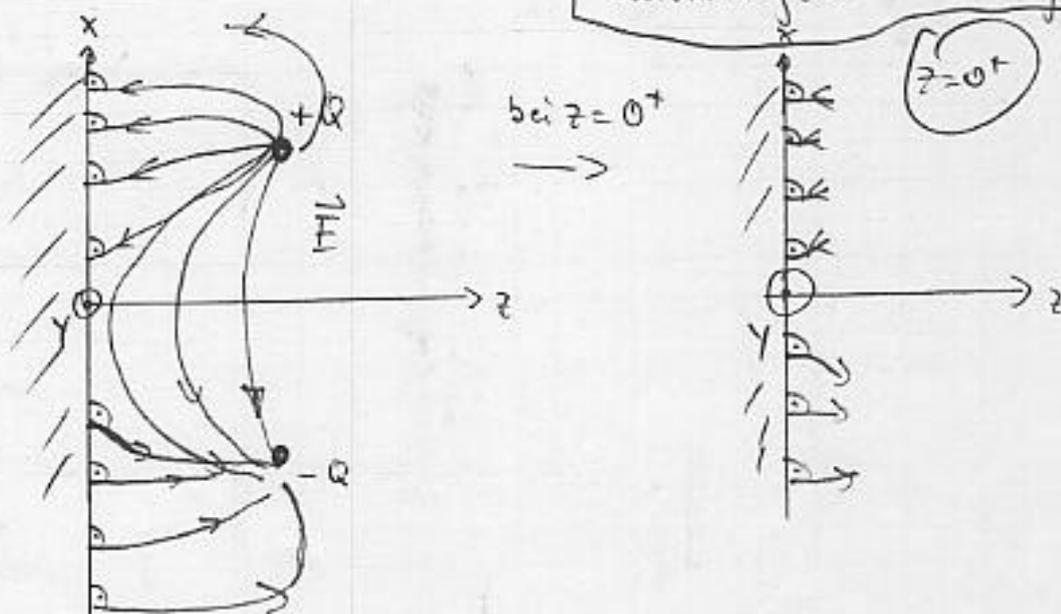
$$\int \frac{x dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \cdot \sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

1. Aufgabe (vgl. Frühjahr 1994: 3. Aufgabe)

1.1.



Bei $z=0^+$: geordnete Ebene ist Äquipotentialfläche $\Rightarrow \vec{E}$ steht \perp auf Äquipot.

\Rightarrow Feldlinien sind senkrecht auf leitender Ebene bei $z=0^+$

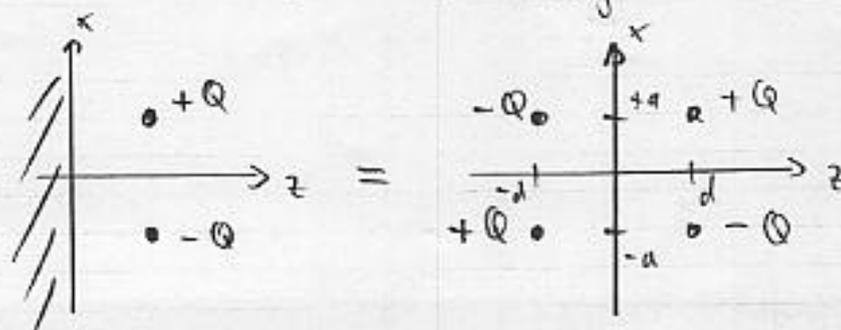
1.2.

$z \leq 0$: $\varphi = \text{konst}$, aber da $\varphi(z=0) \stackrel{!}{=} 0$ (leitende Ebene)

folgt: $\boxed{\varphi = 0; z \leq 0}$

$z \geq 0$: Spiegelungsmethode

allg.: $\varphi_{\text{Punktladung}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$



1.2

$$\Rightarrow \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left\{ \frac{-Q}{|\vec{r}-\vec{r}'_1|} + \frac{+Q}{|\vec{r}-\vec{r}'_2|} + \frac{-Q}{|\vec{r}-\vec{r}'_3|} + \frac{+Q}{|\vec{r}-\vec{r}'_4|} \right\}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \vec{r}'_1 = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ d \end{pmatrix}; \quad \vec{r}'_2 = \begin{pmatrix} +a \\ 0 \\ d \end{pmatrix}; \quad \vec{r}'_3 = \begin{pmatrix} +a \\ 0 \\ -d \end{pmatrix}; \quad \vec{r}'_4 = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left\{ \frac{-1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + (z-d)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + (z-d)^2}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{-1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + (z+d)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right\} \quad , z \geq 0$$

1.3.

Beachte $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ und $\text{grad } \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$

mit φ Punktladung folgt somit:

$$\vec{E}_{\text{Punktladung}} = + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \quad \nabla \circ$$

$$\Rightarrow \vec{E}(x, y, z) \Big|_{z=0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left\{ \frac{-\begin{pmatrix} x+a \\ y \\ z-d \end{pmatrix}}{[(x+a)^2 + y^2 + (z-d)^2]^{3/2}} + \frac{\begin{pmatrix} x-a \\ y \\ z-d \end{pmatrix}}{[(x-a)^2 + y^2 + (z-d)^2]^{3/2}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{-\begin{pmatrix} x-a \\ y \\ z+d \end{pmatrix}}{[(x-a)^2 + y^2 + (z+d)^2]^{3/2}} + \frac{\begin{pmatrix} x+a \\ y \\ z+d \end{pmatrix}}{[(x+a)^2 + y^2 + (z+d)^2]^{3/2}} \right\} \Big|_{z=0}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left\{ \frac{1}{[(x+a)^2 + y^2 + d^2]^{3/2}} \cdot \begin{bmatrix} -x-a & x+a \\ -y & y \\ +d & +d \end{bmatrix} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{[(x-a)^2 + y^2 + d^2]^{3/2}} \cdot \begin{bmatrix} x-a & -x+a \\ y & -y \\ -d & -d \end{bmatrix} \right\}$$

$$\vec{E}(x, y) \Big|_{z=0^+} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left\{ \frac{2d \vec{e}_z}{[(x+a)^2 + y^2 + d^2]^{3/2}} + \frac{2d \vec{e}_z}{[(x-a)^2 + y^2 + d^2]^{3/2}} \right\}$$

nur z-Richtung, also \perp zu x-y-Ebene \checkmark

1.4.

Grenzflächenbedingung: $D_{n1}(0^+) - D_{n2}(0^-) = \sigma$

\Rightarrow mit für $z < 0$ kein Feld!

1. Normalkomponente = z-Komponente

2. $D_{n1}(z=0^+) = \epsilon_0 \cdot E_z(z=0^+)$

$\Rightarrow \sigma(x,y) = \epsilon_0 \cdot E_z(z=0^+)$

mit 1.3:

$$\sigma(x,y) = \frac{Q \cdot d}{2\pi \epsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{[(x+a)^2 + y^2 + d^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x-a)^2 + y^2 + d^2]^{3/2}} \right]$$

1.2.1

$$Q_{\text{ges}} = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \sigma(x,y) dx dy$$

$$= \frac{Q \cdot d}{2\pi \epsilon_0} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[(x+a)^2 + y^2 + d^2]^{3/2}} dx dy - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[(x-a)^2 + y^2 + d^2]^{3/2}} dx dy \right\}$$

Sub: $x+a = u$

$\rightarrow dx = du$

$x = -\infty \rightarrow u = -\infty$

$x = +\infty \rightarrow u = +\infty$

Sub: $x-a = v$

$\rightarrow dx = dv$

$x = -\infty \rightarrow v = -\infty$

$x = +\infty \rightarrow v = +\infty$

$$\Rightarrow Q_{\text{ges}} = \frac{Q \cdot d}{2\pi \epsilon_0} \cdot \left\{ \int_{y=-\infty}^{+\infty} \int_{u=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[u^2 + y^2 + d^2]^{3/2}} du dy - \int_{y=-\infty}^{+\infty} \int_{v=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[v^2 + y^2 + d^2]^{3/2}} dv dy \right\}$$

Sub: $u \equiv v \equiv x \rightarrow du = dv = dx$

$$\Rightarrow Q_{\text{ges}} = \frac{Q \cdot d}{2\pi \epsilon_0} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[x^2 + y^2 + d^2]^{3/2}} dx dy - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[x^2 + y^2 + d^2]^{3/2}} dx dy \right\} \equiv 0$$

was zu erwarten war!

1.2.2.

$$\text{Es gilt: } \operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} (\epsilon \cdot \vec{E}) = \rho$$

Annahme: ϵ keine Fkt. vom Ort: $\epsilon = \text{konst}$

$$\Rightarrow \operatorname{div} (\epsilon \cdot \vec{E}) = \epsilon \cdot \operatorname{div} \vec{E} = \rho \Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\text{Def.: } \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} (-\operatorname{grad} \varphi) = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}}$$

2. Aufgabe (vgl. Herbst 1997, 1. Aufg.)

9/18

2.1

$$C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{Q}{\int_1^2 \vec{E} d\vec{n}}$$

Symmetrie: Satz von Gauß

$$\oiint \vec{D} d\vec{A} = \iiint_V \rho dV = +Q_0 \leftarrow \text{eingeschlossene Ladung}$$

$$D \cdot 4\pi r^2 = Q_0 \Rightarrow D = \frac{Q_0}{4\pi r^2}$$

Symmetrie: \vec{D} hat nur radiale Komponente

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{D} = \frac{Q_0}{4\pi r^2} \vec{e}_r}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{E} = \frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \vec{e}_r}}$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{Q}{\int_{R_i}^{R_a} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dr} = \frac{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{-\frac{1}{r} \Big|_{R_i}^{R_a}} = \frac{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}}}$$

2.2.

$$\text{analog: } \vec{H} = \frac{1}{\epsilon} \vec{D} = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot k \cdot \frac{1}{r^2}} \cdot \frac{Q_0}{4\pi r^2} \vec{e}_r = \frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0 k} \vec{e}_r$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{\int_{R_i}^{R_a} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 k} dr} = \frac{4\pi \epsilon_0 k}{R_a - R_i}}$$

2.3.

$$C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{\oiint \vec{D} d\vec{A}}{U_0}$$

\Rightarrow Berechne \vec{D} über ohmsches Gesetz in Diff-Form:

$$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E} = \frac{I}{A} \vec{e}_r \quad \text{nur radial, weil innere Elektrode idealer Leiter}$$

$$\Rightarrow E_{\text{tan}} = 0 \Rightarrow \text{nur Normalkomp: } \vec{E}_{\text{norm}} \Rightarrow \text{nur } \vec{e}_r$$

2.3.

$$\vec{g} = \frac{I}{A} \vec{c}_r = \frac{U_0/R}{A} \vec{c}_r = \frac{U_0/R}{4\pi r^2} \vec{c}_r$$

$$\text{vgl. } R = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{l}{A} \Rightarrow dR = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{dr}{A}$$

$$R = \frac{1}{\gamma} \cdot \int_{R_i}^{R_a} \frac{1}{4\pi r^2} dr = \frac{1}{4\pi\gamma} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{g} = \frac{U_0 \cdot \gamma}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}} \cdot \frac{1}{r^2} \vec{c}_r = \gamma \cdot \vec{E}$$

↑
ohmsches Gesetz

$$\text{oder: } \vec{E} = \frac{U_0}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}} \cdot \frac{1}{r^2} \vec{c}_r$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \vec{E} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r U_0}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}} \frac{1}{r^2} \vec{c}_r$$

$$\Rightarrow C = \frac{\iint \vec{D} \cdot d\vec{A}}{U_0} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r U_0}{U_0 (\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a})} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{r^2} r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$d\vec{A} = r^2 \sin\theta d\phi d\theta \vec{c}_r, \theta \in [0, \pi] \text{ und } \phi \in [0, 2\pi]$$

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}} 2\pi \left[-\cos\theta \right]_0^{\pi} = \frac{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}}$$

2.4. in Teilaufgabe 2.1 ist das Dielektrikum ideal, d.h. nicht leitfähig und somit bleiben die Ladungen auf den Elektroden für alle Zeiten erhalten.

$\Rightarrow Q = \text{konst} \Rightarrow$ Berechnung der Spannung zwischen den Elektroden

2.4. in Teilaufgabe 2.3 ist das Dielektrikum leitfähig, und somit fließen die Ladungen von der inneren Elektrode zur äußeren. Sie würden sich ausgleichen, wenn nicht eine ideale Spgquelle andauernd neue Ladungen auf die Elektroden bringen würde
 \Rightarrow Die Ladungsmenge Q ist nicht bekannt und muß bestimmt werden

$$\Rightarrow C = \frac{\Delta Q}{\Delta U} = \frac{\Delta Q}{U_0} \rightarrow \text{berechnen!}$$

(U₀) konstant

2.2.1 aus 2.3. $\vec{E} = \frac{U_0}{\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2}} \cdot \frac{1}{r^2} \vec{r}$ unabhängig von ρ und ϵ

$\Rightarrow \vec{E}$ ist stetig an Grenzfläche $\Rightarrow D_n$ springt um (freie) Flächenladungsdichte

\Rightarrow Kondensator besteht aus der Reihenschaltung von 2 Kond. mit je ϵ_{r1} und ϵ_{r2}

$$\Rightarrow C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} 4\pi}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \quad \text{nach 2.3}$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r2} 4\pi}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}}$$

$$\Rightarrow C = \frac{(4\pi \epsilon_0)^2 \cdot \epsilon_{r1} \epsilon_{r2} \cdot \frac{R_1 R_2 R_3}{(R_2 - R_1)(R_3 - R_2)}}{4\pi \epsilon_0 \cdot \left[\epsilon_{r1} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} + \epsilon_{r2} \frac{R_2 R_3}{R_3 - R_2} \right]}$$

$$C = 4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2} \frac{R_1 R_2 R_3}{\epsilon_{r1} R_1 [R_3 - R_2] + \epsilon_{r2} R_3 [R_2 - R_1]}$$

3. Aufgabe

17/18

3.1. Quasistationäre Näherung: Verschiebungsstrom kann vernachlässigt werden: $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \approx \vec{0}$

Versagt bei hochfrequenten Vorgängen z.B. Antenne

3.2 1. Fall: $s < r_1$

Durchflutungsgesetz von Ampère: $\oint \vec{H} d\vec{l} = \iint \vec{j} d\vec{A}$

Stromdichte $\vec{j} = \frac{i(t)}{A} \vec{e}_z = \frac{I_0 \cos \omega t}{\pi r_1^2} \vec{e}_z$: keine Fkt. des Ortes

$$\Rightarrow H \cdot \underbrace{2\pi s}_{\text{Umfang}} = \iint \underbrace{\frac{I_0 \cos \omega t}{\pi r_1^2}}_{\vec{j}} \cdot \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z dA$$

$$H \cdot 2\pi s = \frac{I_0 \cos \omega t}{\pi r_1^2} \cdot \underbrace{\pi s^2}_{\text{Fläche A}}$$

$$H = \frac{I_0 \cos \omega t}{2\pi r_1^2} \cdot s$$

"rechte Hand Regel": \vec{H} hat aus Symm nur \vec{e}_ϕ -Komponente

$$\vec{H}(s,t) = \frac{I_0 \cos \omega t}{2\pi r_1^2} \cdot s \vec{e}_\phi$$

2. Fall: $s \in [r_1, r_2]$

analog: $H \cdot 2\pi s = \iint \vec{j} d\vec{A} = i(t) \Rightarrow \vec{H}(s,t) = \frac{I_0 \cos \omega t}{2\pi s} \cdot \vec{e}_\phi$

3.2. 3. Fall: $s \in [r_2, r_3]$

$$H \cdot 2\pi s = \iint \vec{j} d\vec{A} = \iint (\vec{j}_1 + \vec{j}_2) d\vec{A}$$

$$\vec{j}_1 = \frac{I_0 \cos \omega t}{\pi r_1^2} \vec{e}_z$$

$$\vec{j}_2 = \frac{I_0 \cos \omega t}{\pi (r_3^2 - r_2^2)} (-\vec{e}_z) \neq f(s)!$$

fließt entgegen \vec{e}_z !

$$H \cdot 2\pi s = \underbrace{\iint \vec{j}_1 d\vec{A}}_{= i(t)} + \iint \vec{j}_2 d\vec{A}$$

$$= I_0 \cos \omega t - \frac{I_0 \cos \omega t}{\pi (r_3^2 - r_2^2)} \cdot \pi (s^2 - r_2^2)$$

$$\Rightarrow \vec{H}(s, t) = \left(\frac{I_0 \cos \omega t}{2\pi s} - \frac{I_0 \cos \omega t}{r_3^2 - r_2^2} \cdot \frac{s^2 - r_2^2}{2\pi s} \right) \vec{e}_\phi$$

4. Fall: $s \geq r_3$

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \iint \vec{j} d\vec{A} = \sum I = i(t) - i(t) = 0$$

↑
ausgeglichen!

$$\Rightarrow \vec{H}(s, t) = \vec{0}$$

Koaxialkabel ist außerhalb
(magn.) feldfrei

3.3.

$$\frac{1}{2} \cdot L_i \dot{i}(t)^2 \stackrel{!}{=} W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int \vec{B} \vec{H} dV = \frac{1}{2} \mu_0 \int |\vec{H}|^2 dV$$

\uparrow
 $B = \mu \cdot H$

$$|\vec{H}| = \frac{I_0 \cos \omega t}{2\pi r} \quad \text{nach 3.2 im Inneren Leiter}$$

$$\Rightarrow W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \mu_0 \int_{z=0}^L \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{s=0}^{r_1} \frac{I_0^2 \cos^2 \omega t}{(2\pi r_1)^2} s^2 \cdot s d\phi dz$$

$$= \frac{1}{2} \mu_0 \cdot \frac{(I_0 \cos \omega t)^2}{2\pi r_1} \cdot L \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} s^4 \Big|_0^{r_1}$$

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{8} \mu_0 \frac{(I_0 \cos \omega t)^2}{2\pi r_1} \cdot L \cdot r_1^4$$

$$\frac{1}{2} L_i i(t)^2 = \frac{1}{8} L_i \cdot I_0^2 \cos^2 \omega t \stackrel{!}{=} \frac{1}{8} \mu_0 \frac{(I_0 \cos \omega t)^2}{2\pi r_1} \cdot L \cdot r_1^4$$

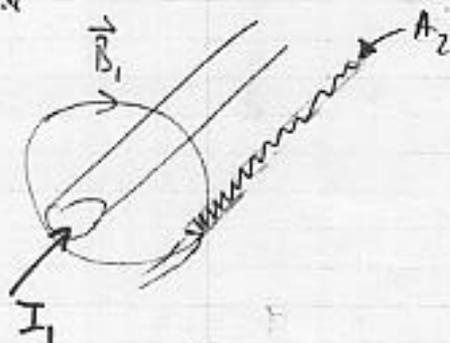
$$\Rightarrow \boxed{L_i = \frac{L_i}{L} = \frac{\mu_0}{8\pi}}$$

d.h. ohne Rückleiter: ∞

3.4.

Gegeneinduktivität $M = L_{12}$ d.h. von Strom 1 erzeugt durch Spule (Fläche) 2 fließend

$$L_{12} = \frac{\Psi}{I_1} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\int \vec{B}_1 d\vec{A}_2}{I_1} =$$

Magnetfeld von Strom I_1 :

$$\vec{H} = \frac{I_0 \cos \omega t}{2\pi s} \vec{e}_\phi(\phi)$$

3.4

$$\Rightarrow M = L_{12} = \frac{1}{I_{\text{ausw}}} \cdot \int_{z=0}^L \int_{\rho=r_2}^{r_3} \frac{I_{\text{ausw}}}{2\pi \rho} \vec{e}_\phi \cdot \underbrace{\vec{e}_\phi}_{\frac{d\vec{s}}{dA}} d\rho dz$$

$$= L \cdot \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_3}{r_2}$$

$$M' = \frac{M}{L} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_3}{r_2} \quad \text{Gegeninduktivität}$$

3.8.1

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt} = \vec{j}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{d\vec{D}}{dt}$$

$$\text{rot } \vec{B} = 0$$

$$\text{div } \vec{D} = 0$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

(1)

Maxwell'sche
Gleichung

(2)

(3)

Nebenbedingungen

(4)

(5)

Materialgleichung

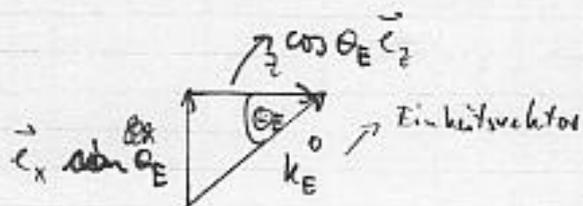
(6)

4. Aufgabe:

16/18

4.1 $\vec{E} \perp$ Einfallsebene \Rightarrow TE polarisiert

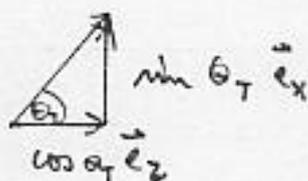
4.2.



$$\vec{k}_E = \vec{k}_E \cdot \frac{2\pi}{D_E} = \begin{pmatrix} \sin \theta_E \\ 0 \\ \cos \theta_E \end{pmatrix} \cdot \frac{2\pi n_1}{\lambda}$$



$$\vec{k}_R = \frac{2\pi n_1}{\lambda} \begin{pmatrix} -\sin \theta_R \\ 0 \\ \cos \theta_R \end{pmatrix}$$



$$\vec{k}_T = \frac{2\pi n_2}{\lambda} \begin{pmatrix} \sin \theta_T \\ 0 \\ \cos \theta_T \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_E = E_E \cdot e^{-j \frac{2\pi n_1}{\lambda} [\sin \theta_E x + \cos \theta_E z]} \vec{e}_y \\ \vec{E}_R = E_R \cdot e^{-j \frac{2\pi n_1}{\lambda} [-\sin \theta_R x + \cos \theta_R z]} \vec{e}_y \\ \vec{E}_T = E_T \cdot e^{-j \frac{2\pi n_2}{\lambda} [\sin \theta_T x + \cos \theta_T z]} \vec{e}_y \end{cases} ; \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

4.3.

2. Maxwell'sche Gl.: $\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\omega \vec{B}$
f. harm. Wellen

$$\Rightarrow \vec{H}_E = - \frac{1}{j\omega \mu_0} \cdot \text{rot } \vec{E}$$

$$= - \frac{1}{j\omega \mu_0} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_E e^{j \frac{2\pi n_1}{\lambda} [x \sin \theta_E + z \cos \theta_E]} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \frac{1}{j\omega \mu_0} \left\{ \vec{e}_x \left(- \frac{\partial}{\partial z} E_E e^{j \frac{2\pi n_1}{\lambda} [x \sin \theta_E + z \cos \theta_E]} \right) - \vec{e}_y \cdot 0 + \dots \right. \\ \left. \dots + \vec{e}_z \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} E_E e^{j \frac{2\pi n_1}{\lambda} [x \sin \theta_E + z \cos \theta_E]} \right) \right\}$$

4.3.

$$\begin{aligned} \vec{H}_E &= -\frac{1}{j\omega\mu_0} \left\{ -\vec{e}_x (-j)^{2n_1} \frac{2n_1}{\lambda} \omega \sin \theta_E E_E e^{-j\frac{2n_1}{\lambda} [x \sin \theta_E + z \cos \theta_E]} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \vec{e}_z (-j)^{2n_1} \frac{2n_1}{\lambda} \cos \theta_E E_E e^{-j\frac{2n_1}{\lambda} [x \sin \theta_E + z \cos \theta_E]} \right\} \\ &= \frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{2n_1}{\lambda} E_E e^{-j\frac{2n_1}{\lambda} [x \sin \theta_E + z \cos \theta_E]} \cdot \left\{ \sin \theta_E \vec{e}_z - \cos \theta_E \vec{e}_x \right\} \\ &= \frac{n_1}{\mu_0 c_0} E_E e^{-j\frac{2n_1}{\lambda} [x \sin \theta_E + z \cos \theta_E]} \left\{ \sin \theta_E \vec{e}_z - \cos \theta_E \vec{e}_x \right\} \end{aligned}$$

mit: $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

$$\vec{H}_E = n_1 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_E e^{-j\frac{2n_1}{\lambda} [x \sin \theta_E + z \cos \theta_E]} \left\{ \sin \theta_E \vec{e}_z - \cos \theta_E \vec{e}_x \right\}$$

4.4.

$\vec{S} = \vec{e}(t) \times \vec{h}(t)$ jetzt $e^{j\omega t}$ Term hinzunehmen!

$$= \vec{e}_y E_E \cos\left(\omega t - \frac{2n_1}{\lambda} [x \sin \theta_E + z \cos \theta_E]\right) \times n_1 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_E \cos\left(\omega t - \frac{2n_1}{\lambda} [z]\right) \begin{pmatrix} -\cos \theta_E \\ 0 \\ \sin \theta_E \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & E_E \omega & 0 \\ -n_1 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_E \cos(\dots) & 0 & \sin \theta_E n_1 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_E \cos(\dots) \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_x \left\{ E_E^2 n_1 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sin \theta_E \cos^2(\dots) \right\} - \vec{e}_y \cdot 0 + \vec{e}_z \left\{ E_E^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n_1 \cos \theta_E \cos^2(\dots) \right\}$$

$$\vec{S} = E_E^2 n_1 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos^2\left(\omega t - \frac{2n_1}{\lambda} [x \sin \theta_E + z \cos \theta_E]\right) \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta_E \\ 0 \\ \cos \theta_E \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Richtung: $\begin{pmatrix} \sin \theta_E \\ 0 \\ \cos \theta_E \end{pmatrix}$, d.h. Richtung \vec{h}_E !

4.2.1

18/18

$$E_{\text{total}} = E_{\text{trans}}$$

$$\vec{E}_E + \vec{E}_R \Big|_{\substack{\gamma\text{-komp} \\ x=0}} \stackrel{!}{=} \vec{E}_T \Big|_{\substack{\gamma\text{-komp} \\ x=0}}$$

$$E_E \cdot e^{-j \frac{2\pi n_1}{\lambda} \cos \theta_E z} + E_R \cdot e^{-j \frac{2\pi n_1}{\lambda} \cos \theta_R z} \stackrel{!}{=} E_T \cdot e^{-j \frac{2\pi n_2}{\lambda} \cos \theta_T z} \quad (*)$$

(*) wird für alle Zeiten und Orte erfüllt, wenn folgende 3 Bedingungen gleichzeitig gelten:

1. $\theta_E = \theta_R$ Reflexionsgesetz

$$\Rightarrow (E_E + E_R) e^{-j \frac{2\pi n_1}{\lambda} \cos \theta_E z} = E_T e^{-j \frac{2\pi n_2}{\lambda} \cos \theta_T z}$$

2. $n_1 \cos \theta_E = n_2 \cos \theta_T$ Brechungsgesetz

$$\Rightarrow (E_E + E_R) e^{-j \frac{2\pi n_1}{\lambda} \cos \theta_E z} = E_T e^{-j \frac{2\pi n_1}{\lambda} \cos \theta_E z}$$

3. $E_E + E_R = E_T$ Amplitudenbedingung

4.2.2 Brewster-Winkel tritt nur bei TM-Polarisation auf und ist der Winkel der Totaltransmission

(d.h. gesamte einfallende Welle tritt durch das Medium ohne Reflexion)

es gilt: $\tan \theta_B = \frac{n_1}{n_2}$

Diplomhauptprüfung (SS 97)

Theoretische Elektrotechnik III

- a. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
- b. Außer Schreib- und Zeichenmaterial sind keine Hilfsmittel zugelassen (auch kein Taschenrechner)!
- c. Es sind alle Aufgaben zu bearbeiten! Die Zusatzaufgaben sind optional.
- d. Verwenden Sie nur die Ihnen ausgeteilten Doppelbögen; nur diese werden bewertet. Trennen Sie die Doppelbögen nicht. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Doppelbogen!
- e. Schreiben Sie auf jeden Doppelbogen Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Aufgabe (inklusive der Teilaufgabe), die Sie bearbeiten!
- f. Zeigen Sie den gewählten Lösungsweg auf. Geben Sie insbesondere Zwischenergebnisse und Begründungen an. Vermeiden Sie so unnötige Punktverluste!
- g. Einige häufig gebrauchte Formeln finden Sie im Anhang.
- h. Die jeweils maximal erreichbare Punktzahl pro Teilaufgabe ist in Klammern am Ende jeder Teilaufgabe angegeben.
- i. VIEL ERFOLG!!!

1. Aufgabe: Kapazität verschiedener Kugelkondensatoren mit unterschiedlichen Dielektrika (13 Punkte + 8 Zusatzpunkte)

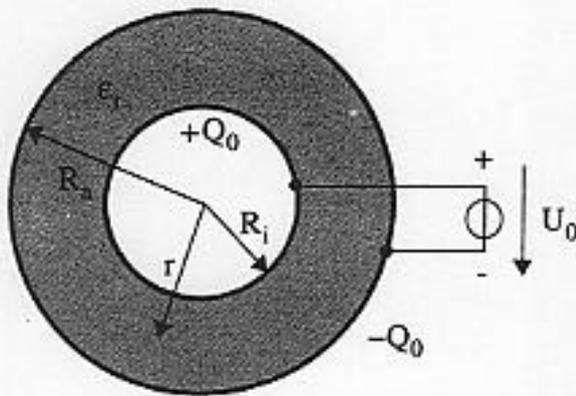


Bild 1.1: Kugelkondensator mit einem Dielektrikum

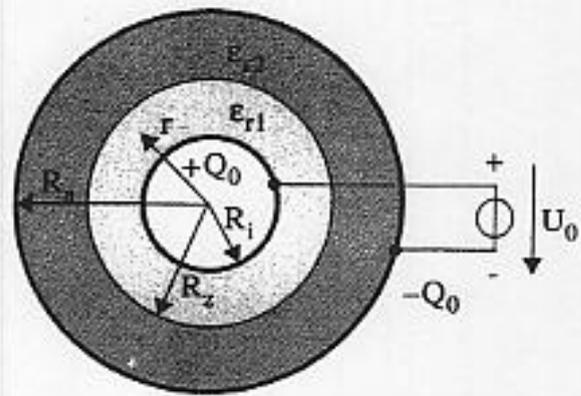


Bild 1.2: Kugelkondensator mit 2 Dielektrika

Bild 1.1 zeigt einen Kugelkondensator, dessen innere ($r = R_1$) und äußere ($r = R_2$) Elektrode durch eine ideale Spannungsquelle der Spannung U_0 auf die Ladung $+Q_0$ (bzw. $-Q_0$) aufgeladen werden. Zwischen beiden unendlich gut leitenden Elektroden befindet sich ein Dielektrikum mit der relativen Dielektrizitätszahl $\epsilon_r = \text{konst.}$

- 1.1 Berechnen sie die Kapazität des Kugelkondensators nach Bild 1.1! (4 Punkte)
- 1.2 Das Dielektrikum sei jetzt inhomogen und es gelte: $\epsilon_r = k \cdot \frac{1}{r}$; $k = \text{konst.}$ für $r \in [R_1, R_2]$. Berechnen Sie die neue Kapazität des Kugelkondensators nach Bild 1.1! (2 Punkte)
- 1.3 Nun gelte wieder $\epsilon_r = \text{konst.}$, aber das Dielektrikum sei verlustbehaftet, d. h. es besitzt die Leitfähigkeit $\kappa > 0$. Berechnen Sie abermals die Kapazität des Kugelkondensators nach Bild 1.1! (4 Punkte)
- 1.4 Ein zweiter Kugelkondensator besitzt entsprechend Bild 1.2 ein zweischichtiges, konzentrisches Dielektrikum mit unterschiedlichen relativen Dielektrizitätszahlen $\epsilon_{r1} = \text{konst}$ und $\epsilon_{r2} = \text{konst}$ sowie $\epsilon_{r1} \neq \epsilon_{r2}$. Berechnen Sie die Kapazität dieses Kugelkondensators! (3 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 1.Z.1 Die Dielektrika mit ϵ_{r1} und ϵ_{r2} nach Bild 1.2 weisen nun beide dieselbe Leitfähigkeit $\kappa > 0$ auf. Berechnen Sie die Kapazität dieses verlustbehafteten, 2-schichtigen Kugelkondensators! (3 Punkte)

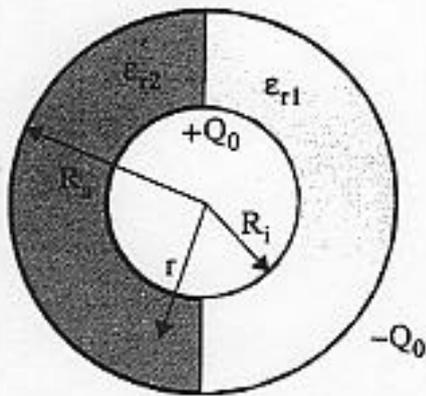


Bild 1.3a: Kugelkondensator mit symmetrisch angeordnetem Dielektrika

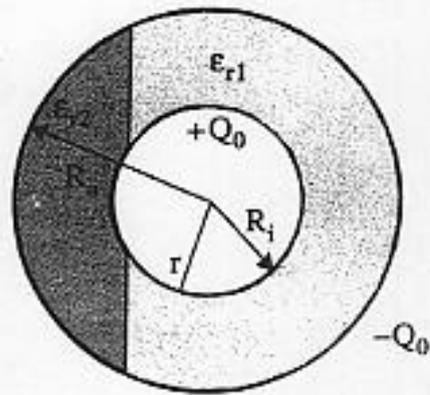
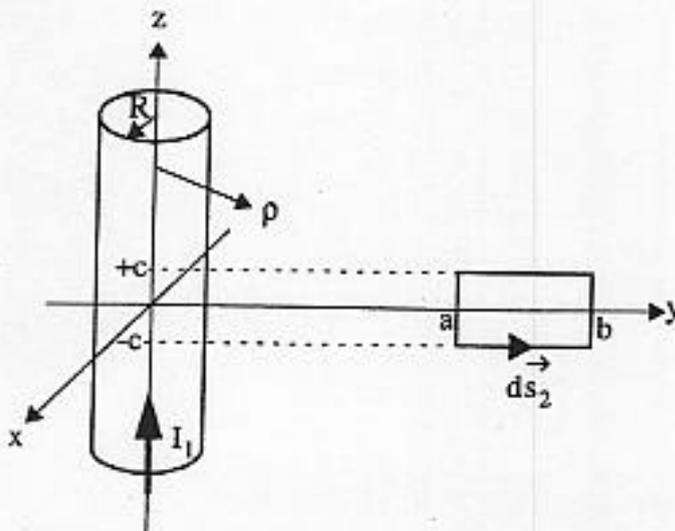


Bild 1.3b: Kugelkondensator mit asymmetrisch angeordnetem Dielektrika

- 1.Z.2 Wie würden Sie die Kapazität eines Kugelkondensators mit symmetrisch angeordnetem Dielektrika nach Bild 1.3a berechnen? Skizzieren Sie kurz den Lösungsweg! (Die Trennungsebene der Dielektrika steht senkrecht auf der Zeichenebene durch das Symmetriezentrum) (3 Punkte)
- 1.Z.3 Nun sei das Dielektrika asymmetrisch angeordnet, siehe Bild 1.3b. Skizzieren Sie auch hier einen Lösungsweg zur Berechnung der Kapazität! (Die Trennungsebene der Dielektrika steht senkrecht auf der Zeichenebene ist aber aus dem Symmetriezentrum versetzt) (2 Punkte)

2. Aufgabe: Magnetisches Feld und Induktivität (14 Punkte + 5 Zusatzpunkte)



Nach Bild 2.1 sei ein unendlich langer stromführender Zylinder gegeben. Der Gleichstrom I_1 sei homogen über den Leiterquerschnitt verteilt. Im gesamten Raum gelte $\mu \equiv \mu_0$.

Bild 2.1: Stromführender Zylinder

- 2.1 Berechnen Sie das durch den Strom I_1 hervorgerufene magnetische Feld $\vec{H}(\vec{r})$ innerhalb und außerhalb des stromführenden Zylinders! (4 Punkte)
- 2.2 Berechnen Sie den inneren und äußeren Induktivitätsbelag L_i' bzw. L_a' des stromführenden Zylinders! (3 Punkte)
- 2.3 Zur einfacheren Berechnung von magnetischen Feldern definiert man zweckmäßiger Weise ein magnetisches Vektorpotential $\vec{V}_m(\vec{r})$. Zeigen Sie, daß für $\rho > R$

$$\vec{V}_m(\rho) = -\frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \cdot \ln(\rho^2) \cdot \vec{e}_z \quad (2.1)$$

ein Vektorpotential des stromführenden Zylinders ist! (2,5 Punkte)

- 2.4 Mittels des magnetischen Vektorpotentials kann man recht einfach die Gegeninduktivität mit der Formel

$$L_{12} = \left| \frac{\oint \vec{V}_{m1} ds_2}{I_1} \right| \quad (2.2)$$

berechnen. Dabei ist \vec{V}_{m1} das magnetische Vektorpotential hervorgerufen durch den Strom I_1 und ds_2 das Weegelement der Leiterschleife, welche nach Bild 2.1 in der Ebene $x = 0$ liegt. Berechnen Sie die Gegeninduktivität L_{12} der Anordnung nach Bild 2.1 mit Hilfe von Gleichung (2.2)! (3,5 Punkte)

- 2.5 Für $R \rightarrow 0$ erhält man das magnetische Feld eines Stromfadens. Berechnen Sie das (äußere) magnetische Feld $\vec{H}(\vec{r})$ eines Stromfadens! (1 Punkt)

Zusatzaufgaben:

- 2.Z.1 Bestätigen Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe 2.5, indem Sie das magnetische Feld $\vec{H}(\vec{r})$ eines Stromfadens mit dem Gesetz von Biot-Savart berechnen! (3 Punkte)
- 2.Z.2 Das magnetischen Feld eines Stromfadens kann man auch z. B. mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes berechnen. Wenn nun der Strom I_1 zeitabhängig ist, also $I_1(t) \neq \text{konst}$, kann man dann das magnetische Feld $\vec{H}(\vec{r})$ immer noch mit dem Ampèreschen Durchflutungsgesetz berechnen? Diskutieren Sie! (2 Punkte)

3. Aufgabe: Strömungsfeld und elektrisches Feld eines Zylindererders im verlustbehafteten Medium (11 Punkte + 4 Zusatzpunkte)

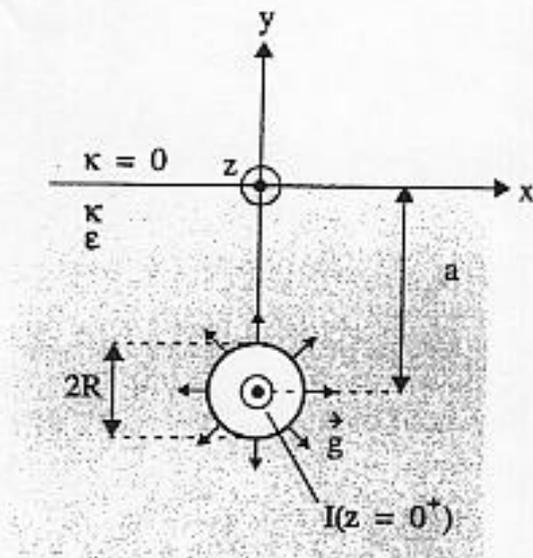


Bild 3.1: Zylindererder

Ein Zylindererder der Länge L werde mit dem Gleichstrom I an der Stelle $z = 0$ gespeist und sei so geartet, daß sich der Strom I homogen über die Zylinderoberfläche verteilt und somit die Stromdichte radial von der Zylinderoberfläche weist. Die Stromzuführung störe die Symmetrie nicht. Da das Verhalten des Zylindererders in dessen Mitte bei $L/2$ (d. h. bei $z = 0^+$) untersucht werden soll, können Randeffekte vernachlässigt werden. Der Zylindererder mit Radius R sei im Abstand a parallel zur z -Achse verlegt und befinde sich in einem Medium mit der Leitfähigkeit $\kappa > 0$ und der Dielektrizitätszahl $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$; $\epsilon_r = \text{konst}$, vergleiche Bild 3.1. Der Halbraum über dem Medium, d. h. für $y > 0$, ist nicht leitfähig.

- 3.1 Berechnen Sie die Stromdichte \vec{g} außerhalb des Zylindererders im leitfähigen Medium ($y \leq 0$) und über dem leitfähigen Medium ($y > 0$)! (3 Punkte)
- 3.2 Berechnen Sie die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ für $y \leq 0$! (1 Punkte)
- 3.3 Berechnen Sie das elektrische Potential $\phi(\vec{r})$ für $y \leq 0$! (3 Punkte)
- 3.4 Wie verlaufen die elektrischen Feldlinien in der Ebene $y = 0$? Begründen Sie das Ergebnis anschaulich! (2 Punkte)
- 3.5 Berechnen Sie die Raumladungsdichte $\rho(\vec{r})$ im Medium (d. h. $y < 0$)! (2 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 3.Z.1 Berechnen Sie die Flächenladungsdichte $\sigma(\vec{r})$ in der Ebene $y = 0$! (2 Punkte)
- 3.Z.2 Der Strom I sei nun zeitabhängig, d. h. $I = i(t)$. Welches Verfahren erlaubt eine einfache Berechnung der Stromdichte \vec{g} und des elektrischen Feld $\vec{E}(\vec{r})$? Geben Sie den Rechengang und die Grenzen des Verfahrens an! (2 Punkte)

4. Aufgabe: Harmonische Elektromagnetische Wellen (12 Punkte + 5 Zusatzpunkte)

Alle Erscheinungsformen elektromagnetischer Wellen, also auch das Licht, gehorchen den Maxwell'schen Gleichungen. Diese Gleichungen werden besonders einfach, wenn man **harmonische** Wellen betrachtet.

- 4.1 Wie lauten die Maxwell'schen Gleichungen für **harmonische** Wellen? Leiten Sie ausgehend von den allgemeinen Maxwell'schen Gleichungen die Maxwell'schen Gleichungen für harmonische Wellen her! Erläutern Sie die einzelnen Terme! (3 Punkte)
- 4.2 Durch geeignete Vereinfachungen und Umformungen erhält man aus den Maxwell'schen Gleichungen für harmonische Wellen die zeitfreie Wellengleichung (Helmholtzgleichung). Eine mögliche Lösung dieser Wellengleichung ist eine ebene Welle, die sich in +z-Richtung **im Vakuum** ausbreitet und deren elektrisches Feld gegeben ist durch:

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_0} z} \cdot \vec{e}_x; \quad E_0 = \text{konst}$$

Berechnen Sie das zugehörige magnetische Feld $\vec{H}(z, t)$! (3 Punkte)

- 4.3 Berechnen Sie den Quotienten $\frac{|\vec{E}(z, t)|}{|\vec{H}(z, t)|}$! Welche Einheit und Bedeutung hat dieser Quotient? (3 Punkte)

- 4.4 Berechnen Sie den Augenblickswert und die Richtung der Energieflußdichte (Leistungsdichte) der elektromagnetischen Welle! Geben Sie die Richtung der Energieflußdichte explizit an! (3 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- 4.Z.1 Deuten Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe 4.4! Diskutieren Sie auch die Einheiten! (2 Punkte)
- 4.Z.2 Leiten Sie die zeitfreie Wellengleichung (Helmholtzgleichung) für die elektrische Feldstärke \vec{E} her. Nehmen Sie hierzu an, daß sich die Welle im Vakuum ausbreitet! (3 Punkte)

Formelsammlung

1. Zylinder- und Kugelkoordinaten:

$$\vec{e}_\rho(\phi) = \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\phi \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\phi(\phi) = -\sin\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\phi \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{r}(\phi, \theta, z) = \rho \cdot \vec{e}_\rho(\phi) + z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [x\vec{e}_x + y\vec{e}_y]$$

$$\vec{e}_\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [-x\vec{e}_x + y\vec{e}_y]$$

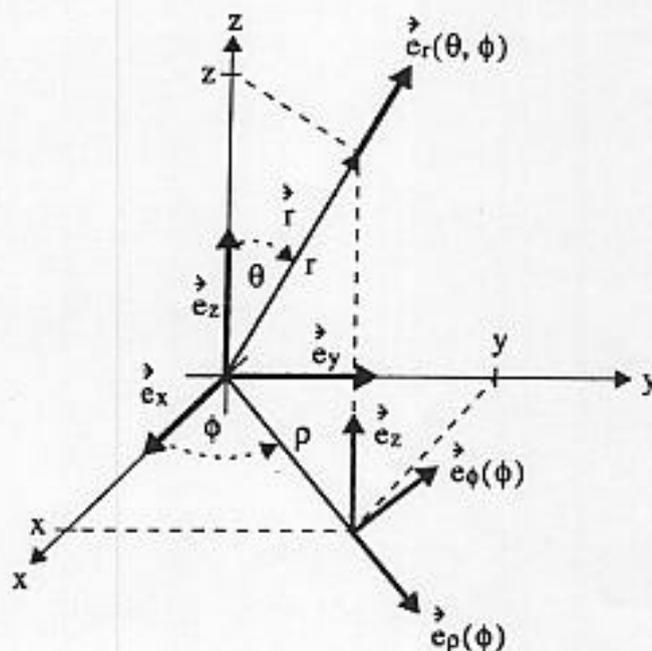
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{e}_r(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{e}_r(\theta, \phi) = \sin\theta \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\theta \sin\phi \cdot \vec{e}_y + \cos\theta \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{r}(\phi, \theta, z) = r \cdot \vec{e}_r(\theta, \phi)$$



2. Oberflächen- und Volumenelemente:

$$dA(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \cdot \vec{e}_r$$

$$dV(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$

$$dA(\rho, z, \phi) = \rho d\phi dz$$

$$dV(\rho, z, \phi) = \rho d\rho d\phi dz$$

3. Vektoren:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \text{ mit } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$$

4. Rotation in Zylinderkoordinaten

$$\vec{\text{rot}}\mathbf{A} = \vec{e}_\rho \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right] + \vec{e}_\phi \cdot \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] + \vec{e}_z \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right]$$

5. Laplace-Operator und Gradient in Kugelkoordinaten

$$\Delta\varphi(\phi, \theta, z) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \right]$$

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \cdot \vec{e}_\phi$$

6. Näherungsformeln:

Für kleine Winkel α gilt: $\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$ und $\cos\alpha \approx 1$

Reihen: $\sin\phi = \phi - \frac{\phi^3}{3!}, \quad \cos\phi \approx 1 - \frac{\phi^2}{2!}, \quad \frac{1}{1 \pm x} \approx 1 \mp x$

7. Integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C,$$

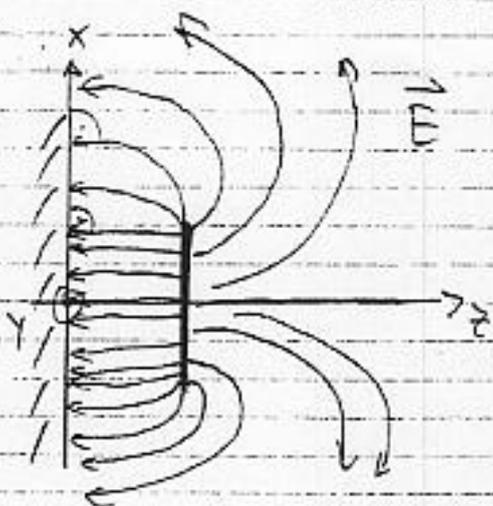
$$\int \frac{x dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + C,$$

$$\int \frac{dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \cdot \sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

1. Aufgabe

1.1.

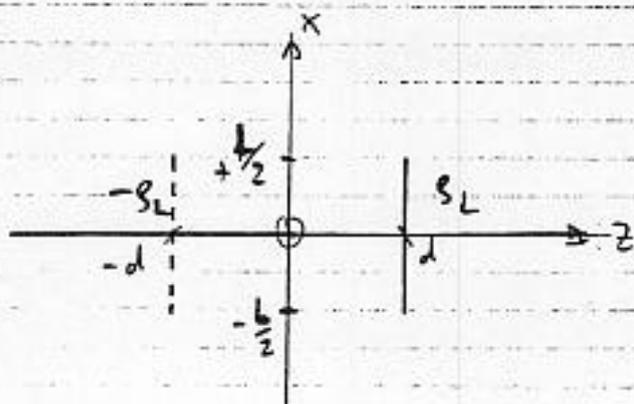


Beispiellösung: KEINE Garantie auf Vollständigkeit und Richtigkeit

bei $z=0^+$: Senkrecht-Einfall, weil Ebene so gut leitet

1.2. Idee: Spiegelungsprinzip:

$$s_L = \frac{Q}{L} = \text{konst}$$



a. Im Halbraum $z < 0$ ist keine Ladung vorhanden $\Rightarrow \nabla \phi = \text{konst}$

Da Ebene bei $z=0$ geerdet ist, muss $\phi=0$ sein

b. $z \geq 0$:

$$\text{allg. } \gamma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_Q \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dQ$$

$$dQ = s_L dx'$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{s_L}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dx' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{-s_L}{|\vec{r}-\vec{r}''|} dx''$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$\vec{r}' = x'\vec{e}_x + d\vec{e}_z ; \vec{r}'' = x''\vec{e}_x - d\vec{e}_z$$

1.2. b

$$\varphi = \frac{Q_L}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left\{ \int_{x' = -\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{dx'}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2 + (z+d)^2}} - \int_{x'' = -\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{dx''}{\sqrt{(x-x'')^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right\}$$

$$\text{Anhang: } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2+a^2} \right) + C$$

$$\text{Sub: } u = x - x' \rightarrow du = -dx'$$

$$x' = -\frac{L}{2} \rightarrow u = x + \frac{L}{2}$$

$$x' = +\frac{L}{2} \rightarrow u = x - \frac{L}{2}$$

$$v = x - x'' \rightarrow dv = -dx''$$

$$x'' = -\frac{L}{2} \rightarrow v = x + \frac{L}{2}$$

$$x'' = +\frac{L}{2} \rightarrow v = x - \frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{Q_L}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left\{ - \int_{u=x+\frac{L}{2}}^{x-\frac{L}{2}} \frac{du}{\sqrt{u^2 + y^2 + (z+d)^2}} + \int_{v=x+\frac{L}{2}}^{x-\frac{L}{2}} \frac{dv}{\sqrt{v^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right\}$$

$$= \frac{Q_L}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left\{ \ln \left(\frac{x+\frac{L}{2} + \sqrt{(x+\frac{L}{2})^2 + y^2 + (z+d)^2}}{x-\frac{L}{2} + \sqrt{(x-\frac{L}{2})^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right) + \ln \left(\frac{x-\frac{L}{2} + \sqrt{(x-\frac{L}{2})^2 + y^2 + (z+d)^2}}{x+\frac{L}{2} + \sqrt{(x+\frac{L}{2})^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right) \right\}$$

$$\text{mit } Q_L = \frac{Q}{L}$$

$$\varphi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \cdot \ln \frac{(x+\frac{L}{2} + \sqrt{(x+\frac{L}{2})^2 + y^2 + (z+d)^2})(x-\frac{L}{2} + \sqrt{(x-\frac{L}{2})^2 + y^2 + (z+d)^2})}{(x-\frac{L}{2} + \sqrt{(x-\frac{L}{2})^2 + y^2 + (z+d)^2})(x+\frac{L}{2} + \sqrt{(x+\frac{L}{2})^2 + y^2 + (z+d)^2})}$$

1.3. \vec{E} bei $z=0^+$: \vec{E} tritt senkrecht in Leitende Ebene ein $\Rightarrow \vec{E}$ hat bei $z=0^+$ nur z -Komponente

1.3. Coulombsches Gesetz:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_Q \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dQ$$

hier: $\vec{E} = \frac{Q_L}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{(x-x')\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (z-d)\vec{e}_z}{[(x-x')^2 + y^2 + (z-d)^2]^{3/2}} dx' \dots \right.$
 $\dots - \int_{x'=-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{(x-x'')\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (z+d)\vec{e}_z}{[(x-x'')^2 + y^2 + (z+d)^2]^{3/2}} dx'' \left. \right\}$

$$\vec{E} = \frac{Q_L}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{0 \cdot \vec{e}_x + 0 \cdot \vec{e}_y - 2d \vec{e}_z}{[(x-x')^2 + y^2 + d^2]^{3/2}} dx' = -\frac{Q_L \cdot 2d}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{dx'}{[(x-x')^2 + y^2 + d^2]^{3/2}}$$

$$= + \frac{Q_L \cdot d}{2\pi\epsilon_0} \int_{x+\frac{L}{2}}^{x-\frac{L}{2}} \frac{du}{[u^2 + y^2 + d^2]^{3/2}} \vec{e}_z$$

Anhang: $\int \frac{dx}{[x^2+a^2]^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2+a^2}} + C$

$$\vec{E}(x, y, z=0) = \frac{Q \cdot d}{2\pi\epsilon_0 \cdot z} \left\{ \frac{x-\frac{L}{2}}{(y^2+d^2) \sqrt{(x-\frac{L}{2})^2 + y^2 + d^2}} - \frac{x+\frac{L}{2}}{(y^2+d^2) \sqrt{(x+\frac{L}{2})^2 + y^2 + d^2}} \right\}$$

4 Es gilt: $D_{n1} - D_{n2} = \sigma$; Normalkomponente = z-Komponente!

$$\Rightarrow \epsilon_0 \cdot \vec{E}_z(z=0^+) - \epsilon_0 \cdot \vec{E}_z(z=0^-) = \sigma(x, y)$$

$\Rightarrow = 0$, weil kein E-Feld für $z < 0$!

$$\Rightarrow \sigma(x, y) = \frac{Q \cdot d}{2\pi L} \left\{ \frac{x-\frac{L}{2}}{(y^2+d^2) \sqrt{(x-\frac{L}{2})^2 + y^2 + d^2}} - \frac{x+\frac{L}{2}}{(y^2+d^2) \sqrt{(x+\frac{L}{2})^2 + y^2 + d^2}} \right\}$$

< 0 , weil $x+\frac{L}{2} > x-\frac{L}{2}$! (Nenn $x \geq 0$!)

Zusatzatz

1. Z. 1 elektr. Potential $\varphi_{a \rightarrow b} = \frac{W_{a \rightarrow b}}{q_0 \cdot \text{Probekladung}}$

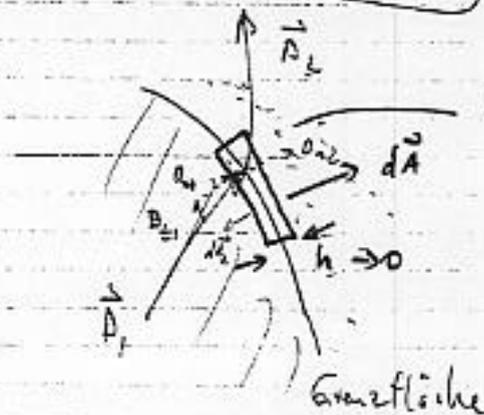
wobei $W_{a \rightarrow b}$: Arbeit um Probekladung q_0 vom Plat a zu Plat b zu transportieren

$$\Rightarrow q_0 = \text{konst}$$

$W_{a \rightarrow b}$ ist immer stetig

$$\Rightarrow \varphi \text{ ist immer stetig}$$

1. Z. 2



Gaußscher Zylinder mit
Oberflächen \vec{A} und
Dicke $h \rightarrow 0$

Gaußscher Satz: $\iint_{\text{Oberfläche}} \vec{D} d\vec{A} = Q =$

Für $h \rightarrow 0$: $\iint_{\text{Oberfläche}} \vec{D} d\vec{A} = \sigma \cdot \Delta A$

kann nur noch Flächenladungsdichte da sein sowie
nur noch "Deckel" des Zylinders:

$$\Rightarrow \vec{D}_1 \cdot \Delta \vec{A}_1 + \vec{D}_2 \cdot \Delta \vec{A}_2 = \sigma \cdot \Delta A \quad ; \quad \Delta \vec{A} = \vec{n} \cdot \Delta A$$

$$\vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 \cdot \Delta A + \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2 \cdot \Delta A = \sigma \cdot \Delta A$$

$$\Rightarrow D_{n1} \cdot \Delta A + D_{n2} \cdot \Delta A = \sigma \cdot \Delta A$$

$\Delta \vec{A}_1$ hat entgegengesetzte Richtung wie $\Delta \vec{A}_2$! \Rightarrow

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma$$

1.2.3.

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi:$$

bei $z=0^+$ steht \vec{E} senkrecht auf der Ebene

$\Rightarrow \vec{E}$ hat nur z -Komponente bei $z=0^+$

$$\Rightarrow \vec{E}(x, y, z=0^+) = - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z \right|_{z=0}$$

$$\varphi = \frac{q_L}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_{x'=-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{dx'}{[(x-x')^2 + y^2 + (z-d)^2]^{3/2}} - \int_{x''=-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{dx''}{[(x-x'')^2 + y^2 + (z+d)^2]^{3/2}} \right\} \Bigg|_{z=0}$$

zische Differentiation unter Integral! ∇

$$\vec{E}(x, y, z=0^+) = - \frac{q_L}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_{x'=-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{\partial}{\partial z} [(x-x')^2 + y^2 + (z-d)^2]^{-3/2} dx' - \dots \dots - \int_{x''=-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{\partial}{\partial z} [(x-x'')^2 + y^2 + (z+d)^2]^{-3/2} dx'' \right\} \Bigg|_{z=0}$$

2. Aufgabe

2.1

$$R = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{l}{A}$$

innerer Kupferleiter:

$$R_i = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{L}{\pi \cdot R_i^2}$$

äußeres Kupferleiter

$$R_a = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{L}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

2.2.

$$\text{vgl. hier: } dR = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{dl}{A}$$

A: Zylinderoberfläche = $2\pi \cdot r \cdot L$

$dl = dr$ Radial!

$$\Rightarrow dR = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{dr}{2\pi r L}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{\gamma \cdot 2\pi L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr = \frac{1}{2\pi L \gamma} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$G = \frac{1}{R} = \frac{2\pi L \gamma}{\ln R_2/R_1}$$

2.3.

$$C = \frac{dQ}{dU} = \frac{\iint \vec{D} \cdot d\vec{A}}{U_0} \Rightarrow \text{Bestimme } \vec{D}!$$

$$\vec{g} = \chi \cdot \vec{E} = \frac{\chi}{\epsilon} \cdot \vec{D}$$

\uparrow
 $\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$

$\chi_{cu} \rightarrow \infty \Rightarrow \vec{g}$ tritt senkrecht aus innerer Elektrode aus $\Rightarrow \vec{g}$ hat nur radiale Richtung!

$$|\vec{g}| = \frac{I}{A} = \frac{U_0/R}{A} = \frac{U_0}{\frac{1}{2\pi L \gamma} \ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{1}{A} = \frac{U_0 \cdot 2\pi \gamma \cdot L}{\ln R_2/R_1} \cdot \frac{1}{2\pi r L}$$

$$\Rightarrow \vec{g} = \frac{U_0 \cdot \gamma}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{1}{r} \cdot \vec{e}_r$$

2.3

$$\vec{D} = \frac{\epsilon}{s} \cdot \vec{g} = \frac{u_0}{\epsilon_0 \epsilon_x \ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{1}{s} \vec{e}_s$$

$$C = \frac{\oint \vec{D} \cdot d\vec{A}}{u_0} = \frac{\iint \frac{u_0}{\epsilon_0 \epsilon_x \ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{1}{s} \vec{e}_s \cdot d\vec{A}}{u_0} =$$

Zylinderkoordinat: $d\vec{A} = s d\phi \cdot dz \vec{e}_s$

$$C = \frac{\frac{u_0}{\epsilon_0 \epsilon_x \ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L \frac{1}{s} \vec{e}_s \cdot s d\phi dz \vec{e}_s}{u_0} \quad ; \quad \vec{e}_s \cdot \vec{e}_s = 1$$

$$C = \frac{2\pi L}{\epsilon_0 \epsilon_x \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

2.4 $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$

$$\vec{D} = \frac{u_0}{\epsilon_0 \epsilon_x \ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{1}{s} \vec{e}_s$$

Anhang: $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{s} \frac{\partial \{s A_s\}}{\partial s} + \frac{1}{s} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

- hier: \vec{D} hat nur s -Komponente

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{D} = \frac{1}{s} \frac{\partial \{s \cdot D_s\}}{\partial s} = \frac{1}{s} \cdot \frac{\partial \frac{u_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}}{\partial s} = 0 \quad \text{keine Raumladung}$$

Zusatzaufgaben

1.8.1 Es gilt: $\vec{g} = \chi \cdot \vec{H}$

Grenzflächenbedingung: $E_{t1} = E_{t2}$

Im Speziellen gilt also:

$$g_t = \chi \cdot E_t$$

Für den ∞ gut leitenden Kupferleiter $E_t(r=R_i^-)$

gilt $\chi \rightarrow \infty$,

Demit wenn g_t nicht $\rightarrow \infty$ divergiert

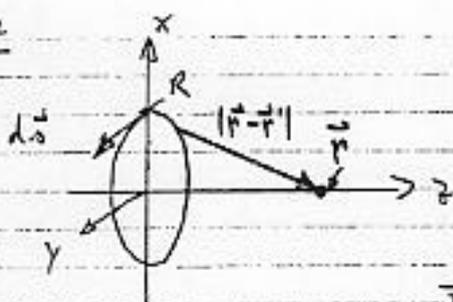
muß $E_t(r=R_i^-) \equiv 0$ sein

$$\Rightarrow E_t(r=R_i^+) \equiv 0 \Rightarrow g_t(R_i^+) \equiv 0$$

$\Rightarrow \vec{g}$ hat nur Normalkomponente bei $r=R_i^+$

3. Aufgabe

3.1:



Biot-Savart:
$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Feld auf z-Achse!

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= z \vec{e}_z \\ \vec{r}' &= R \cdot \vec{e}_s(\phi') \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{r} - \vec{r}' = z \vec{e}_z - R \vec{e}_s(\phi')$$

$$d\vec{s} = R \vec{e}_\phi(\phi') d\phi'$$

$$\Rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{R \vec{e}_\phi(\phi') \times [z \vec{e}_z - R \vec{e}_s(\phi')]}{[z^2 + R^2]^{3/2}} d\phi'$$

$$\vec{e}_\phi(\phi') \times \vec{e}_z = \vec{e}_s(\phi')$$

$$\vec{e}_\phi(\phi') \times \vec{e}_s(\phi') = -\vec{e}_z$$

$$\vec{H}(z) = \frac{I}{4\pi} \left\{ \underbrace{\int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{Rz \vec{e}_s(\phi')}{[z^2 + R^2]^{3/2}} d\phi'}_{=?} + \underbrace{\int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{R^2 \vec{e}_z}{[z^2 + R^2]^{3/2}} d\phi'}_{= 2\pi \frac{R^2}{[z^2 + R^2]^{3/2}} \vec{e}_z} \right\}$$

→ kart. Koordinaten

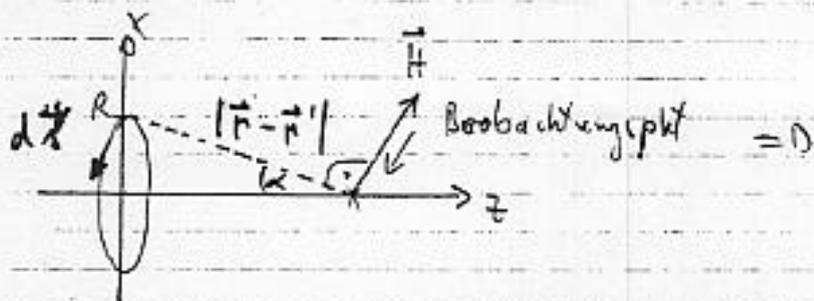
$$\vec{e}_s(\phi') = -\sin\phi' \vec{e}_x + \cos\phi' \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{Rz}{[z^2 + R^2]^{3/2}} \vec{e}_s(\phi') d\phi' = \frac{Rz}{[z^2 + R^2]^{3/2}} \int_{\phi'=0}^{2\pi} [-\sin\phi' \vec{e}_x + \cos\phi' \vec{e}_y] d\phi' = 0$$

$$\text{NB: } \int_{x=0}^{2\pi} \sin x dx = 0$$

$$\Rightarrow \vec{H}(z) = \frac{I}{2} \frac{R^2}{[z^2 + R^2]^{3/2}} \vec{e}_z \quad \text{q.e.d.}$$

3.1 alternativ



Biot-Savart:
$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\Rightarrow \vec{H} \perp \text{zu } d\vec{s} \text{ und } (\vec{r} - \vec{r}')$$

1. Symmetrie: $\vec{H}(z)$ hat nur \vec{e}_z -Richtung!

2. Geometrie: $H_z = |\vec{H}(\vec{r})| \cdot \sin \alpha$ (Bild oben rechts)

$$\sin \alpha = \frac{R}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{R^2 + z^2}$$

$$\Rightarrow H_z = \frac{|\vec{H}(\vec{r})| \cdot R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

mit 1.:
$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{|d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}')|}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \vec{e}_z$$

$$= \frac{I}{4\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{|d\vec{s}| \cdot |\vec{r} - \vec{r}'| \cdot \sin(\angle(d\vec{s}, \vec{r} - \vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \vec{e}_z$$
 $\overset{90^\circ}{\text{siehe oben}}$

$$= \frac{I}{4\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{|d\vec{s}|}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \vec{e}_z \quad ; \quad |d\vec{s}| = R d\phi'$$

mit 2.:
$$\vec{H}(z) = \frac{I}{4\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{R d\phi'}{(R^2 + z^2)} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \vec{e}_z \quad ; \quad \int_{\phi'=0}^{2\pi} d\phi' = 2\pi$$

$$\Rightarrow \vec{H}(z) = \frac{I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z \quad \text{q.e.d.}$$

3.2.

Spule hat N Windungen \Rightarrow Spulenstrom $= N \cdot I$

$$\text{Strombeleg: } k_0 = \frac{dI}{dz'} = \frac{N \cdot I}{L} = \text{konst!}$$

$$\boxed{k_0 = \frac{N \cdot I}{L}}$$

homogen

3.3. verschiebe Kreisring um Ursprung: $z \rightarrow z - z'$
und summiere über alle Kreisringe

$$\vec{H} = \int_{z'=0}^L \frac{k_0}{z} \frac{R^2}{[R^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dz' \vec{e}_z$$

$$\text{Sub: } u = z - z' \rightarrow du = -dz'$$

$$z'=0 \rightarrow u = z; \quad z'=L \rightarrow u = z - L$$

$$\vec{H} = \frac{k_0 \cdot R^2}{z} \vec{e}_z \int_{z=L}^z \frac{1}{[R^2 + u^2]^{3/2}} du = \frac{k_0 R^2}{z} \cdot \left[\frac{u}{R^2 \sqrt{R^2 + u^2}} \right]_{z-L}^z \vec{e}_z$$

Anhang

$$= \frac{k_0 R^2}{z} \cdot \left[\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{R^2 + (z-L)^2}} \right] \vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{H}(z) = \frac{I \cdot N}{L \cdot z} \vec{e}_z \left[\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{R^2 + (z-L)^2}} \right]}$$

$$3.4. \text{ Spulen mitte: } z = \frac{L}{2} \Rightarrow \vec{H}(z) = \frac{I \cdot N}{L \cdot z} \vec{e}_z \left[\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (\frac{L}{2})^2}} + \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (\frac{L}{2})^2}} \right]$$

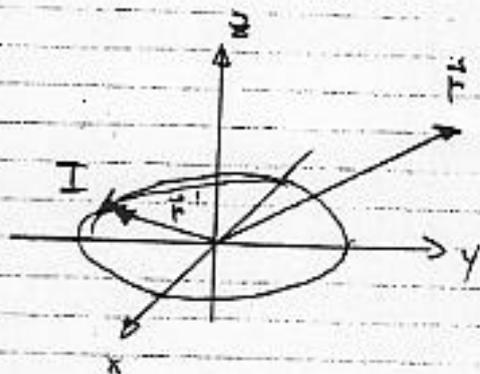
$$L \gg R \Rightarrow \frac{L}{2} \gg R \Rightarrow \vec{H}(z) = \frac{I \cdot N}{L \cdot z} \vec{e}_z \left[\frac{\frac{L}{2}}{\frac{L}{2}} + \frac{\frac{L}{2}}{\frac{L}{2}} \right]$$

$$\vec{H}(z) = \frac{I \cdot N}{L} \cdot \frac{1}{2} \cdot [1 + 1] \vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{H}(z) = \frac{I \cdot N}{L} \vec{e}_z}$$

Zusatzaufgabe

3.8.1



$$\vec{r} = s \vec{e}_s(\phi) + z \vec{e}_z$$

$$\vec{r}' = R \cdot \vec{e}_s(\phi')$$

$$d\vec{s} = R \cdot d\phi' \vec{e}_\phi(\phi')$$

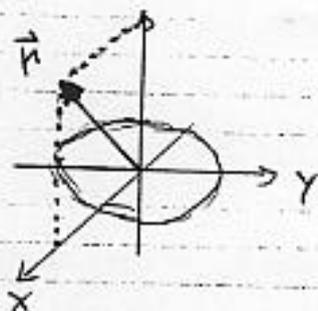
allg.: $\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ Biot - Savart

$$\vec{H}(s, z) = \frac{I}{4\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{R d\phi' \vec{e}_\phi(\phi') \times (s \vec{e}_s(\phi) - R \vec{e}_s(\phi') + z \vec{e}_z)}{[s^2 + R^2 + z^2 - 2sR \cos(\phi - \phi')]^{3/2}}$$

$$\vec{e}_\phi(\phi') \times [s \vec{e}_s(\phi) - R \vec{e}_s(\phi') + z \vec{e}_z] = \dots$$

$$\dots = \underbrace{s \cdot \vec{e}_\phi(\phi') \times \vec{e}_s(\phi)}_{?} + R \cdot \vec{e}_z + z \vec{e}_s(\phi')$$

Kniff: Symmetrie: \vec{H} muß unabhängig von ϕ sein
 \Rightarrow Setze o.B.d.A. $\phi = 0 \Rightarrow$ Beobachtungspkt
 \vec{r} wird über x-Achse gedreht!



Anhang: $\vec{e}_s(\phi=0) = \vec{e}_x$

$$\vec{e}_\phi(\phi') = -\sin\phi' \vec{e}_x + \cos\phi' \vec{e}_y$$

Durch diesen Trick sind wir in kart. Koord.

Dort sind die Einheitsvektoren unabhängig
von Winkel!

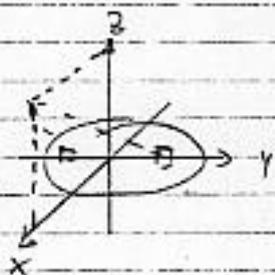
$$\text{Bz. 1} \Rightarrow \left. \vec{e}_\phi(\phi') \times \vec{e}_s(\phi) \right|_{\phi=0} = (-\sin\phi' \vec{e}_x + \cos\phi' \vec{e}_y) \times \vec{e}_x = -\cos\phi' \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{H}(s, z) \Big|_{\phi=0} = \frac{\mathbb{I}}{4\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{R \cdot \vec{e}_z + R z \vec{e}_s(\phi') - \cos\phi' \vec{e}_z \cdot R s}{[s^2 + R^2 + z^2 - 2sR \cos\phi']^{3/2}} d\phi'$$

$$\vec{e}_s(\phi') = \cos\phi' \vec{e}_x + \sin\phi' \vec{e}_y$$

$$\vec{H}(s, z) \Big|_{\phi=0} = \frac{\mathbb{I}}{4\pi} \cdot R \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{\vec{e}_z (R - s \cos\phi') + z \cdot \cos\phi' \vec{e}_x + z \sin\phi' \vec{e}_y}{[s^2 + R^2 + z^2 - 2sR \cos\phi']^{3/2}} d\phi'$$

Symm.:



für $\phi=0$ Beobachtungspkt. über x -Achse
heben sich die y -Komponenten auf (nur die!)

Setze nun $\phi \neq 0 \Rightarrow \vec{e}_x \rightarrow \vec{e}_s(\phi)$

$$\Rightarrow \vec{H}(s, z) = \frac{\mathbb{I} \cdot R}{4\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{\vec{e}_z (R - s \cos\phi') + z \cos\phi' \vec{e}_s(\phi)}{[s^2 + R^2 + z^2 - 2sR \cos\phi']^{3/2}} d\phi'$$

wichtig: auf z -Achse $\Rightarrow s=0$

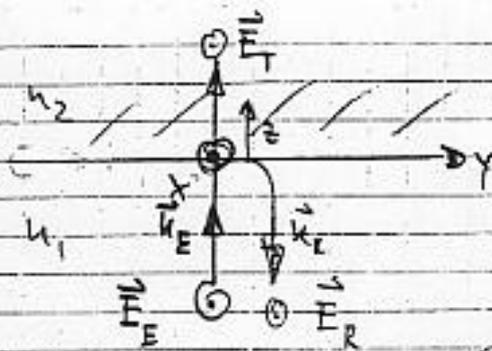
$$\Rightarrow \vec{H}(z) = \frac{\mathbb{I} R}{4\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{R \vec{e}_z + z \cos\phi' \vec{e}_s(\phi)}{[R^2 + z^2]^{3/2}} d\phi'$$

mit $\int_0^{2\pi} \cos\phi' d\phi' = 0$:

$$\vec{H}(z) = \frac{\mathbb{I}}{2z} \cdot \frac{R^2}{[R^2 + z^2]^{3/2}} \vec{e}_z$$

4. Aufgabe

4.1.



$$= \text{vgl. } |k| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{\lambda \cdot f} = \frac{2\pi}{c} = \frac{2\pi}{c_0} = \frac{2\pi n}{c_0}$$

$$\Rightarrow \vec{k}_E = \frac{2\pi n_1}{\lambda} \cdot \vec{e}_z ; \vec{k}_R = -\frac{2\pi n_1}{\lambda} \cdot \vec{e}_z ; \vec{k}_T = \frac{2\pi n_2}{\lambda} \cdot \vec{e}_z ; \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

↑
entgegengesetzt!

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{H}_E = E_E \cdot e^{-j \frac{2\pi n_1}{\lambda} \cdot z} \cdot \vec{e}_x \\ \vec{H}_R = E_R \cdot e^{+j \frac{2\pi n_1}{\lambda} \cdot z} \cdot \vec{e}_x \\ \vec{H}_T = E_T \cdot e^{-j \frac{2\pi n_2}{\lambda} \cdot z} \cdot \vec{e}_x \end{cases}$$

$$\text{NB: } \vec{k}_E \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2\pi n_1}{\lambda} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \frac{2\pi n_1}{\lambda}$$

λ : Wellenlänge im Vakuum

4.2. $\text{rot } \vec{E} = -\mu_0 j\omega \vec{H}$ mit harmonische Welle: $\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow j\omega$

$$\Rightarrow \vec{H}_E = -\frac{1}{j\omega \mu_0} \cdot \text{rot } \vec{E}_E$$

$$= -\frac{1}{j\omega \mu_0} \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_E \cdot e^{j \frac{2\pi n_1}{\lambda} z} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{j\omega \mu_0} \cdot [\vec{e}_x \cdot 0 - \vec{e}_y \left(\frac{\partial}{\partial x} 0 - \frac{\partial}{\partial z} E_E e^{-j \frac{2\pi n_1}{\lambda} z} \right) + \vec{e}_z \cdot 0]$$

$$\vec{H}_E = -\frac{1}{j\omega \mu_0} \vec{e}_y \cdot E_E \cdot e^{-j \frac{2\pi n_1}{\lambda} z} \cdot (-j \frac{2\pi n_1}{\lambda})$$

$$\vec{H}_E = \frac{2\pi n_1 E_E}{\omega \mu_0} \cdot e^{-j \frac{2\pi n_1}{\lambda} z} \cdot \vec{e}_y$$

4.2. analog:

$$\vec{H}_R = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \vec{e}_y \cdot \vec{E}_R \cdot e^{+j\frac{2\pi n_1}{\lambda} z} \cdot j\frac{2\pi n_1}{\lambda}$$

$$\vec{H}_K = -\frac{2\pi n_1 E_K}{\omega\mu_0} \cdot e^{+j\frac{2\pi n_1}{\lambda} z} \vec{e}_y$$

$$\vec{H}_T = \frac{2\pi n_2 E_T}{\omega\mu_0} e^{-j\frac{2\pi n_2}{\lambda} z} \vec{e}_y$$

4.3. • Grenzflächenbedingung für E: $E_{\text{tan}1} \stackrel{!}{=} E_{\text{tan}2} \quad ; z=0$ Tangentialkomponente: x, y -Komponente bei $z=0$ hier: x -Komponente

$$E_{E_x} + E_{R_x} \stackrel{!}{=} E_{T_x} \quad | z=0$$

$$\underline{E_E + E_R = E_T} \quad (I)$$

• Grenzflächenbedingung für H: $H_{\text{tan}1} \stackrel{!}{=} H_{\text{tan}2} \quad | z=0$

$$\vec{H}_{E_y} + \vec{H}_{R_y} \stackrel{!}{=} \vec{H}_{T_y} \quad | z=0$$

$$\frac{2\pi n_1 E_E}{\omega\mu_0} - \frac{2\pi n_1 E_R}{\omega\mu_0} \stackrel{!}{=} \frac{2\pi n_2 E_T}{\omega\mu_0}$$

$$\Leftrightarrow \underline{n_1 E_E - n_1 E_R = n_2 E_T} \quad (II)$$

4.3. $\underline{r} := \frac{E_R}{E_E} \quad (\text{III})$

aus (I): $\underline{E}_T = \underline{E}_E + \underline{E}_R$ in (II):

$$n_1 \underline{E}_E - n_1 \underline{E}_R = n_2 \underline{E}_E + n_2 \underline{E}_R$$

$$\underline{E}_E (n_1 - n_2) = \underline{E}_R (n_1 + n_2) \quad | : \underline{E}_E$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\underline{E}_R}{\underline{E}_E} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \underline{r}}$$

4.4. $\underline{t} := \frac{E_T}{E_E} \quad (\text{IV})$

aus (I): $\underline{E}_R = \underline{E}_T - \underline{E}_E$ in (II):

$$n_1 \underline{E}_E - n_1 \underline{E}_T + n_1 \underline{E}_E = n_2 \underline{E}_T$$

$$\Leftrightarrow \underline{E}_E (n_1 + n_1) = \underline{E}_T (n_1 + n_2) \quad | : \underline{E}_E$$

$$\boxed{\frac{E_T}{E_E} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = \underline{t}}$$

↑
(IV)

4.3.1. $x \rightarrow 0 \Rightarrow \underline{E}_{\tan z} (z=0^+) \stackrel{!}{=} 0$

aus (I): $\underline{E}_E + \underline{E}_c \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{\underline{r} = \frac{E_R}{E_E} = -1}$

\Rightarrow TOTAL REFLEXION + 180° PHASENSPRUNG

4.2.2

$$|r|^2 = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2}$$

$$|t|^2 = \frac{4n_1^2}{(n_1 + n_2)^2}$$

$$(*) \quad |r|^2 + |t|^2 = \frac{n_1^2 - 2n_1n_2 + n_2^2 + 4n_1^2}{(n_1 + n_2)^2} = \frac{5n_1^2 - 2n_1n_2 + n_2^2}{(n_1 + n_2)^2} \neq 1$$

ABER: $|r| + |t| = \frac{n_1 - n_2 + 2n_1}{n_1 + n_2} = 1$

Widerspruch zum Energieerhaltungssatz?

\vec{S} : Poynting Vektor

Es muß gelten: $|\vec{S}_E| - |\vec{S}_R| \stackrel{!}{=} |\vec{S}_T|$ Energieerhaltung

$$\vec{S}_E = \vec{E} \times \vec{H}_E = \frac{E_E^2 \cdot 2\pi n_1}{\lambda \omega \mu_0} \cdot \vec{e}_z e^{-j \frac{2\pi n_1}{\lambda} z}$$

$$\vec{S}_R = \vec{E}_R \times \vec{H}_R = -\frac{E_R^2 \cdot 2\pi n_1}{\lambda \omega \mu_0} \cdot \vec{e}_z e^{+j \frac{2\pi n_1}{\lambda} z}$$

$$\vec{S}_T = \frac{E_T^2 \cdot 2\pi n_2}{\lambda \omega \mu_0} \cdot \vec{e}_z e^{-j \frac{2\pi n_2}{\lambda} z}$$

$$\Rightarrow |\vec{S}_E| - |\vec{S}_R| \stackrel{!}{=} |\vec{S}_T|$$

also: $\frac{E_E^2 \cdot 2\pi n_1}{\lambda \omega \mu_0} - \frac{E_R^2 \cdot 2\pi n_1}{\lambda \omega \mu_0} = \frac{E_T^2 \cdot 2\pi n_2}{\lambda \omega \mu_0}$

$$\Leftrightarrow n_1 E_E^2 - n_1 E_R^2 = n_2 E_T^2 \quad ; r := \frac{E_R}{E_E} \quad ; t := \frac{E_T}{E_E}$$

$$\Leftrightarrow n_1 - n_1 \underbrace{\left(\frac{E_R}{E_E}\right)^2}_{=|r|^2} = n_2 \underbrace{\left(\frac{E_T}{E_E}\right)^2}_{=|t|^2} \quad | : n_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{n_2}{n_1} |t|^2 + |r|^2 = 1} \quad \text{Energieerhaltung!} \Rightarrow (*) \text{ muß } \neq 1$$

UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN
Fachbereich Elektrotechnik
Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik
und Optische Kommunikationstechnik
Prof. Dr.-Ing. R. Zengerle

03.04.1998

Diplomhauptprüfung (WS 97/98)

Theoretische Elektrotechnik III

1. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
2. Außer Schreib- und Zeichenmaterial sind keine Hilfsmittel zugelassen (auch kein Taschenrechner)!
3. Die jeweils maximal erreichbare Punktzahl pro Teilaufgabe ist in Klammern am Ende jeder Teilaufgabe angegeben.
4. Es sind alle Aufgaben zu bearbeiten! Die Zusatzaufgaben sind optional.
5. Verwenden Sie ausschließlich die Ihnen ausgeteilten Doppelbögen; nur diese werden bewertet. Trennen Sie die Doppelbögen nicht. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Doppelbogen!
6. Schreiben Sie auf jeden Doppelbogen Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Aufgabe (inklusive der Teilaufgabe), die Sie bearbeiten!
7. Zeigen Sie den gewählten Lösungsweg auf. Geben Sie insbesondere Zwischenergebnisse und Begründungen an. Nur eindeutige Aussagen können bewertet werden!
8. Einige häufig gebrauchte Formeln finden Sie im Anhang.
9. **VIEL ERFOLG!!!**

1. Aufgabe: Stationäres Strömungsfeld in einem Halbleiter (10 Punkte + 3 Zusatzpunkte)

In Abb. 1.1 ist ein Ausschnitt aus einem n-Halbleiter mit der **konstanten** Leitfähigkeit $\kappa > 0$ und der **konstanten** Dielektrizitätszahl $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r > 0$ zu sehen. Der n-Halbleiter kann in der $\pm y$ -Richtung, $\pm z$ -Richtung sowie in der $+x$ -Richtung als unendlich ausgedehnt angenommen werden. An der Halbleiteroberfläche ist ein **halbkugelförmiger** Kontakt an der Stelle $y = a$ mit Radius R angebracht, über den der eingeprägte Strom I dem Halbleiter zugeführt wird. Der Strom verteilt sich gleichmäßig über den halbkugelförmigen Kontakt. Der halbkugelförmige Kontakt ist so hoch dotiert ($n+$ Gebiet, „entartet dotiert“), daß er als perfekter Leiter mit der Leitfähigkeit $\kappa \rightarrow \infty$ angenommen werden kann.

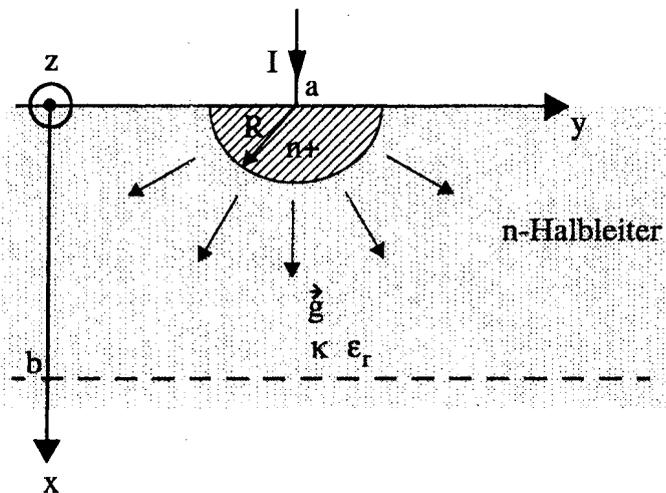


Abb. 1.1: Geometrie des Halbleiters

- 1.1 Berechnen Sie die Stromdichte $\vec{g}(x, y, z)$ als Funktion des Stromes I und des Ortes im n-Halbleiter, welcher in $\pm y$ -Richtung und $+x$ -Richtung unendlich ausgedehnt ist! (3 Punkte)
- 1.2 Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(x, y, z)$ im n-Halbleiter! (1 Punkt)
- 1.3 Bestimmen Sie das elektrische Potential ϕ im n-Halbleiter in einer Ebene $x = \text{konst.}$! Nehmen Sie hierzu an, daß das halbkugelförmige $n+$ Gebiet auf dem Potential $\phi_0 = 0$ liegt. (3 Punkte)
- 1.4 Berechnen Sie die Raumladungsdichte $\rho(x, y, z)$ im n-Halbleiter! (3 Punkte)

Zusatzaufgabe:

- 1.Z.1 An der Stelle $x = b$ parallel zur y - z -Ebene werde nun ein Aluminiumkontakt mit unendlich guter Leitfähigkeit angebracht (in Abb. 1.1 gestrichelt gezeichnet). Dieser Kontakt sei in $\pm y$ und $\pm z$ -Richtung unendlich ausgedehnt. Berechnen Sie $\vec{g}(x, y, z)$ im n-Halbleiter ($x < b$)! (3 Punkte)

2. Aufgabe: Magnetfeld eines Stromfadens und eines Streifenleiters (10 Punkte + 3 Zusatzpunkte)

Gegeben sei ein unendlich langer Stromfaden (vgl. Abb. 2.1), der sich parallel zur x-Achse befindet und durch den Punkt $P_0(0, y_0, 0)$ tritt. Ferner sei nach Abb. 2.2 ein Streifenleiter mit der Länge $l_1 \rightarrow \infty$ und der Breite b gegeben. Der Stromfaden und der Streifenleiter werden von dem **zeitabhängigen Strom** $i(t) = I_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$ in positiver x-Richtung durchflossen. Dieser Strom verteilt sich im Falle des Streifenleiters homogen über die Breite b des Streifenleiters. Im Folgenden wird immer die **quasistationäre Näherung** vorausgesetzt!

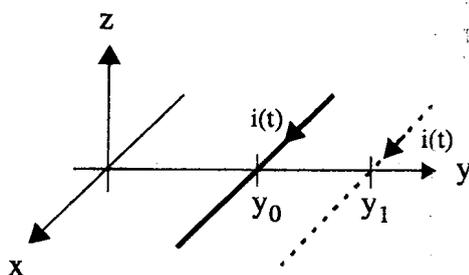


Abb. 2.1: Stromfaden

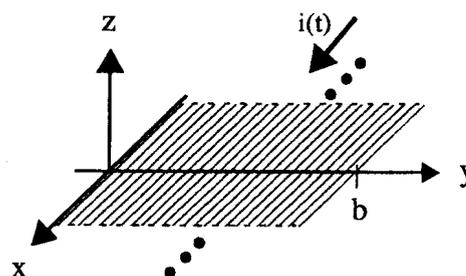


Abb. 2.2: Streifenleiter

- 2.1 Was versteht man unter der „quasistationären Näherung“? Wie lautet das Durchflutungsgesetz allgemein und wie im Fall der quasistationären Näherung? (2 Punkte)
- 2.2 Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{H}(\vec{r})$ des Stromfadens durch $y = y_0$, welcher von dem Strom $i(t) = I_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$ durchflossen wird, siehe Abb. 2.1! (3 Punkte)
- 2.3 Berechnen Sie nun das Magnetfeld $\vec{H}(\vec{r})$ des Streifenleiters nach Abb. 2.2, indem Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe 2.2 verwenden. (4 Punkte)
- 2.4 Das Magnetfeld aus Teilaufgabe 2.3 lässt sich für große Entfernungen von der x-Achse vereinfachen. Geben Sie eine Näherungslösung für das Fernfeld an! (1 Punkt)

Zusatzaufgabe:

- 2.Z.1 Nun sei zu dem in Abb. 2.1 gezeigten Stromfaden noch ein zweiter Stromfaden, welcher durch $y = y_1$ tritt (in Abb. 2.1 gepunktet gezeichnet) und parallel zum linken Stromfaden verläuft, gegeben. Berechnen Sie die charakteristische Größe, welche die Verkopplung der beiden Magnetfelder (hervorgerufen durch die beiden Stromfäden) beschreibt! Sie brauchen nur das zulösende Integral aufzustellen mit allen bekannten Größen! (3 Punkte)

3. Aufgabe: Induktionsgesetz (11 Punkte + 3 Zusatzpunkte)

Eine dreieckige Leiterschleife nach Abb. 3.1 befindet sich in dem **zeit- und ortsabhängigen Magnetfeld** $B(z, t) = B_0 \cdot z^2 \cdot t \cdot \vec{e}_x$ mit $B_0 = \text{const} > 0$. Das Magnetfeld existiere im gesamten Halbraum $y \geq 0$. Die Leiterschleife sei an der Stelle $(0,0,0)$ aufgetrennt, um dort eine Spannung abgreifen zu können. Diese winzige Unterbrechung der Leiterschleife stört die Anordnung nicht. Die weiteren geometrischen Abmessungen der Anordnung sind der Abb. 3.1 zu entnehmen.

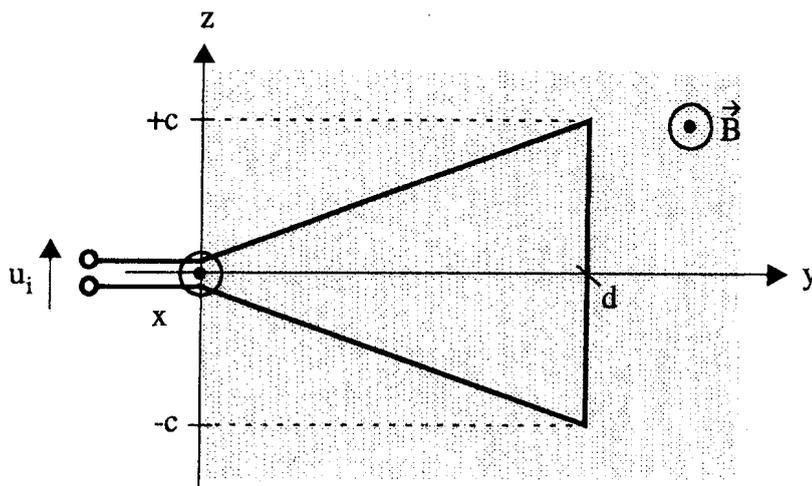


Abb. 3.1: Dreieckige Leiterschleife im Magnetfeld

- 3.1 Berechnen Sie den magnetischen Fluß Φ durch die Leiterschleife nach Abb. 3.1!
(3 Punkte)
- 3.2 Berechnen Sie vorzeichenrichtig die Induktionsspannung u_{i1} der Anordnung nach Abb. 3.1! Begründen Sie Ihre Vorzeichenwahl!
(2 Punkte)
- 3.3 Die Leiterschleife werde nun mit konstanter **Beschleunigung** $a > 0$ in Richtung der positiven y -Achse bewegt. Das Magnetfeld sei immer noch zeit- und ortsabhängig. Berechnen Sie vorzeichenrichtig die Induktionsspannung u_{i2} !
(3 Punkte)
- 3.4 Nun bewege sich die Leiterschleife nicht mehr, sondern sei wieder in dem Zustand wie er in Abb. 3.1 zu sehen ist. Jedoch rotiert die Leiterschleife jetzt um die y -Achse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 **ausgehend von der Konfiguration nach Abb. 3.1**. Berechnen Sie die Induktionsspannung u_{i3} !
(3 Punkte)

Zusatzaufgabe:

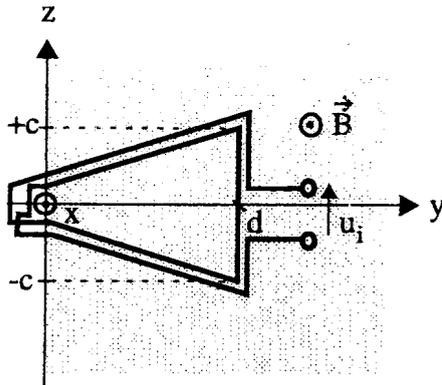


Abb. 3.2: Leiterschleife mit Überkreuzung

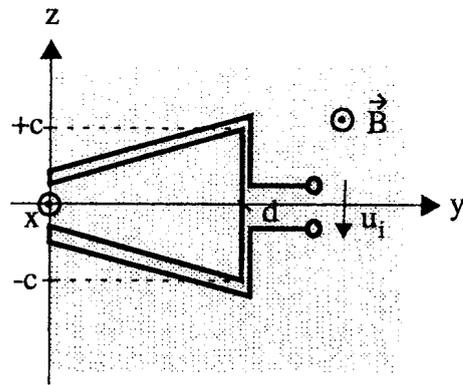


Abb. 3.3: Leiterschleife ohne Überkreuzung

3.Z.1 Nun ist das Magnetfeld **ortsunabhängig** und es gilt: $B(t) = B_1 \cdot t^2 \cdot \hat{z}_x$ mit $B_1 = \text{const} > 0$. Die etwas versetzt gezeichneten Leiterbahnen sind als genau über der inneren dreieckigen Leiterschleife liegend anzusehen. Berechnen Sie vorzeichenrichtig die induzierte Spannungen u_i für die Anordnungen der Leiterschleifen nach Abb. 3.2 und 3.3. Begründen Sie Ihre Antwort! (3 Punkte)

4. Aufgabe: Harmonische elektromagnetische Wellen (13 Punkte + 3 Zusatzpunkte)

Gegeben sei das magnetische Feld $\vec{H}(z, t)$ einer harmonischen elektromagnetischen Welle, welche sich im Vakuum ausbreitet mit

$$\vec{H}(z, t) = H_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-jkz} \cdot \vec{e}_y; \quad H_0, \omega, k = \text{konst} > 0.$$

- 4.1 Um welche Wellenform handelt es sich! Leiten Sie Ihre Aussage mathematisch her! (2 Punkte)
- 4.2 In welche Richtung und mit welcher Geschwindigkeit breitet sich die Welle aus? Leiten Sie auch hier Ihre Aussage mathematisch her! (3 Punkte)
- 4.3 Berechnen Sie das zum magnetischen Feld $\vec{H}(z, t)$ gehörige elektrische Feld $\vec{E}(z, t)$! (4 Punkte)
- 4.4 Wie muß das elektrische Feld einer zweiten Welle beschaffen sein, damit sich der resultierende Feldvektor, der durch Überlagerung der beiden elektrischen Felder entsteht, in einer Ebene $z = \text{const}$ im Uhrzeigersinn auf einer Kreisbahn dreht (bei Blickrichtung in positive z -Richtung)? Beweisen Sie Ihre Aussage mathematisch! (4 Punkte)

Zusatzaufgabe:

- 4.Z.1 Erklären Sie eine analoge Anordnung, die das Verhalten der Grundwelle in einer Koaxialleitung an einer Grenzfläche mit unterschiedlichem Dielektrikum beschreibt (die Grenzfläche steht senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung, vgl. Abb. 4.1)! Begründen Sie Ihre Antwort! (3 Punkte)

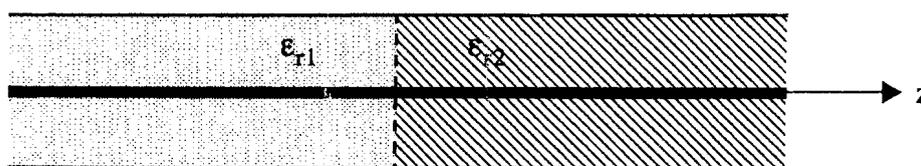


Abb. 4.1: Koaxialleiter mit zwei unterschiedlichen Dielektrika

Formelsammlung

1. Zylinder- und Kugelkoordinaten:

$$\vec{e}_\rho(\phi) = \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\phi \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\phi(\phi) = -\sin\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\phi \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{r}(\phi, \theta, z) = \rho \cdot \vec{e}_\rho(\phi) + z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [x\vec{e}_x + y\vec{e}_y]$$

$$\vec{e}_\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y]$$

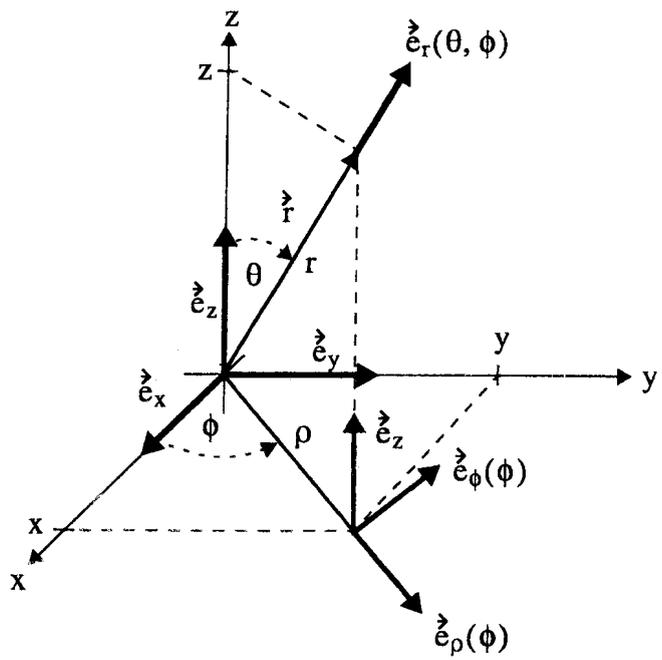
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{e}_r(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{e}_r(\theta, \phi) = \sin\theta\cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\theta\sin\phi \cdot \vec{e}_y + \cos\theta \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{r}(\phi, \theta, z) = r \cdot \vec{e}_r(\theta, \phi)$$



2. Oberflächen- und Volumenelemente:

$$d\vec{A}(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \cdot \vec{e}_r$$

$$dV(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$

$$d\vec{A}(\rho, z, \phi) = \rho d\phi dz \cdot \vec{e}_\rho$$

$$dV(\rho, z, \phi) = \rho d\rho d\phi dz$$

3. Vektoren:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \text{ mit } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$$

4. Divergenz und Rotation in Zylinderkoordinaten

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \{ \rho A_\rho \} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \{ A_\phi \} + \frac{\partial}{\partial z} \{ A_z \}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \hat{e}_\rho \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right] + \hat{e}_\phi \cdot \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] + \hat{e}_z \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right]$$

5. Laplace-Operator und Gradient in Kugelkoordinaten

$$\Delta \varphi(\phi, \theta, z) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \right]$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \cdot \hat{e}_\phi$$

6. Näherungsformeln:

Für kleine Winkel α gilt: $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$ und $\cos \alpha \approx 1$

Reihen: $\sin \phi \approx \phi - \frac{\phi^3}{3!}, \quad \cos \phi \approx 1 - \frac{\phi^2}{2!}, \quad \frac{1}{1 \pm x} \approx 1 \mp x$

7. Integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C,$$

$$\int \frac{x dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + C,$$

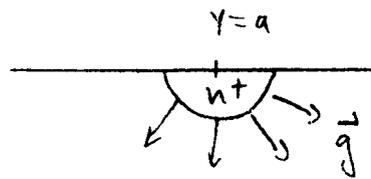
$$\int \frac{dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \cdot \sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

1. Aufgabe

1.1



• n^+ -Gebiet: ∞ gut leitend $\Rightarrow \vec{g}$ steht senkrecht auf Halbkugel

$\Rightarrow \vec{g}$ hat nur radiale Komponente: \vec{e}_r (Symmetrie)

• \vec{g} verteilt sich homogen: $|\vec{g}| = \frac{I}{2\pi r^2}$

• kartesische Koordinaten: $\vec{e}_r = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $r^2 = [x^2+y^2+z^2]$

$$\Rightarrow \vec{g} = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

• Verschiebung in Pkt $y=a$: $y \rightarrow y-a$

$$\vec{g}(x, y, z) = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{[x^2+(y-a)^2+z^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y-a \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \frac{I}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{[x^2+(y-a)^2+z^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y-a \\ z \end{pmatrix}$$

1.3.

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = - \begin{pmatrix} \partial\varphi/\partial x \\ \partial\varphi/\partial y \\ \partial\varphi/\partial z \end{pmatrix}$$

Betrachte nur x-Komp! $\varphi = - \int E_x dx + \varphi_{\text{Bezug}}$

$$\varphi = - \int \frac{I}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{x}{[x^2+(y-a)^2+z^2]^{3/2}} dx + \varphi_{\text{Bezug}}$$

$$\varphi = + \frac{I}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+(y-a)^2+z^2}} + \varphi_{\text{Bezug}}$$

1.3. mit Gebiet hat Potential $\varphi = 0$

also hat Akt $\vec{r} = \begin{pmatrix} R \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ das Potential $\varphi = 0$

$$\Rightarrow \varphi(R, a, 0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{I}{2\pi\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 + 0^2}} = -\varphi_{\text{Bezug}}$$

$$\boxed{\varphi_{\text{Bezug}} = -\frac{I}{2\pi\lambda \cdot a}}$$

- Potential in einer Ebene $x = \text{konst}$ $\Rightarrow x = c$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(y, z) = \frac{I}{2\pi\lambda} \left[\frac{1}{\sqrt{c^2 + (y-a)^2 + z^2}} - \frac{1}{c} \right]}$$

1.4. $\text{div } \vec{D} = \rho$

$$\rho = \text{div } \varepsilon \cdot \vec{E} = \varepsilon \cdot \text{div } \vec{E}$$

$\varepsilon = \text{konst}$

$$\rho = \varepsilon \cdot \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] \quad \text{NB: } \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

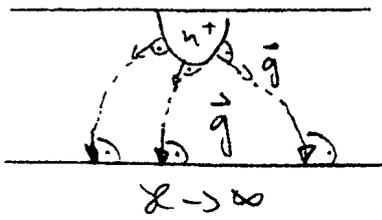
$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{I}{2\pi\lambda} \cdot \frac{1 \cdot [x^2 + (y-a)^2 + z^2]^{-3/2} - \frac{3}{2} [x^2 + (y-a)^2 + z^2]^{-5/2} \cdot 2x \cdot x}{[x^2 + (y-a)^2 + z^2]^3}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{I}{2\pi\lambda} \cdot \frac{[x^2 + (y-a)^2 + z^2]^{-3/2} - \frac{3}{2} [x^2 + (y-a)^2 + z^2]^{-5/2} \cdot 2(y-a) \cdot 1 \cdot (y-a)}{[x^2 + (y-a)^2 + z^2]^3}$$

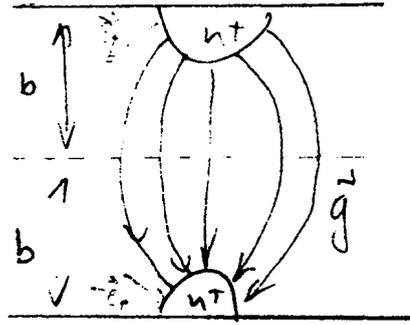
$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{I}{2\pi\lambda} \cdot \frac{[x^2 + (y-a)^2 + z^2]^{-3/2} - \frac{3}{2} [x^2 + (y-a)^2 + z^2]^{-5/2} \cdot 2z \cdot z}{[x^2 + (y-a)^2 + z^2]^3}$$

$$\Rightarrow \rho = \varepsilon \cdot \frac{I}{2\pi\lambda} \cdot \frac{1}{[x^2 + (y-a)^2 + z^2]^3} \left\{ 3 [x^2 + (y-a)^2 + z^2]^{-3/2} - 3 [x^2 + (y-a)^2 + z^2]^{-5/2} [x^2 + (y-a)^2 + z^2] \right\}$$

1.2.1



=



Spiegelungsprinzip

$$\vec{g}_1 = \frac{I}{2\pi r^2} \Rightarrow \boxed{\vec{g}_1(x, y, z) = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{[x^2 + (y-a)^2 + z^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y-a \\ z \end{pmatrix}}$$

• "Spiegel - $u+$ - Gebiet" bei $x=2b$ und $y=a$

$$\vec{g}_2 = - \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{[(x-2b)^2 + (y-a)^2 + z^2]^{3/2}} \cdot \begin{pmatrix} x-2b \\ y-a \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = \frac{I}{2\pi} \left\{ \frac{\begin{pmatrix} x \\ y-a \\ z \end{pmatrix}}{[x^2 + (y-a)^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{\begin{pmatrix} x-2b \\ y-a \\ z \end{pmatrix}}{[(x-2b)^2 + (y-a)^2 + z^2]^{3/2}} \right\}}$$

Kontrolle: an der Stelle $x=b$ darf \vec{g} nur Normal-komponente (+x-komp.) haben

$$\vec{g}(x=b, y, z) = \frac{I}{2\pi} \left\{ \frac{\begin{pmatrix} b \\ y-a \\ z \end{pmatrix}}{[b^2 + (y-a)^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{\begin{pmatrix} -b \\ y-a \\ z \end{pmatrix}}{[b^2 + (y-a)^2 + z^2]^{3/2}} \right\}$$

$$\vec{g}(x=b, y, z) = \frac{I}{2\pi} \left\{ \frac{\begin{pmatrix} 2b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{[b^2 + (y-a)^2 + z^2]^{3/2}} \right\} \quad \checkmark \quad \text{OK}$$

2. Aufgabe

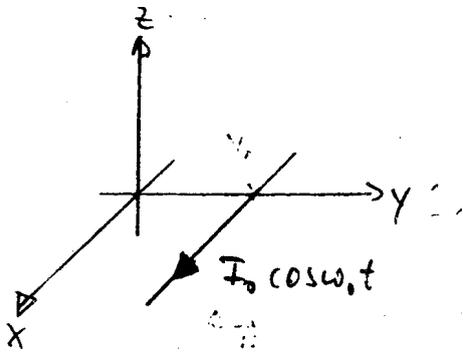
2.1 Quasistationäre Näherung: Frequenz so klein, daß Verschiebungsstrom vernachlässigbar ist

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \approx \vec{0}}$$

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \iint \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{A} \quad \text{allgemein}$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \approx \vec{0}: \quad \boxed{\oint \vec{H} d\vec{s} = \iint \vec{j} d\vec{A}}$$

2.2.



Symmetrie: \vec{H} hat nur \vec{e}_ϕ -Komponente

"rechte-Hand-Regel"

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \iint \vec{j} d\vec{A} = i(t) = I_0 \cos \omega_0 t \quad \text{Quasistat. Näherung}$$

$$H \cdot 2\pi s = I_0 \cos \omega_0 t$$

$$H = \frac{1}{2\pi s} \cdot I_0 \cos \omega_0 t$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H}(s) = \frac{I_0 \cos \omega_0 t}{2\pi s} \vec{e}_\phi(s)}$$

im Ursprung

kart. Koordinaten: allg.: $\vec{e}_\phi = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} (-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y)$; $s = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

hier: $x \hat{=} y$; $y \hat{=} z$: $\vec{e}_\phi = \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}} (-z\vec{e}_y + y\vec{e}_z)$; $s = \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}$

$$\Rightarrow \vec{H}(y,z) = \frac{I_0 \cos \omega_0 t}{2\pi} \cdot \frac{-z\vec{e}_y + y\vec{e}_z}{y^2+z^2} \quad \text{bei Stromfaden durch Ursprung}$$

2.2. Strom faden durch $y = y_0 : y \rightarrow y - y_0$

$$\vec{H}(y, z) = \frac{I_0 \cos \omega t}{2\pi} \cdot \frac{-z \vec{e}_y + (y - y_0) \vec{e}_z}{(y - y_0)^2 + z^2}$$

2.3. Idee: • Denke Stromleiter zusammengesetzt als Summe von Strom fäden

• Ersetze $i(t)$ aus 2.2. durch $k_0(t) = \frac{di(t)}{dy_0} = \frac{I_0 \cos \omega t}{b}$

k_0 : Strom beleg

• Summiere $\left(\int_0^b dy_0 \right)$ über alle Strom fäden

⇒ "Strom faden": $\frac{k_0(t)}{2\pi} \cdot \frac{-z \vec{e}_y + (y - y_0) \vec{e}_z}{(y - y_0)^2 + z^2} = \frac{I_0 \cos \omega t}{2\pi b} \cdot \frac{-z \vec{e}_y + (y - y_0) \vec{e}_z}{(y - y_0)^2 + z^2}$

⇒ $\vec{H}(y, z) = \int_{y_0=0}^b \frac{I_0 \cos \omega t}{2\pi b} \cdot \frac{-z \vec{e}_y + (y - y_0) \vec{e}_z}{(y - y_0)^2 + z^2} dy_0$

$= \frac{I_0 \cos \omega t}{2\pi b} \cdot \left\{ \int_{y_0=0}^b \frac{-z \vec{e}_y}{(y - y_0)^2 + z^2} dy_0 + \int_{y_0=0}^b \frac{(y - y_0) \vec{e}_z}{(y - y_0)^2 + z^2} dy_0 \right\}$

Sub.: $y - y_0 = u \Rightarrow \frac{du}{dy_0} = -1 \rightarrow dy_0 = -du$

Grenzen: $y_0 = 0 \rightarrow u = y$

$y_0 = b \rightarrow u = y - b$

$\vec{H}(y, z) = \frac{I_0 \cos \omega t}{2\pi b} \cdot \left\{ \int_{u=y}^{u=y-b} \frac{+z \vec{e}_y}{u^2 + z^2} du - \int_y^{y-b} \frac{u \vec{e}_z}{u^2 + z^2} du \right\}$

$= \frac{I_0 \cos \omega t}{2\pi b} \cdot \left\{ z \cdot \frac{1}{z} \cdot \arctan\left(\frac{u}{z}\right) \Big|_y^{y-b} \vec{e}_y - \frac{1}{2} \ln(u^2 + z^2) \Big|_y^{y-b} \vec{e}_z \right\}$

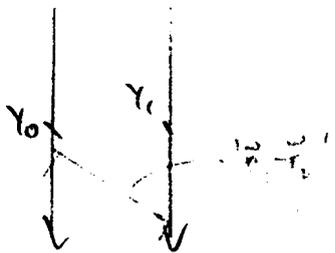
$$\vec{H}(y, z) = \frac{I_0 \cos \omega t}{2\pi b} \left\{ \left[\arctan\left(\frac{y-b}{z}\right) - \arctan\left(\frac{y}{z}\right) \right] \vec{e}_y - \frac{1}{2} \ln \frac{(y-b)^2 + z^2}{y^2 + z^2} \vec{e}_z \right\}$$

2.4. Anscheinlich klar: Für große z -Entfernungen "sieht" man nur einen Stromfaden an der Stelle $y = \frac{b}{2}$

$$\Rightarrow \vec{H}(y, z) = \frac{I_0 \cos \omega t}{2\pi} \cdot \frac{-z \vec{e}_y + (y - \frac{b}{2}) \vec{e}_z}{(y - \frac{b}{2})^2 + z^2}$$

2.8.1.

$$L_{12} := \frac{\mu}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$



$$d\vec{s}_1 = dx_1 \vec{e}_x$$

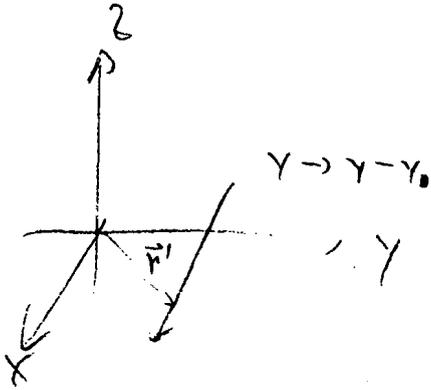
$$d\vec{s}_2 = dx_2 \vec{e}_x$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_1 &= x_1 \vec{e}_x + y_0 \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z \\ \vec{r}_2 &= x_2 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z \end{aligned} \right\} \Rightarrow |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

$$\Rightarrow L_{12} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{x_1=-b}^{+\infty} \int_{x_2=-\infty}^{+\infty} \frac{dx_1 dx_2 \cdot 1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_0 - y_1)^2}}$$

$$L_{12} = 4 \cdot \frac{\mu}{4\pi} \int_{x_1=0}^{\infty} \int_{x_2=0}^{\infty} \frac{dx_1 dx_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_0 - y_1)^2}}$$

$$\vec{H} = \frac{I}{\mu_0} \int_{\text{fil}} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}_{OP}}{|\vec{r}_{OP}|^3} \quad \text{Biot-Savart}$$



$$d\vec{s} = \vec{e}_x dx' \quad ; \quad x' \in]-\infty; \infty[$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$\vec{r}' = x'\vec{e}_x + y_0\vec{e}_y$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{OP} = (x-x')\vec{e}_x + (y-y_0)\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$\vec{H} = \frac{I_0 \cos \omega t}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\vec{e}_x dx'] \times [(x-x')\vec{e}_x + (y-y_0)\vec{e}_y + z\vec{e}_z]}{[(x-x')^2 + (y-y_0)^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{I_0 \cos \omega t}{4\pi} \int_{x'=-\infty}^{+\infty} \frac{(y-y_0)\vec{e}_z - z\vec{e}_y}{[(x-x')^2 + (y-y_0)^2 + z^2]^{3/2}} dx'$$

$$= \frac{I_0 \cdot \cos \omega t}{4\pi} \cdot 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y_0)^2 + z^2]^{3/2}} dx' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

3. Aufgabe

3.1 Geradengleichung

$$z(y) = m y + b$$

$$z(y=0) = 0 \rightarrow b = 0$$

$$m = \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{c}{d}$$

$$\left. \begin{array}{l} z(y=0) = 0 \rightarrow b = 0 \\ m = \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{c}{d} \end{array} \right\} \underline{\underline{z(y) = \frac{c}{d} y}}$$

$$\phi = \iint \vec{B} d\vec{A} \quad ; \quad d\vec{A} = dy dz \vec{e}_x$$

$$= \int_{z=-\frac{c}{d}y}^{+\frac{c}{d}y} \int_{y=0}^d B_0 z^2 \cdot t \, dy dz \underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x}_{=1}$$

$z = z(y)$!

$$= B_0 t \int_{y=0}^d \left[\int_{z=-\frac{c}{d}y}^{+\frac{c}{d}y} z^2 dz \right] dy \quad (**)$$

$$= B_0 t \int_{y=0}^d \left[\frac{1}{3} \left(\frac{c}{d}\right)^3 y^3 + \frac{1}{3} \left(\frac{c}{d}\right)^3 y^3 \right] dy$$

$$= \frac{2}{3} B_0 t \left(\frac{c}{d}\right)^3 \int_{y=0}^d y^3 dy \quad (*) = \frac{2}{3} \left(\frac{c}{d}\right)^3 B_0 t \cdot \frac{y^4}{4} \Big|_0^d = \frac{1}{6} B_0 t \cdot \frac{c^3}{d^3} \cdot d^4$$

$$\boxed{\phi = \frac{1}{6} B_0 t \cdot c^3 d}$$

3.2.

allg.: $U_i = - \frac{d\phi}{dt}$ bei Rechtsschraubensystem

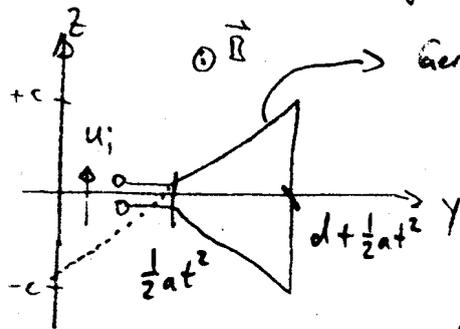
hier: Linksschraube $\Rightarrow U_i = + \frac{d\phi}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{U_i = \frac{1}{6} B_0 \cdot c^3 d}$$

Annahme $\frac{\partial B}{\partial t} > 0$

$U_i = - \frac{d\phi}{dt}$ würde einen Strom erzeugen, durch den verursachte mag. Fluss versuchen, die B-Änderung zu kompensieren

3.3



-8-

Gerade: $z = \frac{c}{d} (y - \frac{1}{2} at^2)$: Kontrolle aus Bild: $z(y = \frac{1}{2} at^2)$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \text{konst}$$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{2} at^2$$

aus (**):
$$\phi = B_0 t \int_{y=\frac{1}{2}at^2}^{d+\frac{1}{2}at^2} \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_{-\frac{c}{d}(y-\frac{1}{2}at^2)}^{+\frac{c}{d}(y-\frac{1}{2}at^2)} dy$$

$$\phi = B_0 t \int_{y=\frac{1}{2}at^2}^{d+\frac{1}{2}at^2} \left\{ \left[\frac{c}{d} (y - \frac{1}{2} at^2) \right]^3 - \left[-\frac{c}{d} (y - \frac{1}{2} at^2) \right]^3 \right\} dy$$

$$= \frac{B_0 t}{3} \cdot 2 \cdot \int_{\frac{1}{2}at^2}^{d+\frac{1}{2}at^2} \left[\frac{c}{d} (y - \frac{1}{2} at^2) \right]^3 dy = \frac{2 \cdot B_0 t}{3} \cdot \frac{c^3}{d^3} \cdot \int_{\frac{1}{2}at^2}^{d+\frac{1}{2}at^2} (y - \frac{1}{2} at^2)^3 dy$$

Sub: $u = y - \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow u \frac{du}{dy} = 1 \Rightarrow dy = du$

$y = \frac{1}{2} at^2 \rightarrow u = 0$

$y = d + \frac{1}{2} at^2 \rightarrow u = d$

$$\Rightarrow \phi = \frac{2 B_0 t}{3} \cdot \frac{c^3}{d^3} \int_{u=0}^{u=d} u^3 du = \frac{1}{6} B_0 t c^3 d \quad \text{wie 3.1}$$

$= (*) \text{ aus 3.1 } \nabla$

$$U_i = + \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{6} B_0 c^3 d$$

3.4. aus Bild: Startposition: ϕ ist max \Rightarrow Rotation gemäß $\cos(\omega_0 t)$

$$\Rightarrow \phi = B_0 t \int_{y=0}^d \left[\int_{z=-\frac{c}{d} y \cos \omega_0 t}^{+\frac{c}{d} y \cos \omega_0 t} z^2 dz \right] dy \quad \text{vgl. (**)}$$

$$= B_0 t \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{c^3}{d^3} \right) \cos^3(\omega_0 t) \cdot \int_{y=0}^d y^3 dy = \frac{1}{6} B_0 \cdot t \cdot \frac{c^3}{d^3} \cdot \cos^3 \omega_0 t \cdot d^4$$

$$\phi = \frac{1}{6} B_0 t \cdot \cos^3(\omega_0 t) \cdot c^3 d$$

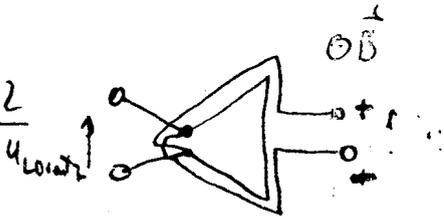
3.4
$$U_i = + \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{6} B_0 \cdot \cos^3(\omega_0 t) \cdot c^3 d + \frac{1}{6} B_0 t \cdot 3 \cos^2(\omega_0 t) (-\sin \omega_0 t) \omega_0 \cdot c^3 d$$

$$= \frac{1}{6} B_0 \cos^3(\omega_0 t) c^3 d - \frac{1}{6} B_0 t \cdot 3 \cos^2(\omega_0 t) \sin \omega_0 t \cdot \omega_0 \cdot c^3 d$$

$$U_i = \frac{1}{6} B_0 c^3 d \left[\cos^3 \omega_0 t - 3 t \cos^2 \omega_0 t \cdot \sin \omega_0 t \cdot \omega_0 \right]$$

3.2.1

1. Abb 3.2



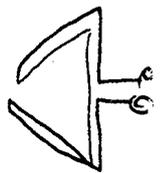
$$U_i = -2 \frac{d\phi}{dt} = 2 \frac{d}{dt} \{ B \cdot A \}$$

2 Leiterschleifen

$$U_i = -2 \frac{d}{dt} \left\{ B_0 \cdot t^2 \cdot \frac{1}{2} d \cdot 2c \right\}$$

$$U_i = -4 B_0 \cdot c d t$$

2. Abb 3.3.



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = U_i$$

eingeschlossener magn. Fluß

$$= 0 \quad U_i = 0$$

, weil kein magn. Fluß eingeschlossen in Integrationsweg (Leiterschleife)

4. Aufgabe

4.1. Orte konst. Phase für festen Zeitpt. $t = t_0$:

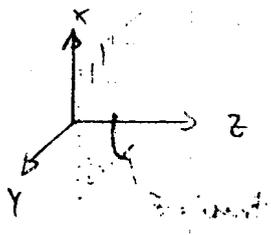
$$e^{j(\omega t_0 - kz)} = \text{konst}$$

$$\Rightarrow \omega t_0 - kz = C'$$

da $\omega, k = \text{konst} \Rightarrow$

$$z = \text{konst}$$

\Rightarrow Ebene Welle



4.2. Flächen konst. Phase: $\omega t - kz = C'$

$$z = \frac{\omega t}{k} + C$$

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda \cdot f = c_0$$

Lichtgeschwindigkeit

Richtung, da $\omega/k > 0$: pos. z-Richtung

4.3.

vgl. $\text{rot } \vec{h} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{d}}{\partial t}$

= 0, weil Vakuum

$$\text{rot } \vec{h} = \frac{\partial \vec{d}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}$$

↓ Fouriertransformation

$$\text{rot } \vec{H} = j\omega \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{j\omega \epsilon_0} \text{rot } \vec{H}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega \epsilon_0} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

~~$$= \frac{1}{j\omega \epsilon_0} \begin{vmatrix} H_x & H_y & H_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$~~

~~$$= \frac{1}{j\omega \epsilon_0} \begin{vmatrix} H_x & H_y & H_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$~~

4.3.
$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \left\{ \vec{e}_x \left(-\frac{\partial}{\partial z} H_0 e^{j(\omega t - kz)} \right) - \vec{e}_y \cdot 0 + \vec{e}_z \left(\frac{\partial}{\partial x} H_0 e^{j(\omega t - kz)} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{j\omega\epsilon_0} (-H_0) e^{j(\omega t - kz)} \cdot (-jk) \vec{e}_x$$

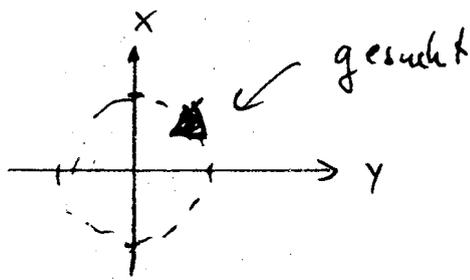
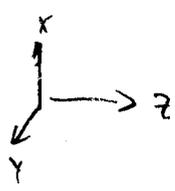
$$\vec{E} = \frac{k}{\omega\epsilon_0} H_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x = \frac{2\pi/\lambda}{\omega\epsilon_0} H_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x$$

$$= \frac{2\pi/\lambda}{2\pi f \epsilon_0} H_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x = \frac{1}{\lambda f \epsilon_0} H_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x$$

$$\vec{E} = \frac{1}{c_0 \epsilon_0} H_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x$$

$c_0 = \lambda f$: Lichtgeschw.

4.4.

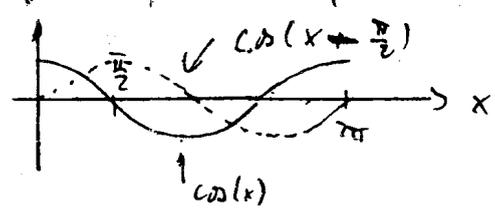


Berechnete Welle hat x-Richtung
 → gesuchte Welle hat y-Richtung

Wähle o.B.d.A. $z=0$!

Betrachte $z=0$: 1. $\vec{e} = \text{Re} \{ \vec{E} \} = \frac{H_0}{c_0 \epsilon_0} \cos(\omega t) \vec{e}_x$

d.h. zum Zeitpkt. $t=0$ ist \vec{e} max.
 ⇒ neue Welle "e_y" muß 0 sein
 2. sei $\omega t = \frac{\pi}{2}$ muß \vec{e} Null sein → OK ✓
 "e_y" muß max., nämlich auch $\frac{H_0}{c_0 \epsilon_0}$ sein



→ "e_y" ändert sich gemäß $\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$

4.4. Kreisbahn \Rightarrow Amplituden müssen gleich sein

$$\Rightarrow \vec{e}_1 = \frac{H_0}{c_0 \epsilon_0} \cdot \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{H_0 \cdot k}{\omega \epsilon_0} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{e}_y \frac{H_0}{c_0 \epsilon_0} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2} + k \cdot z)}$$

$$\boxed{\vec{E}_1 = \vec{e}_y \frac{H_0 \cdot k}{\omega \epsilon_0} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2} + k \cdot z)}}$$

Kontrolle:

$$\vec{e}_{\text{ges}} = \vec{e} + \vec{e}_1 \quad \text{in Ebene } z=0$$

$$\vec{e}_{\text{ges}} = \frac{k}{\omega \epsilon_0} H_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x + \frac{k}{\omega \epsilon_0} H_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \vec{e}_y$$

Komponenten Quadrieren + Addieren:

$$\frac{k^2}{\omega^2 \epsilon_0^2} H_0^2 \cos^2(\omega t) + \frac{k^2}{\omega^2 \epsilon_0^2} H_0^2 \cos^2(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$= \sin^2 \omega t$

$$= \frac{k^2}{\omega^2 \epsilon_0^2} H_0^2 [\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t] = \frac{k^2}{\omega^2 \epsilon_0^2} H_0^2$$

Kreisgl. \checkmark

Drehrichtung:

$$\omega t = 0: \vec{e}_{\text{ges}} = \frac{k}{\omega \epsilon_0} H_0 \cdot \vec{e}_x$$

$$\omega t = +\frac{\pi}{2}: \vec{e}_{\text{ges}} = \frac{k}{\omega \epsilon_0} H_0 \cdot \vec{e}_y$$

in Uhrzeigersinn

4.8.1 Grundwelle des Koaxialkabels ist TEM-Welle

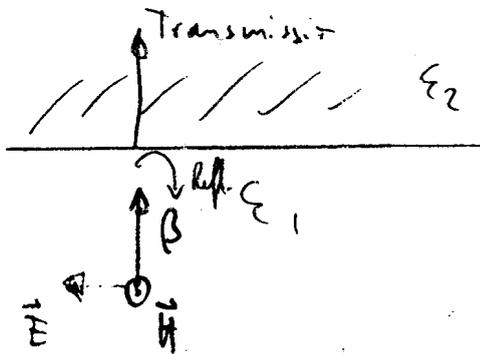
breitet sich nach (Gl. 6.4.48 - Skript)
mit Lichtgeschwindigkeit des Mediums aus

$$\vec{E} = -j\beta C_2 \frac{1}{s} e^{j(\omega t - \beta z)} \vec{e}_z$$

$$\vec{H} = -j\omega \epsilon C_2 \frac{1}{s} e^{j(\omega t - \beta z)} \vec{e}_\phi$$

in homogene Planwelle, weil $E \sim \frac{1}{s}$!

→ Anordnung wie wenn ebene Welle auf Grenzfläche
von 2 Dielektrika senkrecht einfällt.



Diplomhauptprüfung (SS 98)

Theoretische Elektrotechnik III

1. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
2. Außer Schreib- und Zeichenmaterial sind keine Hilfsmittel zugelassen (auch kein Taschenrechner)!
3. Die jeweils maximal erreichbare Punktzahl pro Teilaufgabe ist in Klammern am Ende jeder Teilaufgabe angegeben.
4. Es sind alle Aufgaben zu bearbeiten! Die Zusatzaufgaben sind optional.
5. Verwenden Sie ausschließlich die Ihnen ausgeteilten Doppelbögen; nur diese werden bewertet. Trennen Sie die Doppelbögen nicht. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Doppelbogen!
6. Schreiben Sie auf jeden Doppelbogen Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Aufgabe (inklusive der Teilaufgabe), die Sie bearbeiten!
7. Zeigen Sie den gewählten Lösungsweg auf. Geben Sie insbesondere Zwischenergebnisse und Begründungen an. Nur eindeutige Aussagen können bewertet werden!
8. Einige häufig gebrauchte Formeln finden Sie im Anhang.
9. VIEL ERFOLG!!!

1. Aufgabe: Linienladung vor einer unendlich gut leitenden, geerdeten Ebene
(13 Punkte + 7 Zusatzpunkte)

Gegeben ist eine unendlich gut leitende, geerdete Ebene, welche bei $z = 0$ den gesamten Raum in zwei Hälften zerteilt, siehe Abb. 1.1. Im Halbraum $z > 0$ befindet sich eine Linienladung der Länge L mit homogen verteilter, positiver Gesamtladung $Q > 0$. Die Linienladung ist nach Abb. 1.1 bei $y = 0$ im Abstand d parallel zur x -Achse orientiert. Die Dielektrizitätszahl sei überall ϵ_0 !

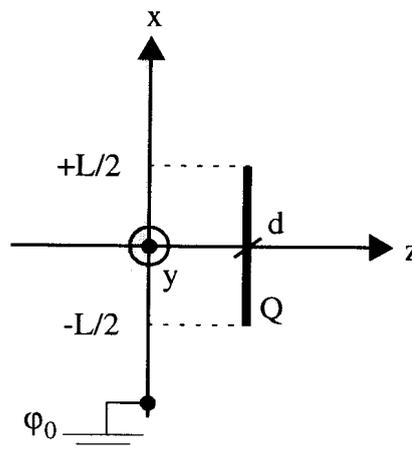


Abb. 1.1 Linienladung vor unendlich gut leitender, geerdeter Ebene

- 1.1 **Skizzieren** Sie **qualitativ** den Verlauf der elektrischen Feldstärke \vec{E} in der Halbebene $y = 0$ und $z > 0$. **Erklären** Sie das Verhalten des Feldstärkeverlaufes bei $z = 0^+$!
(2 Punkte)
- 1.2 **Berechnen** Sie das elektrische Potential $\varphi(x, y, z)$ im **gesamten** Raum (mit Begründung)! Es gilt: Erdpotential = Bezugspotential.
(5 Punkte)
- 1.3 **Berechnen** Sie mit Hilfe des **Coulombschen Gesetzes** das elektrische Feld $\vec{E}(x, y, z)$ in der Nähe der leitenden Ebene, also bei $z = 0^+$!
(3 Punkte)
- 1.4 **Berechnen** Sie die auf der leitenden Ebene bei $z = 0$ beeinflusste Flächenladungsdichte $\sigma(x, y)$!
(3 Punkte)

Zusatzaufgabe:

- 1.Z.1 **Begründen** Sie, warum das elektrische Potential φ immer stetig sein muß! (2 Punkte)
- 1.Z.2 **Leiten** Sie die Grenzflächenbedingung für die Normalkomponente des elektrischen Verschiebungsflusses \vec{D} her!
(3 Punkte)
- 1.Z.3 Geben Sie zu 1.3 eine **Alternativlösungsmöglichkeit** an!
(2 Punkte)

2. Aufgabe: Widerstand, Leitwert und Kapazität einer Koaxialleitung (11 Punkte + 3 Zusatzpunkte)

In Abb. 2.1 ist die Draufsicht bei $z = 0$ auf eine Koaxialleitung aus Kupfer der Länge L mit dem inneren Radius r_1 und den äußeren Radien r_2 und r_3 zu sehen. Die Koaxialleitung liegt symmetrisch zur z -Achse, siehe Abb. 2.2. Der Raum zwischen r_1 und r_2 sei mit einem Kunststoff der Leitfähigkeit κ_k und der Dielektrizitätszahl $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_k$ gefüllt. Der innere und äußere Kupferleiter hat die Leitfähigkeit $\kappa_{Cu} \gg \kappa_k$ und die Dielektrizitätszahl ϵ_0 . Zwischen der inneren und äußeren Kupferleitung liegt die Gleichspannung U_0 , siehe Abb. 2.1.

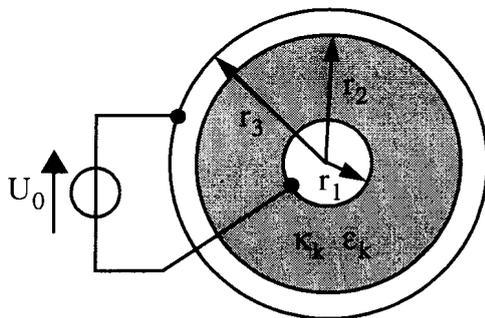


Abb. 2.1 Schnittbild durch den Koaxialleiter

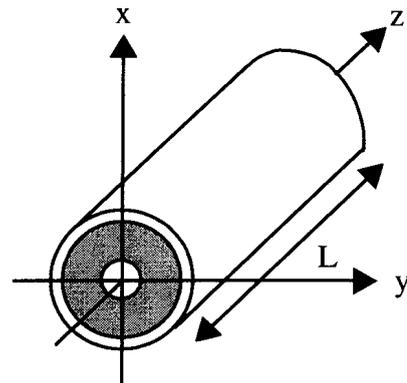


Abb. 2.2 Ausrichtung des Koaxialleiters

- 1.1 **Berechnen** Sie den Längswiderstandsbeläge R_i' und R_a' (zwischen $z = 0$ und $z = L$) des inneren und äußeren Kupferleiters! (2 Punkte)
- 1.2 **Berechnen** Sie den Querleitwertbelag G' zwischen dem inneren und dem äußeren Kupferleiter! (3 Punkte)
- 1.3 **Berechnen** Sie die Kapazitätsbelag C' der Koaxialleitung! (4 Punkte)
- 1.4 **Berechnen** Sie die Raumladungsdichte $\rho(x, y, z)$ im Kunststoffmedium! (2 Punkte)

Zusatzaufgabe:

- 2.Z.1 **Begründen** Sie, warum die Strömungsfeldlinien \vec{g} aus dem inneren Kupferleiter bei $\rho = r_1^+$ senkrecht herausströmen, wenn Kupfer als ein idealer Leiter mit $\kappa_{Cu} \rightarrow \infty$ angenommen wird! (3 Punkte)

3. Aufgabe: Magnetfeld einer stromdurchflossenen Ringspule (9 Punkte + 5 Zusatzpunkte)

In Abb. 3.1 ist eine vom Gleichstrom I homogen durchflossene Ringspule der Länge L zu sehen. Die Spule besteht aus N Windungen und sei so dicht gewickelt, daß man sie sich aus sehr vielen stromführenden Kreisströmen (siehe Abb. 3.2) zusammengesetzt vorstellen kann. Das Gesamtfeld der Ringspule ergibt sich somit durch Überlagerung der Felder aller Kreisströme. Die Spule und der Kreisring haben beide den Radius R und sind symmetrisch zur z -Achse.

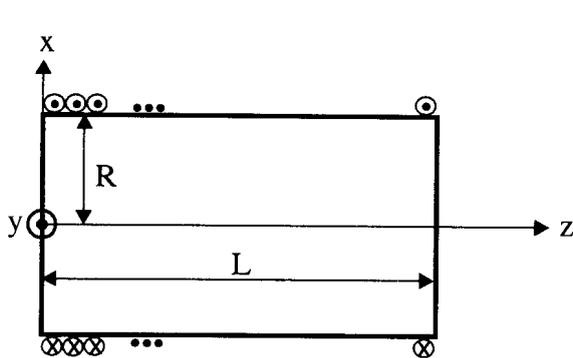


Abb 3.1 Stromdurchflossene Ringspule

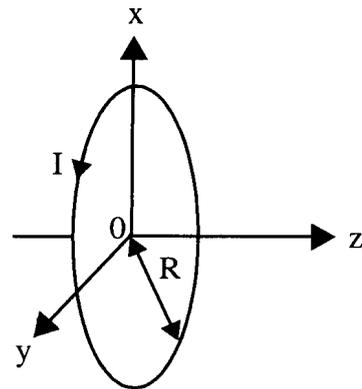


Abb. 3.2 Geometrie des Kreisstromes

- 3.1 Zeigen Sie, daß das Magnetfeld $\vec{H}(z)$ des Kreisstromes nach Abb. 3.2 auf der z -Achse gegeben ist durch:

$$\vec{H}(z) = \frac{I}{2} \frac{R^2}{[R^2 + z^2]^{3/2}} \vec{e}_z. \quad (4 \text{ Punkte})$$

- 3.2 Berechnen Sie nun den Strombelag K_0 zur Berechnung der Ringspule nach Abb. 3.1! (1 Punkt)

- 3.3 Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{H}(z)$ der Ringspule nach Abb. 3.1 auf der z -Achse mit Hilfe des Ergebnisses aus 3.1! (2 Punkte)

- 3.4 Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{H}(z)$ einer sehr langen Spule (d. h. es gilt: $L \gg R$) in der Spulenmitte! (2 Punkte)

Zusatzaufgabe:

- 3.Z.1 Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{H}(\vec{r})$ des Kreisstromes nach Abb. 3.2 im gesamten Raum! (5 Punkte)

4. Aufgabe: Reflexion und Transmission einer ebenen Welle bei senkrechtem Einfall (11 Punkte + 4 Zusatzpunkte)

Eine ebene harmonische Welle fällt senkrecht (Index „E“) auf eine ebene, unendlich ausgedehnte, nichtleitende Grenzfläche, siehe Abb. 4.1. Beide Teilräume sind nichtleitend und haben die Brechzahl n_1 bzw. n_2 . An der Grenzfläche (bei $z = 0$) wird ein Teil der Welle reflektiert (Index „R“) ein anderer Teil transmittiert (Index „T“). Alle Wellenvektoren liegen in der y - z -Ebene; der kleine Versatz des reflektierten Wellenvektors in Abb. 4.1 ist nur aus zeichentechnischen Gründen vorhanden. Für die elektrischen Feldvektoren gilt:

$$\vec{E}_{E,R,T} = \underline{E}_{E,R,T} \cdot e^{-j(\vec{k}_{E,R,T} \cdot \vec{r})} \cdot \vec{e}_x,$$

wobei der zeitliche (= harmonische) Term $e^{j\omega t}$ nicht explizit aufgeführt wurde. $\underline{E}_{E,R,T}$ ist die konstante komplexe Amplitude der einfallenden, reflektierten bzw. der transmittierten Welle. Im gesamten Raum gelte $\mu = \mu_0$.

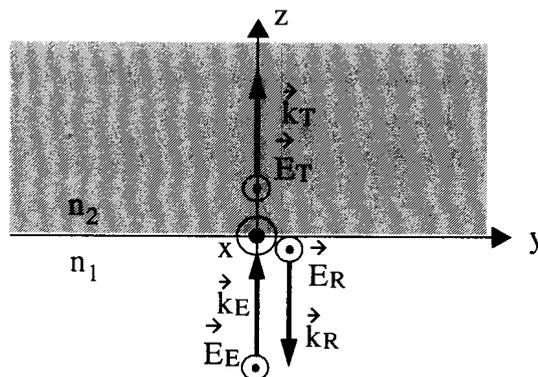


Abb. 4.1 Geometrie der ebenen Wellen bei senkrechtem Einfall

- 4.1 **Stellen** Sie die elektrischen Feldvektoren $\vec{E}_{E,R,T}(x, y, z)$ explizit als Funktion von n_1 , n_2 , λ , x , y und/oder z **dar!** (3 Punkte)
- 4.2 **Berechnen** Sie die zu den elektrischen Feldvektoren gehörenden magnetischen Feldvektoren $\vec{H}_{E,R,T}(x, y, z)$! (3 Punkte)
- 4.3 **Berechnen** Sie unter Verwendung der **Grenzflächenbedingungen** den Reflexionsfaktor $r := \frac{E_R}{E_E}$ als Funktion von n_1 , n_2 ! (4 Punkte)
- 4.4 **Berechnen** Sie nun den Transmissionsfaktor $t := \frac{E_T}{E_E}$ als Funktion von n_1 und n_2 ! (1 Punkt)

Zusatzaufgaben:

- 4.Z.1 **Berechnen** Sie den Reflexionsfaktor r bei senkrechtem Einfall, wenn der Halbraum für $z > 0$ aus einem Medium mit **unendlich guter Leitfähigkeit** ($\kappa \rightarrow \infty$) besteht! **Deuten** Sie Ihr Ergebnis! (2 Punkte)
- 4.Z.2 Diskutieren Sie die Ergebnisse aus 4.3 und 4.4 mit Hilfe des Energiesatzes und der Beziehung $|r|^2 + |t|^2 \neq 1$? ! (2 Punkte)

Formelsammlung

1. Zylinder- und Kugelkoordinaten:

$$\vec{e}_\rho(\phi) = \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\phi \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\phi(\phi) = -\sin\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\phi \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{r}(\phi, \theta, z) = \rho \cdot \vec{e}_\rho(\phi) + z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [x\vec{e}_x + y\vec{e}_y]$$

$$\vec{e}_\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y]$$

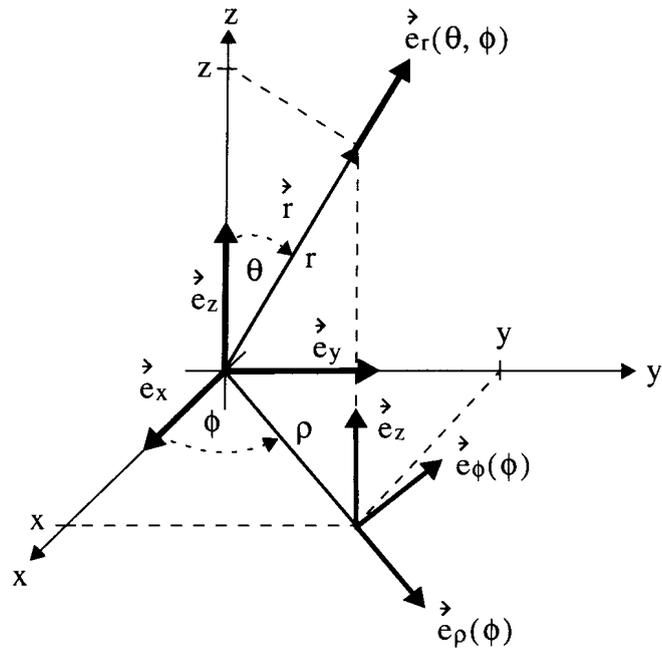
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{e}_r(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{e}_r(\theta, \phi) = \sin\theta \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\theta \sin\phi \cdot \vec{e}_y + \cos\theta \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{r}(\phi, \theta, z) = r \cdot \vec{e}_r(\theta, \phi)$$



2. Oberflächen- und Volumenelemente:

$$d\vec{A}(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \cdot \vec{e}_r$$

$$dV(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$

$$d\vec{A}(\rho, z, \phi) = \rho d\phi dz \cdot \vec{e}_\rho$$

$$dV(\rho, z, \phi) = \rho d\rho d\phi dz$$

3. Vektoren:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \text{ mit } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$$

4. Divergenz und Rotation in Zylinderkoordinaten

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \{ \rho A_\rho \} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \{ A_\phi \} + \frac{\partial}{\partial z} \{ A_z \}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{e}_\rho \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right] + \vec{e}_\phi \cdot \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] + \vec{e}_z \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right]$$

5. Laplace-Operator und Gradient in Kugelkoordinaten

$$\Delta \varphi(\phi, \theta, z) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \right]$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \cdot \vec{e}_\phi$$

6. Näherungsformeln:

Für kleine Winkel α gilt: $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$ und $\cos \alpha \approx 1$

$$\text{Reihen:} \quad \sin \phi \approx \phi - \frac{\phi^3}{3!}, \quad \cos \phi \approx 1 - \frac{\phi^2}{2!}, \quad \frac{1}{1 \pm x} \approx 1 \mp x$$

7. Integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C,$$

$$\int \frac{x dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + C,$$

$$\int \frac{dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \cdot \sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Diplomhauptprüfung (WS 96/97)

Theoretische Elektrotechnik III

- a. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
- b. Außer Schreib- und Zeichenmaterial sind keine Hilfsmittel zugelassen (auch kein Taschenrechner)!
- c. Es sind alle Aufgaben zu bearbeiten!
- d. Verwenden Sie nur die Ihnen ausgeteilten Doppelbögen; nur diese werden bewertet. Trennen Sie die Doppelbögen nicht. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Doppelbogen!
- e. Schreiben Sie auf jeden Doppelbogen Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Aufgabe, die Sie bearbeiten!
- f. Zeigen Sie den gewählten Lösungsweg auf. Geben Sie insbesondere Zwischenergebnisse und Begründungen an. Vermeiden Sie so unnötig Punktverluste!
- g. Einige häufig gebrauchte Formeln finden Sie im Anhang.
- h. Die jeweils maximal erreichbare Punktzahl pro Teilaufgabe ist in Klammern am Ende jeder Teilaufgabe angegeben.
- i. **VIEL ERFOLG!!!**

1. Aufgabe: Geladene Kugel mit exzentrischem Kugelhohlraum (10 Punkte + 2 Zusatzpunkte)

In einer Kugel mit dem Radius R_2 und einer homogen verteilten und unbeweglichen Ladung Q befinde sich gemäß Bild 1 ein ungeladener, kugelförmiger Hohlraum mit dem Radius R_1 , dessen Mittelpunkt sich im Punkt $(0, a, 0)$ befindet. Die geladene Kugel habe die Dielektrizitätszahl $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ mit $\epsilon_r = \text{konst} > 0$; der Hohlraum und der Außenraum ($r > R_2$) habe die Dielektrizitätszahl $\epsilon = \epsilon_0$.

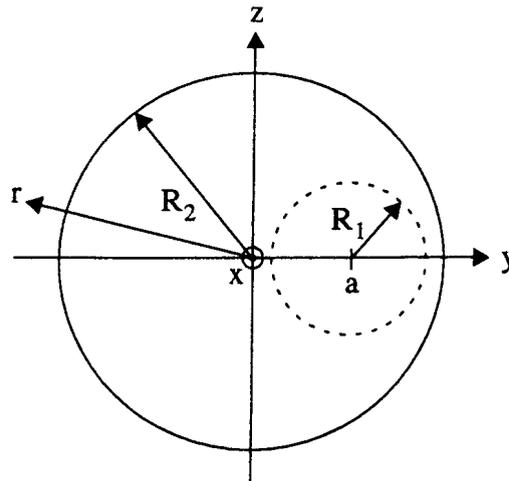


Bild 1: Homogen geladene Kugel mit exzentrischem Kugelhohlraum

- a. Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ außerhalb der geladenen Kugel, d. h. für $r > R_2$, indem Sie das Superpositionsprinzip anwenden! (6 Punkte)

Nun werde die geladene Kugel mit einer dünnen, aber unendlich gut leitenden Metallschicht überzogen und geerdet.

- b. Berechnen Sie nun das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ außerhalb der geladenen Kugel, d. h. für $r > R_2$. Es gelte $\varphi(\infty) = 0$. (4 Punkte)

Zusatzaufgabe:

Die geladene Kugel sei nun nicht mehr mit einer Metallschicht überzogen, nicht mehr geerdet und es gelte wieder die Anordnung nach Bild 1. Jetzt sei aber das Dielektrikum des Außenraumes (d. h. $r > R_2$) feldabhängig: $\epsilon = \epsilon(\vec{E}(\vec{r}))$.

- c. Können Sie die Berechnung im Allgemeinen auch mit dem Superpositionsprinzip wie in Aufgabenteil a. durchführen? Wenn ja, zeigen Sie die Änderungen für die Berechnung des elektrischen Feldes im Außenraum ($r > R_2$) auf! Begründen Sie Ihre Antwort! (2 Punkte)

2. Aufgabe: Pendel über leitender Fläche (12 Punkte + 5 Zusatzpunkte)

Über einer unendlich ausgedehnten, perfekt leitenden, **geerdeten** Fläche in der x - y -Ebene sei ein Pendel aufgehängt, welches aus einem nichtleitenden, näherungsweise masselosen Faden der Länge L und einer Punktladung q der Masse m besteht (vgl. Bild 2). Das Pendel sei zunächst in seiner Ruhelage, so daß sich die Punktladung auf der z -Achse im Abstand a über der leitenden Fläche befindet.

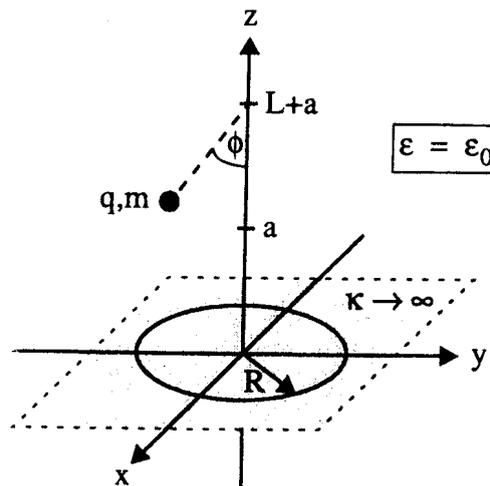


Bild 2: Pendel über perfekt leitender Fläche. Die Fläche sei unendlich ausgedehnt.

- Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Spiegelladungen das Potential $\phi(\vec{r})$ oberhalb der Ebene. Berechnen Sie auch das elektrische Feld unterhalb der Ebene und kontrollieren Sie das Ergebnis mittels der elektromagnetischen Randbedingungen! (4 Punkte)
- Zeigen Sie, daß die von der Punktladung des Pendels auf der leitenden Fläche beeinflusste Ladung durch die Flächenladungsdichte

$$\sigma(x, y) = -\frac{q}{2\pi} \cdot \frac{a}{[x^2 + y^2 + a^2]^{3/2}}$$

beschrieben wird.

(3 Punkte)

- Berechnen Sie die Ladungsmenge auf der Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius R in der x - y -Ebene und führen Sie den Grenzübergang $R \rightarrow \infty$ durch! (3 Punkte)

Das Pendel befindet sich im Schwerfeld der Erde mit der konstanten Schwerebeschleunigung g und soll nur in der x - z -Ebene schwingen. Unter Vernachlässigung aller dynamischer Effekte, die von der bewegten Ladung verursacht werden, kann man dann folgende Schwingungsdifferentialgleichung herleiten:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \left(\frac{g}{L} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{4mL} \cdot \frac{1}{[a + L(1 - \cos\phi)]} \right) \sin\phi = 0.$$

- Welche Schwingung und welche Schwingfrequenz ω_0 führt das Pendel bei kleinen Auslenkungen aus? (2 Punkte)

Zusatzaufgaben:

- e. Diskutieren Sie den Einfluß der bewegten Ladung und der damit verbundenen zeitvarianten Felder auf die Bewegung des Pendels. (2 Punkte)
- f. Diskutieren und Begründen Sie die Tendenz der Schwingfrequenz des Pendels bei größer werdenden Ausschlägen im Vergleich zur Schwingung aus Teilaufgabe d.! (3 Punkte)

3. Aufgabe: Vektorpotential und Gegeninduktivität (12 Punkte + 2 Zusatzpunkte)

- a. Leiten Sie aus dem Durchflutungsgesetz für stationäre Magnetfelder die Differentialgleichung für das **quellenfreie** Vektorpotential $\vec{V}_m(\vec{r})$ her! Nehmen Sie hierzu an, daß $\mu \equiv \mu_0$ gilt. (4 Punkte)

Die Differentialgleichung des Vektorpotentials entspricht formal der Poisson-Gleichung der Elektrostatik, so daß man den Ausdruck

$$\vec{V}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_{\text{Volumen}} \frac{\vec{g}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV(\vec{r}')$$

als Lösung für das Vektorpotential in kartesischen Koordinaten findet.

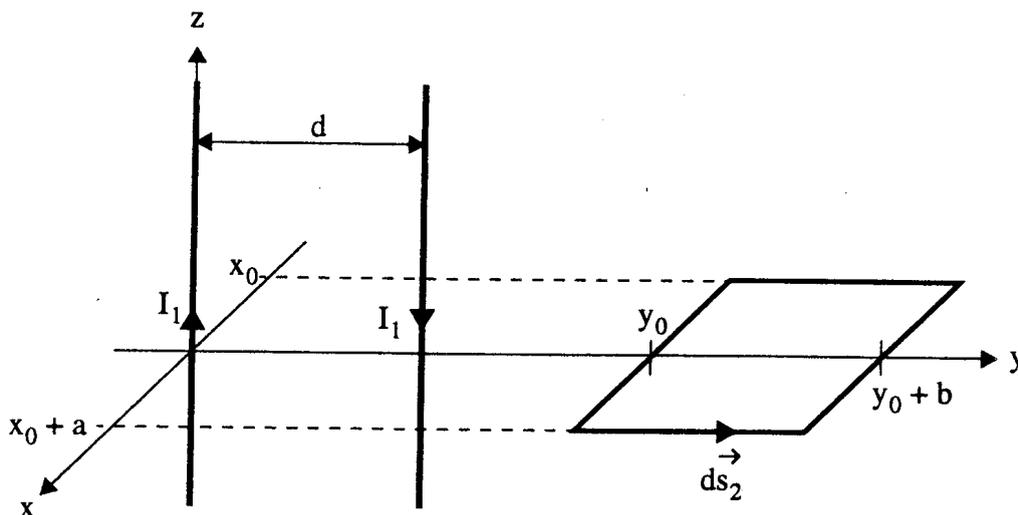


Bild 3: Unendlich lange Parallelleitung

In Bild 3 ist eine unendlich lange Parallelleitung zu sehen. Der Strom I_1 fließe in dem einen Stromfaden auf der z-Achse hin und in dem anderen Stromfaden, welcher im Abstand d in der y-z-Ebene vom anderen Leiter liegt, zurück. Es gelte immer noch $\mu = \mu_0$.

- b. Berechnen Sie das Vektorpotential $\vec{V}_m(\vec{r})$ der Parallelleitung aus Bild 3! (4 Punkte)
- c. Wie kann man mit Hilfe des Vektorpotentials $\vec{V}_m(\vec{r})$ die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r})$ der Anordnung nach Bild 3 berechnen? (1 Punkt)

In der x-y-Ebene liege nun eine rechteckförmige Leiterschleife der Fläche $a \cdot b$ senkrecht zu den Stromfäden, siehe Bild 3. Die Leiterschleife werde durch Wegelemente ds_2 beschrieben.

- d. Zeigen Sie, daß man die Gegeninduktivität L_{21} aus dem Vektorpotential $\vec{V}_m(\vec{r})$ durch

$$L_{21} = \frac{\oint \vec{V}_m(\vec{r}) \cdot d\vec{s}_2}{I_1}$$

berechnen kann!

(1,5 Punkte)

- e. Berechnen Sie die Gegeninduktivität L_{21} der Anordnung und begründen Sie Ihr Ergebnis!

(1,5 Punkte)

Zusatzaufgabe:

- f. Erklären Sie qualitativ, was geschieht, wenn man die rechteckige Leiterschleife um den Winkel α gegenüber der x-y-Ebene neigt. Skizzieren Sie hierzu den qualitativen Verlauf der Gegeninduktivität $L_{21}(\alpha)$ für $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$!

(2 Punkte)

4. Aufgabe: Induktionsgesetz (8 Punkte + 3 Zusatzpunkte)

In einem zeit- und ortsabhängigen Magnetfeld befinde sich eine rechteckige Leiterschleife nach Bild 4. Die Leiterschleife habe die Breite b , die Länge c und sei in einem kleinen Bereich (theoretisch $\rightarrow 0$) geöffnet, so daß dort eine Spannung u_i mit der Zählrichtung nach Bild 4 abgegriffen werden kann. Das Magnetfeld sei nur im Bereich $-L \leq z \leq L$ und $0 \leq y \leq d$ mit $\vec{B}(y, z, t) = B_0 \cdot y \cdot z^2 \cdot e^{-t/t_0} \cdot \vec{e}_x$ gegeben. Es gelte $t_0, B_0, b, c, d, L = \text{konst} > 0$.

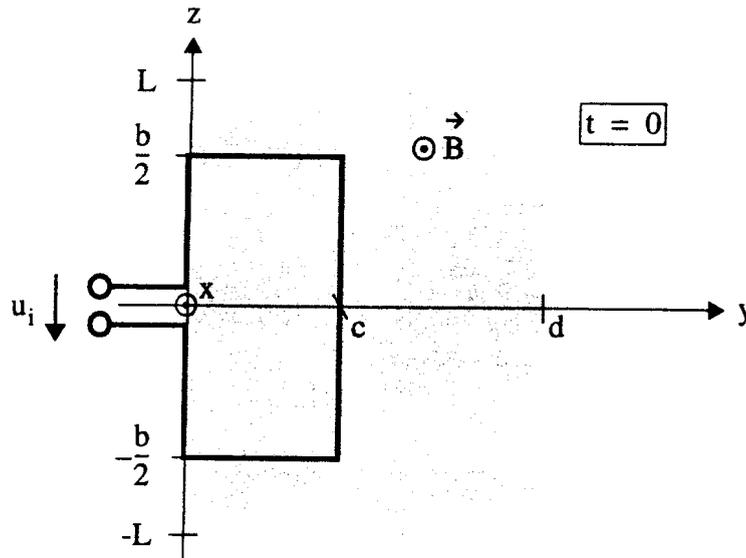


Bild 4: Rechteckige Leiterschleife im Magnetfeld

- a. Berechnen Sie den magnetischen Fluß $\Phi(t)$ durch die rechteckige Leiterschleife und hieraus die induzierte Spannung u_i ! (2 Punkte)

Nun rotiere (im Rechtsschraubensinne) die Leiterschleife um die y -Achse gemäß $\sin(2\pi f_0 t)$ mit dem Winkel $\delta = 2\pi f_0 t$.

- b. Berechnen Sie nun die induzierte Spannung u_i ! (3 Punkte)

Nun entfalle die z -Abhängigkeit des Magnetfeldes, so daß gilt: $\vec{B}(y, t) = B_1 \cdot y \cdot e^{-t/t_0} \cdot \vec{e}_x$ mit $B_1 = \text{konst} > 0$. Die Leiterschleife rotiere nicht mehr, werde aber in y -Richtung zum Zeitpunkt $t=0$ gleichmäßig beschleunigt. Die Startposition der Bewegung zum Zeitpunkt $t=0$ ist in Bild 4 zu sehen. Es gelte: $\vec{a} = a \cdot \vec{e}_y$ mit $a = \text{konst} > 0$.

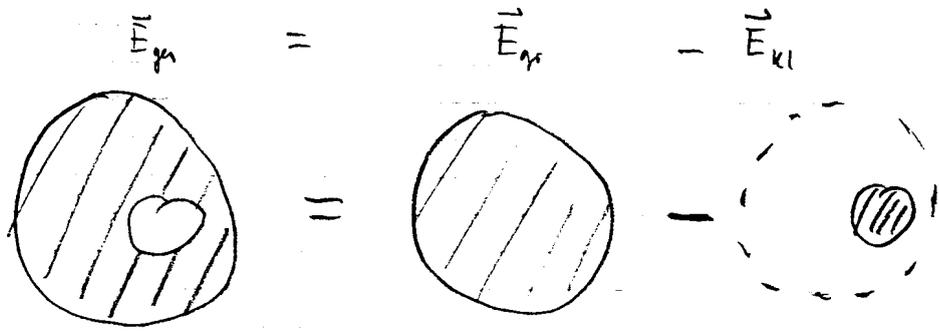
- c. Berechnen Sie jetzt die induzierte Spannung u_i ! Nehmen Sie hierzu an, daß sich die Leiterschleife **immer** vollständig im Magnetfeld befindet! (3 Punkte)

Zusatzaufgabe:

- d. Berechnen Sie die induzierte Spannung u_i für alle Zeiten t , also auch für die Zeiten, in denen sich die Leiterschleife nur teilweise bzw. gar nicht im Magnetfeld befindet! (3 Punkte)

Lösung 1. Aufgabe

a. IDEE:



Satz von Gauß: $\oint_{\text{Oberfl.}} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho \, dV$

Raumladungsdichte: $\underline{\underline{\rho = \frac{dQ}{dV} = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{2}\pi(R_2^3 - R_1^3)} = \text{konst!}}}$

SIE SPIEL LÖSUNG

ohne Gewähr auf Vollständigkeit + Richtigkeit

1. "große Kugel":

Symmetrie: Kugelsymmetrisch

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{D} = D \cdot \vec{e}_r}}$$

Gauß: $D \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\frac{4}{2}\pi(R_2^3 - R_1^3)} \cdot \cancel{\frac{4}{2}\pi} R_2^3$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D_r = \frac{Q \cdot R_2^3}{4\pi(R_2^3 - R_1^3)} \cdot \frac{1}{r^2} \vec{e}_r}}$$

$$\underline{\underline{\vec{E}_{gr} = \frac{D_r}{\epsilon_0} = \frac{Q \cdot R_2^3}{4\pi\epsilon_0 \cdot (R_2^3 - R_1^3)} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \vec{e}_r}}$$

2. "kleine Kugel":

analog: $D \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\frac{4}{2}\pi(R_2^3 - R_1^3)} \cdot \cancel{\frac{4}{2}\pi} R_1^3$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{E}_{kl} = \frac{Q \cdot R_1^3}{4\pi\epsilon_0 \cdot (R_2^3 - R_1^3)} \cdot \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{im Ursprung}}}$$

Verschiebe Ladung aus Ursprung \rightarrow führe kartesische Koordinaten ein.

$$\vec{e}_r = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

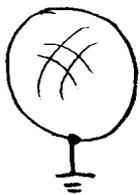
1a. Ladung befindet sich in $(0, a, 0) \Rightarrow y \rightarrow y-a$

$$\Rightarrow \vec{H}_1 = \frac{Q \cdot R_1^3}{4\pi\epsilon_0(R_2^3 - R_1^3)} \cdot \frac{1}{[x^2 + (y-a)^2 + z^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y-a \\ z \end{pmatrix}$$

3. "große Kugel" in kart. Koord.: $\vec{H}_2 = \frac{Q \cdot R_2^3}{4\pi\epsilon_0(R_2^3 - R_1^3)} \cdot \frac{1}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\vec{E}_{\text{ges}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_2^3 - R_1^3)} \left\{ \frac{R_2^3}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{R_1^3}{[x^2 + (y-a)^2 + z^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y-a \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

b.



Poisson-Gl. in Kugelkoord.: $\Delta\psi = -\frac{\rho}{\epsilon}$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

außerhalb d. Metallkugel: keine Raumladung $\Rightarrow -\frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$

Symmetrie: ψ unabh. von θ und ϕ

$$\Rightarrow \Delta\psi = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0 \quad | \cdot r^2 + \text{Integr.}$$

$$r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} = C_1$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{C_1}{r^2} \Rightarrow \psi(r) = \frac{C_1}{r} + C_2$$

Randbedingungen: $\psi(r \rightarrow \infty) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow C_2 = 0$
 $\psi(r = R_2) \stackrel{!}{=} 0$ weil geerdet $\Rightarrow C_1 = 0$ } $\boxed{\psi(r) = 0, r \geq R_2}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\text{grad } \psi = \vec{0}} \quad r \geq R_2$$

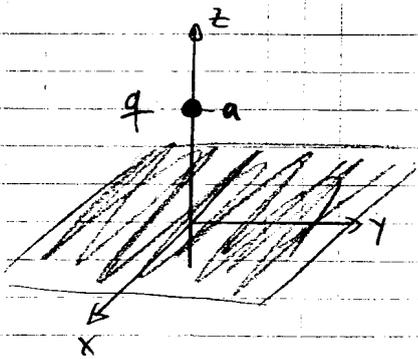
c. Betrachte Berechnungsverfahren von Teilaufgabe a.: $\vec{D}_{\text{ges}} = \vec{D}_{\text{K1}} + \vec{D}_{\text{K2}}$

$\Rightarrow \vec{E}_{\text{ges}} = \frac{\vec{D}_{\text{ges}}}{\epsilon(\vec{E})}$ läßt sich somit mit dem Superpositionsprinzip durchführen!

Problem: da $\epsilon = \epsilon(\vec{E})$ wird die Auflösung von $\vec{E}_{\text{ges}} = \frac{\vec{D}_{\text{ges}}}{\epsilon(\vec{E})}$ äußerst kompliziert

Lösung 2. Aufgabe

a.



$$z > 0: \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

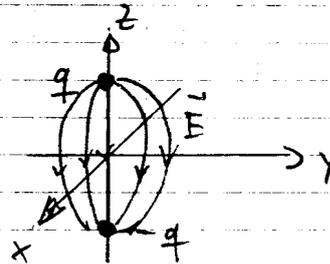
$$z \equiv 0: \text{Äquipotentialfläche: } \Delta \varphi = 0$$

$$z < 0: \Delta \varphi = 0 \text{ und } \Delta \varphi \Big|_{\text{Rand}} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi = 0 \text{ und } \vec{E} = \vec{0}, z \leq 0$$

$$z \geq 0: \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Spiegelungsprinzip:



Potential einer Pkt. Ladung:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z+a)^2]^{1/2}} \right], z \geq 0$$

Potential ist der pot. Energie der Ladung q proportional;
Energie muß stetig sein \Rightarrow Potential ist stetig

$$\Rightarrow \varphi(x, y, z=0) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{[x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} - \frac{1}{[x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \right] = 0 \quad \checkmark \quad \text{OK}$$

b.

$$\sigma(x, y) = D_{n1} - D_{n2} = \epsilon_0 \cdot E_z(z=0^+) - \epsilon_0 \cdot E_z(z=0^-)$$

$$(\text{Normalkomponente} = z\text{-Komponente}) \quad = 0, \text{ weil } \varphi = 0$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi(x, y, z)$$

$$\Rightarrow E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{2} [x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{-3/2} \cdot 2(z-a) - \dots \right. \\ \left. \dots \left[-\frac{1}{2} [x^2 + y^2 + (z+a)^2]^{-3/2} \cdot 2(z+a) \right] \right]$$

2b.

$$E_z = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z+a}{[x^2+y^2+(z+a)^2]^{3/2}} - \frac{z-a}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}} \right]$$

$$\sigma(x,y) = \epsilon_0 \cdot E_z(z=0^+)$$

$$= -\frac{q}{4\pi} \left[\frac{a}{[x^2+y^2+a^2]^{3/2}} - \frac{-a}{[x^2+y^2+a^2]^{3/2}} \right]$$

$$\sigma(x,y) = -\frac{q}{2\pi} \cdot \frac{a}{[x^2+y^2+a^2]^{3/2}} \quad \text{q.e.d.}$$

c. $x^2+y^2=R^2 \Rightarrow$ Zylinderkoordin.

$$Q_{\text{infl.}} = \int_{\text{Fläche}} \sigma(x,y) dx dy = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{R=0}^R \sigma(R') R' dR' d\phi$$

$$Q_{\text{infl.}} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{R=0}^R \frac{-\frac{q}{2\pi} a}{[R'^2+a^2]^{3/2}} R' dR' d\phi$$

$$= -q \cdot a \cdot \int_{R=0}^R \frac{R'}{[R'^2+a^2]^{3/2}} dR' = +q \cdot a \cdot \frac{1}{\sqrt{R'^2+a^2}} \Big|_0^R$$

$$Q_{\text{infl.}}(R) = q \cdot a \left[\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}} - \frac{1}{|a|} \right]$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} Q_{\text{infl.}}(R) = q \cdot a \left[0 - \frac{1}{|a|} \right] = -q, \quad \text{was zu erwarten war}$$

d. kleine Ausschläge $\Rightarrow \cos \phi \approx 1$ und $\sin \phi \approx \phi$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \phi \left[\frac{q}{L} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{4\pi L^2 a} \right] = 0$$

Ansatz: e^{st} in Dgl \Rightarrow charakt. Gl.: $s^2 = -\left[\frac{q}{L} + \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 m L a} \right]$ vgl. TET 1

$$s_{1/2} = \pm j \sqrt{\frac{q}{L} + \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 m L a}}$$

s ist rein imaginär \Rightarrow ungedämpfte, harmonische Schwingung!
 zu den Eigenfrequenzen $s_{1/2}$ gehören die Eigenfunktionen $e^{s_1 t}, e^{s_2 t}$

2e. 1. Schwingung \Rightarrow beschleunigte Ladung \Rightarrow Energieabstrahlung in Form von elektromagn. Wellen
 \Rightarrow Dämpfung des Pendels

2. Wirbelströme in leitender Fläche \Rightarrow nach Lenzscher Regel verursachen diese Wirbelströme ein Magnetfeld, welches seiner Ursache entgegen wirkt. (es gibt kein perpetuum mobile)
 \Rightarrow Dämpfung des Pendels

\Rightarrow ergo: Berücksichtige nicht nur Coulombkraft, sondern auch Lorentzkraft $\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$

3. Aufgabe

a. allg.: $\oint \vec{H} d\vec{s} = \iint \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{A}$

stat. Magnetfeld: $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \oint \vec{H} ds = \iint \vec{j} d\vec{A} \quad (1)$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{V}_m \quad (2)$$

Satz von Stokes auf (1): $\oint \vec{H} d\vec{s} = \iint \text{rot } \vec{H} d\vec{A} = \iint \vec{j} d\vec{A}$

$$\Rightarrow \iint [\text{rot } \vec{H} - \vec{j}] d\vec{A} \equiv \vec{0} \quad (3)$$

Gl. (3) soll für alle Flächen erfüllt werden \Rightarrow geht im Allgemeinen nur dann, wenn der Integrand $= \vec{0}$ ist:

$$\text{rot } \vec{H} - \vec{j} = \vec{0}$$

mit $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{B}$:

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} - \vec{j} = \vec{0} \Leftrightarrow \underline{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j}} \quad (4)$$

(2) in (4):

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{V}_m) = \mu_0 \cdot \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}_m) \underset{\text{Grassmann}}{=} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_m) \cdot \vec{\nabla} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{V}_m = \mu_0 \cdot \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\text{div } \vec{V}_m) - \Delta \vec{V}_m = \mu_0 \cdot \vec{j} \Rightarrow \boxed{\Delta \vec{V}_m = -\mu_0 \cdot \vec{j}}$$

\downarrow
O nach Aufgabenstellung

\Rightarrow Die Quelle von \vec{V}_m ist die Leitungsstromdichte!

3b.

$$\vec{V}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV(\vec{r}') \quad \text{— weil Strom gegen } z\text{-Richtung fließt}$$

$$\text{hier: } \vec{j} = I_1 \vec{e}_z; \quad dV(\vec{r}') = dz'$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_m(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_1 \vec{e}_z dz'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-I_1 \vec{e}_z dz'}{\sqrt{x^2+(y-d)^2+(z-z')^2}} \right\} \\ &= \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{\sqrt{x^2+(y-d)^2+(z-z')^2}} \right\} \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\text{Substitution: } u = z - z' \Rightarrow du = -dz'$$

$$\text{Grenzen: } z' = -\infty \rightarrow u = +\infty$$

$$z' = +\infty \rightarrow u = -\infty$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_m(\vec{r}) &= \frac{I_1 \mu_0}{4\pi} \left\{ - \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{du}{\sqrt{x^2+y^2+u^2}} + \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{du}{\sqrt{x^2+(y-d)^2+u^2}} \right\} \vec{e}_z \\ &= \frac{I_1 \mu_0}{2\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{x^2+y^2+u^2}} - \int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{x^2+(y-d)^2+u^2}} \right\} \vec{e}_z \\ &= \frac{I_1 \mu_0}{2\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^k \frac{du}{\sqrt{x^2+y^2+u^2}} - \int_0^k \frac{du}{\sqrt{x^2+(y-d)^2+u^2}} \right\} \vec{e}_z \\ &= \frac{I_1 \mu_0}{2\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \ln \frac{k + \sqrt{k^2+x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} - \ln \frac{k + \sqrt{k^2+x^2+(y-d)^2}}{\sqrt{x^2+(y-d)^2}} \right\} \vec{e}_z \\ &= \frac{I_1 \mu_0}{2\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \ln \frac{(k + \sqrt{k^2+x^2+y^2}) \cdot (\sqrt{x^2+(y-d)^2})}{(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot (k + \sqrt{k^2+x^2+(y-d)^2})} \right\} \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{V}_m(x,y) = \frac{I_1 \mu_0}{4\pi} \ln \frac{x^2+(y-d)^2}{x^2+y^2} \vec{e}_z}$$

3c.

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{V}_m(\vec{r})$$

d. $L_{21} = \frac{\Psi_2}{I_1}$ — Fluss durch Leiterschleife verursacht von Magnetfeld von I_1

$$L_{21} = \frac{\int_A \vec{B}_1 \cdot d\vec{A}_2}{I_1} = \frac{\int_A \text{rot } \vec{V}_m \cdot d\vec{A}_2}{I_1} = \frac{\oint \vec{V}_m \cdot d\vec{s}_2}{I_1} \quad \text{g.e.d.}$$

↑
Stokes

e.

$$\vec{V}_m = V_m \vec{e}_z$$

$$d\vec{s}_2 = \begin{cases} dx \vec{e}_x & , x \in [x_0 | x_0+a], y = \text{const} \\ dy \vec{e}_y & , y \in [y_0 | y_0+b], x = \text{const} \end{cases}$$

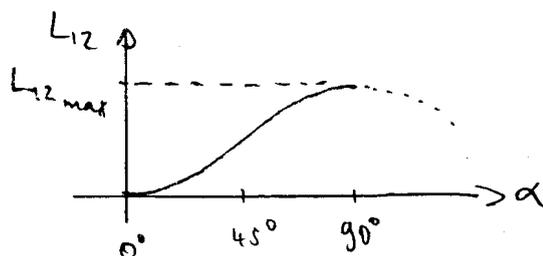
$$L_{12} = \frac{1}{I_1} \left\{ \int_{x_0}^{x_0+a} V_m \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_x}_{=0} dx \Big|_{y=y_0} + \int_{y_0}^{y_0+b} V_m \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_y}_{=0} dy \Big|_{x=x_0+a} + \dots \right. \\ \left. \dots + \int_{x_0+a}^{x_0} V_m \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_x}_{=0} dx \Big|_{y=y_0+b} + \int_{y_0+b}^{y_0} V_m \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_y}_{=0} dy \Big|_{x=x_0} \right\}$$

$$L_{12} = 0$$

klar, die Feldlinien durchsetzen die rechteckige Leiterschleife nicht

f. Leiterschleife schräg \Rightarrow Feldlinien durchsetzen
Leiterschleife $\Rightarrow L_{12} \neq 0$ (allg.: $L_{12} \geq 0$)

liegt Leiterschleife in y - z -Ebene ($\alpha = 90^\circ$), so durchsetzen die meisten Feldlinien die Leiterschleife $\Rightarrow L_{12} = \text{max.}$



prinzipieller Verlauf

Lösung 4. Aufgabe

9/11

a.

$$\Phi(t) = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_{y=0}^c \int_{z=-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} B_0 y z^2 e^{-t/t_0} dy dz$$

$$dA = \vec{e}_x dy dz$$

$$= B_0 e^{-t/t_0} \frac{y^2}{2} \Big|_0^c \cdot \frac{z^3}{3} \Big|_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}$$

$$\boxed{\Phi(t) = B_0 e^{-t/t_0} \cdot \frac{c^2}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{b^3}{8} + \frac{b^3}{8} \right) = \frac{B_0}{24} e^{-t/t_0} \cdot c^2 \cdot b^3}$$

bei dem gegebenen Zählerstil

$$\boxed{U_i = -\frac{d\Phi}{dt} = + \frac{B_0}{24 t_0} \cdot c^2 b^3 e^{-t/t_0}}$$

b.

$$\Phi(t) = \int_{y=0}^c \int_{z=-\frac{b}{2} \sin(2\pi f_0 t)}^{+\frac{b}{2} \sin(2\pi f_0 t)} B_0 y z^2 e^{-t/t_0} dy dz$$

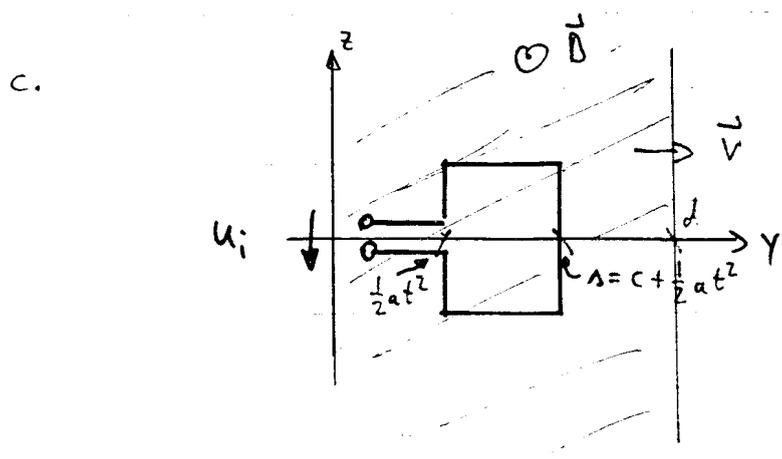
$$= B_0 e^{-t/t_0} \cdot \frac{c^2}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{b^3 \sin^3(2\pi f_0 t)}{8} + \frac{b^3 \sin^3(2\pi f_0 t)}{8} \right)$$

$$\underline{\underline{\Phi(t) = + \frac{B_0}{24} c^2 e^{-t/t_0} \cdot b^3 [\sin(2\pi f_0 t)]^3}}$$

$$U_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$= + \frac{B_0 c^2 b^3}{24 t_0} [\sin(2\pi f_0 t)]^3 e^{-t/t_0} - \frac{B_0 c^2 b^3}{24} e^{-t/t_0} \cdot 3 [\sin(2\pi f_0 t)]^2 \cdot \cos(2\pi f_0 t) \cdot 2\pi f_0$$

$$\boxed{U_i = \frac{B_0 c^2 b^3}{24} [\sin(2\pi f_0 t)]^3 e^{-t/t_0} \cdot \left\{ \frac{1}{t_0} - 6\pi f_0 \frac{\cos(2\pi f_0 t)}{\sin(2\pi f_0 t)} \right\}}$$



zurückgelegte Strecke aufgrund der Beschleunigung
 $\vec{a} = a \vec{e}_y : \frac{1}{2} a t^2$

4c.

$$\Phi(t) = \int_{y=\frac{1}{2}at^2}^{y=c+\frac{1}{2}at^2} \int_{z=-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} B_1 y e^{-t/t_0} dy dz$$

$$= B_1 e^{-t/t_0} b \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{\frac{1}{2}at^2}^{c+\frac{1}{2}at^2}$$

$$= B_1 e^{-t/t_0} b/2 \left[\left(c + \frac{1}{2}at^2\right)^2 - \left(\frac{1}{2}at^2\right)^2 \right]$$

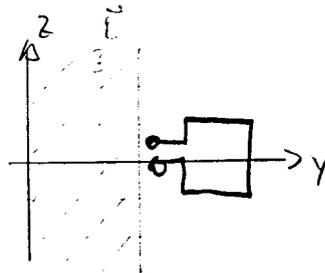
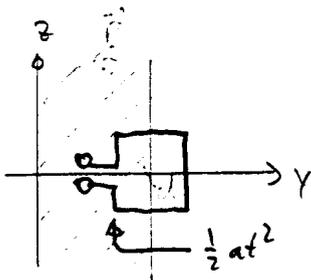
$$\underline{\underline{\Phi(t) = B_1 \frac{b}{2} e^{-t/t_0} \left[c^2 + act^2 \right]}}$$

$$u_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$= + \frac{B_1 b}{2t_0} e^{-t/t_0} \left[c^2 + act^2 \right] - \frac{B_1 b}{2} c e^{-t/t_0} \cdot \frac{1}{t_0} \cdot 2act$$

$$\boxed{u_i = \frac{B_1 b}{2t_0} e^{-t/t_0} \left[c^2 + act^2 \right] - B_1 ab c e^{-t/t_0} \cdot t}$$

d.



1. Fall: Leiterschleife teilweise im Magnetfeld:

$$\Phi(t) = \int_{y=\frac{1}{2}at^2}^d \int_{z=-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} B_1 y e^{-t/t_0} dy dz$$

$$\Phi(t) = \frac{B_1 b}{2} e^{-t/t_0} \left[d^2 - \frac{1}{4} a^2 t^4 \right]$$

$$u_i = -\frac{d\Phi}{dt} = + \frac{B_1 b}{2t_0} e^{-t/t_0} \left[d^2 - \frac{1}{4} a^2 t^4 \right] + \frac{B_1 b}{2} e^{-t/t_0} \cdot \frac{1}{t_0} \cdot \frac{1}{4} a^2 \cdot 4t^3$$

$$\boxed{u_i = \frac{B_1 b}{2t_0} e^{-t/t_0} \left[d^2 - \frac{1}{4} a^2 t^4 \right] + \frac{B_1 b}{2} e^{-t/t_0} a^2 t^3}$$

2. Fall: Leiterschleife außerhalb Magnetfeld

$$\Phi = \int \vec{B} d\vec{A} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{u_i = 0}$$

1. Aufgabe

Frank

H97

1.1

$$C = \frac{Q}{\Delta u} = \frac{Q}{\int_1^2 \vec{E} d\vec{s}}$$

elektr. Feld d. Kugelkond. \rightarrow Satz von Gauss

$$\iint \vec{D} d\vec{A} = \iiint \rho dV = Q;$$

$$D \cdot 4\pi r^2 = Q \quad ; r \in [R_1, R_2]$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Symmetrie: D hat nur radiale Komponente $\Rightarrow \vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r$

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \cdot \vec{D} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \cdot \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \cdot \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dr} = \frac{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{-\frac{1}{r} \Big|_{R_1}^{R_2}} = \frac{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$$

1.2

analog: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \cdot k \cdot \frac{1}{r} \cdot r^2} \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \cdot k \cdot r} \vec{e}_r$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 k} \cdot \frac{1}{r} dr} = \frac{4\pi \epsilon_0 \cdot k}{\ln(R_2/R_1)}$$

1.3.

$$C = \frac{Q}{\Delta u} = \frac{\iint \vec{D} d\vec{A}}{U_0}$$

\rightarrow Berechne \vec{D} über ohmsches Gesetz in Differentialform

$$\vec{g} = \chi \cdot \vec{E} = \frac{I}{A} \cdot \vec{e}_r = \frac{U_0/R}{A} \cdot \vec{e}_r$$

$$\text{vgl. } R = \frac{1}{\chi} \cdot \frac{l}{A} \quad \text{hier: } dR = \frac{1}{\chi} \cdot \frac{dr}{4\pi r^2}$$

$$R = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\chi} \cdot \frac{1}{4\pi r^2} dr = \frac{1}{4\pi \chi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

1.3

$$\vec{g} = \vec{E} = \frac{U_0/R}{A} \vec{e}_r = \frac{U_0}{R \cdot A} \vec{e}_r = \frac{U_0}{\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a} \right) 4\pi r^2} =$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{U_0}{\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a} \right)} \cdot \frac{1}{r^2} \vec{e}_r}$$

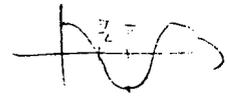
$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \vec{E}$$

$$\Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \oint \vec{E} d\vec{A}}{U_0} ; \quad d\vec{A} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \vec{e}_r, \quad \theta \in [0, \pi]$$

$$= \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{U_0}{\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a} \right)} \cdot \frac{1}{r^2} r^2 \sin\theta d\theta d\phi}{U_0} \quad \phi \in [0, 2\pi]$$

$$= \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \cdot 2\pi \cdot [\cos\theta]_0^\pi}{\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a} \right)}$$

$$\boxed{C = \frac{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}}}$$



1.4. Beachte es gilt: $D_{n1} = D_{n2}$ Stetigkeit weil an d. Grenzfläche keine freien Flächenladungsdichte!

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r \quad \text{nach Teilaufgabe 1.1} \quad \downarrow$$

z.B. Summe S. 147

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} \cdot \vec{D} ; \quad \vec{E}_2 = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} \cdot \vec{D}$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{Q}{\int_{R_i}^{R_0} E_1 dr + \int_{R_2}^{R_a} E_2 dr}$$

$$= \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1}} \int_{R_i}^{R_0} \frac{1}{r^2} dr + \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2}} \int_{R_2}^{R_a} \frac{1}{r^2} dr}$$

$$\boxed{C = \frac{4\pi \epsilon_0}{\frac{1}{\epsilon_{r1}} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_a} \right)}}$$

1.2.1 aus 1.3. sieht man:

$$\vec{E} = \frac{U_0}{\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2}} - \frac{1}{r^2} \vec{r} \quad \text{unabhängig von } x \text{ und } \epsilon$$

$\Rightarrow \vec{E}_n$ ist stetig $\Rightarrow D_n$ springt um (freie) Flächenladungsdichte

\Rightarrow Man denke sich Kondensator zusammengesetzt aus der Reihenschaltung von 2 Kond. mit ϵ_{r1} und ϵ_{r2}

$$\Rightarrow C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} \cdot \iint \vec{E} \cdot d\vec{A}}{U_0} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} \cdot 4\pi}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \quad (\text{vgl. Teilaufg. c.)}$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot 4\pi}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_a}}$$

$$\text{oder: } C_1 = 4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1}$$

$$C_2 = 4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} \cdot \frac{R_a \cdot R_2}{R_a - R_2}$$

$$\Rightarrow C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{(4\pi \epsilon_0)^2 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2} \cdot \frac{R_1 R_2 \cdot R_a \cdot R_2}{(R_2 - R_1)(R_a - R_2)}}{4\pi \epsilon_0 \left[\epsilon_{r1} \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1} + \epsilon_{r2} \frac{R_a \cdot R_2}{R_a - R_2} \right]}$$

$$C = 4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2} \cdot \frac{R_1 R_a R_2}{\epsilon_{r1} R_1 [R_a - R_2] + \epsilon_{r2} R_a [R_2 - R_1]}$$

$$\frac{R_1 R_2 R_a}{(R_2 - R_1)(R_a - R_2)} \cdot \frac{\epsilon_{r1} R_1 (R_a - R_2) + \epsilon_{r2} R_a (R_2 - R_1)}{\epsilon_{r1} R_1 (R_a - R_2) + \epsilon_{r2} R_a (R_2 - R_1)}$$

1. Z. 2

Grenzfälle bedingend: $E_{t1} = E_{t2}$

Symmetrie: \vec{D} und \vec{E} haben nur radiale Komponente

Gauß: $\int_{\text{Halbkugel 1}} \vec{D}_{\epsilon r_1} d\vec{A} = Q_1$

$$\int_{\text{Halbkugel 2}} \vec{D}_{\epsilon r_2} d\vec{A} = Q_2$$

$$Q_1 + Q_2 = Q$$

$$\Rightarrow \int \vec{D}_{\epsilon r_1} d\vec{A} + \int \vec{D}_{\epsilon r_2} d\vec{A} = Q$$

$$\epsilon_0 \epsilon_{r_1} \int \vec{E}_1 d\vec{A} + \epsilon_0 \epsilon_{r_2} \int \vec{E}_2 d\vec{A} = Q$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_1, \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_2$$

$$\Rightarrow E_1 = E_2 \Rightarrow E_1 = E_2$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 \epsilon_{r_1} E \cdot 2\pi r^2 + \epsilon_0 \epsilon_{r_2} E \cdot 2\pi r^2 = Q$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{e}_r \cdot \frac{Q}{2\pi r^2 \epsilon_0 [\epsilon_{r_1} + \epsilon_{r_2}]}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{Q}{\int_{r_i}^{r_a} \frac{Q}{2\pi r^2 [\epsilon_{r_1} + \epsilon_{r_2}]} dr} = \frac{2\pi \epsilon_0 [\epsilon_{r_1} + \epsilon_{r_2}]}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}}$$

1. Z. 3

Überführe asymmetrisches Problem mit Konformer

Abbildung in symmetrisches Problem nach Bild 3a

über.

Berechne Kapazität wie in 1. Z. 2.

Transformiere zurück \rightarrow ursprüngliches (asymm.)

Problem

Lösung 2. Aufgabe

2.1. 1. Fall: $s \leq R$

$$\vec{g} = \frac{I}{\pi R^2} \vec{e}_z = \text{konst}$$

Durchflutungsgesetz: $\oint \vec{H} d\vec{s} = \iint \vec{g} d\vec{A}$

Symmetrie: $\vec{H} = H \cdot \vec{e}_\phi(\phi)$

mit $d\vec{s} = \vec{e}_\phi \cdot ds$, $d\vec{A} = \vec{e}_z dA$

$$\Rightarrow \oint H ds = \iint_A \frac{I}{\pi R^2} dA$$

$$H \cdot \underbrace{2\pi s}_{\text{Wirtung}} = \frac{I}{\pi R^2} \cdot \pi s^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H} = \frac{I}{2\pi R^2} \cdot s \cdot \vec{e}_\phi(\phi)}$$

2. Fall: $s \geq R$:

analog: $\oint \vec{H} d\vec{s} = \sum \text{aller Ströme}$

$$H \cdot 2\pi s = I$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H} = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{s} \vec{e}_\phi(\phi)}$$

Kontrolle: $s=R$: $H = \frac{I}{2\pi R} = \frac{I}{2\pi R^2} \cdot R \checkmark$

2.2. $W = \frac{1}{2} L_i I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \int |\vec{H}|^2 dV$

$$L_i = \frac{\mu_0}{I^2} \cdot \int_{s=0}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L \frac{I^2}{4\pi^2 R^4} s^2 ds d\phi dz$$

$$\boxed{L_i = \frac{L_i}{L} = \frac{\mu_0 R^2}{2\pi^2 R^4} \int_{s=0}^R s^2 \cdot s ds = \frac{\mu_0}{2\pi R^2} \cdot \frac{s^4}{4} \Big|_0^R = \frac{1}{8} \frac{\mu_0}{\pi}}$$

$$2.2. \quad L_a' = \frac{L_a}{L} = \frac{\mu_0}{I^2} \cdot \frac{1}{L} \cdot \int_{s'=R}^s \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L \frac{I^2}{4\pi^2} \frac{1}{s'^2} s' ds' d\phi dz$$

$$\boxed{L_a'} = \frac{\mu_0}{I^2} \frac{1}{L} \cdot \frac{I^2}{4\pi^2} \cdot 2\pi L \cdot \int_R^s \frac{1}{s'} ds' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{s}{R}$$

$$2.3. \quad \text{Es gilt: } \vec{B} = \text{rot } \vec{V}_m, \quad \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{V}_m$$

$$\underline{s \geq R}: \quad \vec{H} = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{s} \vec{e}_\phi \text{ (nach a.)} \stackrel{!}{=} \text{rot } \vec{V}_m$$

→ betrachte nur \vec{e}_ϕ -komponente von $\text{rot } \vec{V}_m$:

$$\text{rot } \vec{V}_m \Big|_{\phi\text{-komp}} = \vec{e}_\phi \cdot \left[\frac{\partial V_3}{\partial z} - \frac{\partial V_2}{\partial s} \right]$$

$$\vec{V}_m = \frac{-\mu_0 I}{4\pi} \ln s^2 \vec{e}_z = V_z \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{V}_m \Big|_{\phi\text{-komp}} = \vec{e}_\phi \cdot \left[0 - \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{-\mu_0 I}{4\pi} \ln s^2 \right\} \right]$$

$$= + \vec{e}_\phi \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{s} \cdot 2s$$

$$= \vec{e}_\phi \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{V}_m \Big|_{\phi\text{-komp}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{e}_\phi \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{s} = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{s} \vec{e}_\phi = \vec{H} \text{ g.e.d.}$$

2.4c

$$L_{12} = \left| \frac{\oint \vec{V}_{m1} \cdot d\vec{s}_2}{I_1} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{I_1} \cdot \left\{ \int_{y=a}^b \vec{V}_{m1}(x,y) \cdot dy \vec{e}_y \right|_{\substack{x=0 \\ z=-c}} + \int_{z=-c}^{+c} \vec{V}_{m1}(x,y) \cdot dz \vec{e}_z \right|_{\substack{x=0 \\ y=b}} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \int_{y=b}^a \vec{V}_{m1}(x,y) \cdot dy \vec{e}_y \right|_{\substack{x=0 \\ z=c}} + \int_{z=c}^{-c} \vec{V}_{m1}(x,y) \cdot dz \vec{e}_z \right|_{\substack{x=0 \\ y=a}} \right|$$

Richtung ist in Integrationsweg enthalten!

$$\vec{V}_{m1}(x,y) = -\frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) \vec{e}_z$$

$$\text{NB: } \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_y = 0$$

$$\Rightarrow L_{12} = \left| \frac{1}{I_1} \cdot \left\{ \int_{z=-c}^{+c} -\frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) dz \right|_{\substack{x=b \\ y=b}} + \int_{z=c}^{-c} -\frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) dz \right|_{\substack{x=0 \\ y=a}} \right\}$$

$$= \left| -\frac{\mu_0}{4\pi} \ln b^2 \cdot \int_{-c}^{+c} dz + \frac{\mu_0}{4\pi} \ln a^2 \cdot \int_{-c}^{+c} dz \right|$$

$$= \left| -\frac{\mu_0}{4\pi} \ln b^2 \cdot 2c + \frac{\mu_0}{4\pi} \ln a^2 \cdot 2c \right|$$

$$L_{12} = \left| \frac{\mu_0}{4\pi} 2c \cdot \ln \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right|$$

aus 2.1. für $B \gg R$
 $\vec{H} = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{R} \cdot \vec{e}_\phi(\phi)$

$$\phi = \mu_0 \int_a^b 2c \cdot \frac{1}{2\pi} \frac{1}{y} dy$$

$$= \frac{\mu_0 c I}{\pi} \ln y \Big|_a^b = \frac{\mu_0 c I}{\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$L_{12} = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0 c}{\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Variable:

$$L_{12} = \frac{\int \vec{E} \cdot d\vec{A}_2}{I_1}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \frac{I \mu_0}{2\pi} \frac{1}{r} \vec{e}_\phi(\phi)$$

$$= \frac{I \mu_0}{2\pi} \frac{1}{r} (-\sin\phi \vec{e}_r + \cos\phi \vec{e}_z)$$

$x=0$ - z -axis

$$\Rightarrow \vec{E}(x=0) = \frac{I \mu_0}{2\pi} \frac{1}{y} \left(\right)$$

$$\text{Pot. } \phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{x} = \int \frac{I \mu_0}{2\pi} \frac{1}{x} dx = \frac{I \mu_0}{2\pi} \ln x$$

min. $\phi = 0$ at $x=1$

$$\Rightarrow \vec{E}(x=0) = \frac{I \mu_0}{2\pi} \frac{1}{y} \cdot (-\vec{e}_x) = -\frac{I \mu_0}{2\pi} \frac{1}{y} \vec{e}_x$$

$$d\vec{A} = -\vec{e}_x dy dz$$

$$\Rightarrow L_{12} = \frac{-\frac{I \mu_0}{2\pi} \int_{z=-c}^c \int_{y=a}^b \frac{1}{y} dy dz}{I_1}$$

I_1

$$L_{12} = -\frac{\mu_0}{2\pi} z_c \ln \frac{b}{a}$$

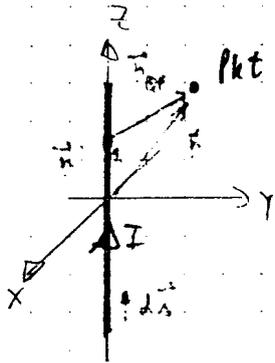
$$\frac{u}{v} = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

2.5. Stromelement $R \rightarrow ?$

$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$ für $s > R$: $\vec{H}(s) = \frac{I}{2\pi s} \vec{e}_\phi(\phi)$

Grenzwert $R \rightarrow 0$: $\vec{H}(s) = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{s} \vec{e}_\phi(\phi)$ unabhängig von R

2.7.1. Biot-Savart $\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \int_{\text{Strom}} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}_{sp}}{|\vec{r}_{sp}|^3}$



$d\vec{s} = dz' \vec{e}_z$; $\vec{r}_{sp} = \vec{r} - \vec{r}' = z\vec{e}_z + s\vec{e}_s - z'\vec{e}_z$

$\vec{r}_{sp} = (z-z')\vec{e}_z + s\vec{e}_s$

$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \int_{z'=-\infty}^{\infty} \frac{dz' \vec{e}_z \times [(z-z')\vec{e}_z + s\vec{e}_s]}{[s^2 + (z-z')^2]^{3/2}}$

NB: $\vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0}$

$\vec{e}_z \times \vec{e}_s = +\vec{e}_\phi(\phi)$

$= \frac{I}{4\pi} \int_{z'=-\infty}^{\infty} \frac{s \vec{e}_\phi(\phi)}{[s^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dz'$

Sub: $u = z - z' \rightarrow dz' = -du$

$= \frac{I}{4\pi} \int_{u=-\infty}^{+\infty} \frac{s}{[s^2 + u^2]^{3/2}} (-du) \vec{e}_\phi(\phi)$

↳ Bruchteil bei 2.6

$= \frac{I s}{4\pi} \vec{e}_\phi \cdot \frac{u}{s^2 \sqrt{s^2 + u^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{I s}{4\pi} \vec{e}_\phi \left[\frac{u}{s^2 \sqrt{s^2 + u^2}} \Big|_{u \rightarrow \infty} - \frac{u}{s^2 \sqrt{s^2 + u^2}} \Big|_{u \rightarrow -\infty} \right]$

$= \frac{I s}{4\pi} \vec{e}_\phi \cdot 2 \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{s^2 \sqrt{s^2 + u^2}} = \frac{I s}{4\pi} \vec{e}_\phi \cdot 2 \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{s^2 \sqrt{1 + (\frac{s}{u})^2}} = 1$

$\vec{H}(s) = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{s} \vec{e}_\phi(\phi)$

3.3.2. Maxwell'sche Gleichung:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \oint \vec{H} d\vec{s} = \iint (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{A}$$

\Rightarrow ist I zeitlich abw., folgt \vec{D} ist zeitabhängig

\Rightarrow es fließt ein Verschiebungsstrom!

\Rightarrow Durchflutungsgesetz: $\oint \vec{H} d\vec{s} = \iint \vec{j} d\vec{A}$ ist nicht
mehr gültig!

Aber: ist die zeitliche Änderung klein, d.h.

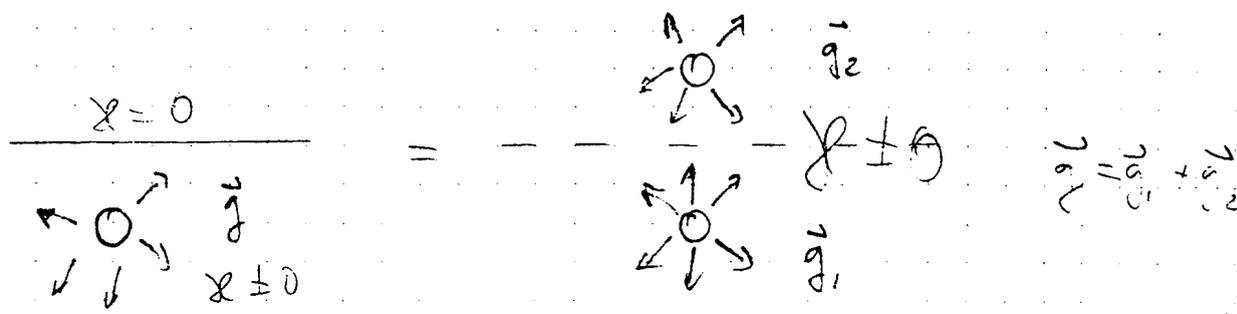
$\vec{j} \gg \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ so kann man die Quasistationäre
Näherung anwenden.

ist gültig!

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \iint \vec{j} d\vec{A}$$

3. Aufgabe

3.1.



Feld \vec{g} eines Zylinders in Ursprung: $\vec{g} = \frac{I}{\pi 2sL} \vec{e}_s = \frac{I}{2\pi L} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Verschiebung nach $\begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$: $\vec{g}_1(x,y,z) = \frac{I}{2\pi L} \frac{1}{x^2+(y+a)^2} \begin{pmatrix} x \\ y+a \\ 0 \end{pmatrix}$

analog: $\vec{g}_2(x,y,z) = \frac{I}{2\pi L} \frac{1}{x^2+(y-a)^2} \begin{pmatrix} x \\ y-a \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{g}(x,y,z) = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = \frac{I}{2\pi L} \left[\frac{1}{x^2+(y+a)^2} \begin{pmatrix} x \\ y+a \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{x^2+(y-a)^2} \begin{pmatrix} x \\ y-a \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

für $y \leq 0$

$$\vec{g} = \vec{0} \text{ für } y > 0 \quad (\text{weil } \rho = 0) \quad \text{kontrolle: } y=0: g_x = 0 = g_y$$

3.2.

$$\vec{g} = \epsilon \cdot \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{g}$$

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{I}{2\pi \epsilon L} \left[\frac{x\vec{e}_x + (y+a)\vec{e}_y}{x^2+(y+a)^2} + \frac{x\vec{e}_x + (y-a)\vec{e}_y}{x^2+(y-a)^2} \right]$$

3.3.

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi$$

$$\vec{E} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix}; \quad E_x = \frac{I}{2\pi \epsilon L} \left[\frac{x}{x^2+(y+a)^2} + \frac{x}{x^2+(y-a)^2} \right]$$

$$\Rightarrow \varphi = - \int E_x dx + C_1(y,z)$$

NO: $\int \frac{x}{x^2+a^2} dx$; Sub: $u = x^2+a^2 \rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{u} \cdot \frac{1}{2u} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln u = \frac{1}{2} \ln(x^2+a^2)$$

$$3.3. \Rightarrow \varphi_1 = \frac{-I}{2\pi\epsilon_0 L} \left[\ln(x^2 + (y+a)^2) + \ln(x^2 + (y-a)^2) \right] + C_1(y, z)$$

$\downarrow f(x)$

analog: $\varphi_2 = -\int \vec{E}_y dy + C_2(x, z)$

$$\varphi_2 = \frac{-I}{2\pi\epsilon_0 L} \left[\ln(x^2 + (y+a)^2) + \ln(x^2 + (y-a)^2) \right] + C_2(x, z)$$

$\downarrow f(y)$

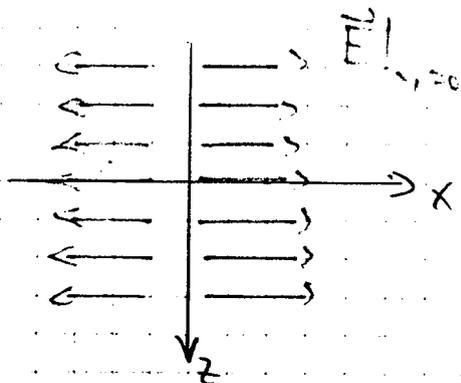
$$\varphi_3 = -\int E_z dz + C_3(x, y)$$

$$\Rightarrow \varphi(x, y) = \frac{-I}{2\pi\epsilon_0 L} \left[\ln(x^2 + (y+a)^2) + \ln(x^2 + (y-a)^2) \right]$$

3.4. $y=0$: $\vec{E} = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 L} \left[\frac{x\vec{e}_x + a\vec{e}_y}{x^2 + a^2} + \frac{x\vec{e}_x + (-a)\vec{e}_y}{x^2 + a^2} \right]$

$$\vec{E} \Big|_{y=0} = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot 2 \frac{x}{x^2 + a^2} \vec{e}_x$$

d.h. Feldlinien verlaufen parallel in $\pm x$ -Richtung.



Klar, \vec{g} hat nur radiale Komponente
 $\Rightarrow \vec{E}$ hat nur radiale Komp., d.h.
 bei Drahtseil hat \vec{E} nur x -
 Komponente!

$$3.5 \quad \rho = \text{div } \vec{D} = \text{div}(\epsilon \cdot \vec{E}) = \epsilon \cdot \text{div } \vec{E} = \epsilon \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right]$$

$\uparrow \epsilon = \text{konst}$

$$\text{NB: } \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$\Rightarrow \rho = \epsilon \cdot \left\{ \frac{1 \cdot [x^2 + (y+a)^2] - 2x \cdot x}{[x^2 + (y+a)^2]^2} + \frac{1 \cdot [x^2 + (y-a)^2] - 2x \cdot x}{[x^2 + (y-a)^2]^2} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{[x^2 + (y+a)^2] - 2(y+a) \cdot (y+a)}{[x^2 + (y+a)^2]^2} + \frac{[x^2 + (y-a)^2] - 2(y-a) \cdot (y-a)}{[x^2 + (y-a)^2]^2} \right\}$$

3. Z. 1.

$$D_{n1} - D_{n2} = \sigma$$

$$\epsilon \cdot E_y|_{y=0^-} - \epsilon \cdot E_y|_{y=0^+} = \sigma$$

$= 0$, weil $\neq dt$ aber $h_1 \neq h_2$, da $\vec{g} = \vec{0}$ für $y > 0$

$$E_y(0^-) = \frac{I}{2\pi \cdot L} \left[\frac{a}{x^2 + a^2} + \frac{-a}{x^2 + a^2} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = 0}$$

3. Z. 2. Quasistat Näherung = Vernachlässigung d. Verschiebungsstromes $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Maxwell'sche Gl für Quasistat Näherung:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \vec{j} \\ \text{rot } \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

\Rightarrow Vernachlässigung d. Verschiebungsstromes

\rightarrow Berechne \vec{j} wie in 3.1; aber: \vec{j} ist zeitabhängig $\Rightarrow \vec{E}$ ist zeitabhängig
Rechnung wie in 3.2

4. Aufgabe

4.1

$$\text{rot } \vec{e} = - \frac{\partial \vec{b}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{h} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{d}}{\partial t}$$

harmonische \vec{e}, \vec{d} • Entweder Ansatz: $\vec{e} = E_0 \cdot e^{j\omega t}$
• oder Fouriertransformation

Fouriertransformation: $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$; $\vec{e} \rightarrow \underline{E}$; $\vec{h} \rightarrow \underline{H}$

$$\Rightarrow \text{rot } \underline{E} = -j\omega \underline{B} \quad (1)$$

$$\text{rot } \underline{H} = \underline{j} + j\omega \underline{D} \quad (2)$$

(1): $\text{rot } \underline{E}$ - Wirbel des elektr. Feldes erzeugen ein magn. Feld $\omega \underline{B}$ (Induktionsansatz)

(2): $\text{rot } \underline{H}$ - Wirbel des magn. Feldes erzeugen einen Leitungsstrom \underline{j} und einen Verschiebungsstrom $\omega \underline{D}$.

4.2

Induktionsgesetz (1): $\text{rot } \underline{E} = -j\omega \underline{B} = -j\omega \mu_0 \underline{H}$
Vakuum!

$$\Rightarrow \underline{H} = - \frac{1}{j\omega \mu_0} \text{rot } \underline{E} = + \frac{j}{\omega \mu_0} \text{rot } \underline{E}$$

$$= \frac{j}{\omega \mu_0} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y \\ \frac{\partial}{\partial z} E_x - \frac{\partial}{\partial x} E_z \\ \frac{\partial}{\partial x} E_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x \end{pmatrix}$$

$$= \frac{j}{\omega \mu_0} \left[\vec{e}_x \cdot 0 - \vec{e}_y \cdot \left(- \frac{\partial}{\partial z} E_0 e^{j\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z} \right) + \vec{e}_z \cdot \left(- \frac{\partial}{\partial x} E_0 e^{j\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z} \right) \right]$$

$$= \frac{j}{\omega \mu_0} \left(+ E_0 e^{j\omega t} \cdot \left(- \frac{2\pi}{\lambda} \right) e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} z} \right) \vec{e}_y$$

$$\underline{H}(z,t) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{E_0}{\omega \mu_0} e^{j\omega t} e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} z} \vec{e}_y$$

4.3

$$\frac{|\vec{E}(z,t)|}{|\vec{H}(z,t)|} = \frac{|E_0 e^{i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} z)} \vec{e}_x|}{\frac{E_0 z_0}{\lambda_0 \mu_0} e^{i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} z)} \vec{e}_y} = \frac{|E_0| \cdot |e^{i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} z)}|}{\frac{E_0 z_0}{\lambda_0 \mu_0} |e^{i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} z)}|} = \frac{E_0 \lambda_0 \mu_0}{z_0}$$

$$\frac{|\vec{E}(z,t)|}{|\vec{H}(z,t)|} = \frac{\omega \mu_0 \lambda_0}{2\pi} = \frac{2\pi f \mu_0 \lambda_0}{2\pi} = \boxed{f \mu_0 \lambda_0}$$

Einheiten: $[f] = \frac{1}{s}$; $[\lambda_0] = m$; $[\mu_0] = \frac{Vs}{Am}$

$$\Rightarrow \boxed{[f \mu_0 \lambda_0] = \frac{1}{s} \cdot \frac{Vs}{Am} \cdot m = \frac{V}{A} = \Omega}$$

\Rightarrow Bedeutung: Feldwellenwiderstand

NB: $\frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = f \mu_0 \lambda_0$; $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ Vakuumlichtgeschwindigkeit
 $c = \lambda \cdot f$

$$\Rightarrow \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = c \cdot \mu_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \cdot \mu_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

$$\boxed{\frac{|\vec{E}(z,t)|}{|\vec{H}(z,t)|} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} \quad \text{alternativ}$$

4.4 Poynting Vektor

$$\vec{S} = \vec{E}(+) \times \vec{H}(+) \quad ; \quad \vec{E}(+) = E_0 \begin{Bmatrix} \vec{e}_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & E_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} z) & 0 \\ \vec{e}_y & 0 & \frac{E_0}{\lambda_0 \mu_0} \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} z) \\ \vec{e}_z & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_x \cdot 0 - \vec{e}_y \cdot 0 + \vec{e}_z \cdot \frac{E_0^2}{\lambda_0 \mu_0} \cos^2$$

$$\vec{S} = \frac{E_0^2}{\mu_0 f \lambda_0} \cos^2(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} z) \vec{e}_z$$

Beachte: Leistungsdichte ist proportional E_0^2

Leistungsdichte $\hat{=}$ Intensität!

$$\Rightarrow \text{Augenblicks wert: } \frac{E_0^2}{\mu_0 f \lambda_0} \cos^2(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} z)$$

Richtung: pos. z-Richtung

4.3.1

Betrachte Einheiten: $[E_0^2] = \frac{V^2}{m^2}$ $[\mu_0 f \lambda] = \frac{V}{A} (= \Omega)$

$\Rightarrow [S] = \frac{V^2}{m^2} \cdot \frac{A}{V} = \frac{VA}{m^2} = \frac{W}{m^2} = \frac{W_s}{\Delta m^2} = \frac{J}{\Delta m^2}$

$\frac{J}{\Delta}$: Energiefluss $\quad ; \quad \frac{J}{\Delta m^2} = \text{Energiefl. dichte}$

$\Rightarrow |\vec{S}|$ gibt den Betrag der Energieflussdichte in jedem Punkt an, den eine elektromagn. Welle transportiert

Die Richtung von \vec{S} gibt die Richtung an, in die die Energie transportiert wird.

4.3.2

$\text{rot } \vec{E} = -j\omega \mu_0 \vec{H}$ (Vekuum)

$\text{rot } \vec{H} = \vec{G} + j\omega \vec{D} = \vec{G} + j\omega \epsilon_0 \vec{E}$ (Vekuum)

Vekuum = 0 kein Leitungsstrom $\vec{G} = \vec{0}$

$\Rightarrow \text{rot } \vec{E} = -j\omega \mu_0 \vec{H}$ (1) $\text{div } \vec{D} = \rho$
 $\text{rot } \vec{H} = j\omega \epsilon_0 \vec{E}$ (2) $\epsilon_0 \text{div } \vec{E} = \rho = 0$, Vekuum

$\text{rot } (1) : \text{rot rot } \vec{E} = -j\omega \mu_0 \text{rot } \vec{H}$

mit (2) : $\text{rot rot } \vec{E} = -j\omega \mu_0 j\omega \epsilon_0 \vec{E}$

$\text{rot rot } \vec{E} = +\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \vec{E}$

$\text{rot rot } \vec{E} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \cdot \vec{\nabla} - |\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}| \vec{E} = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \vec{E}$

$\text{div } \vec{E} \text{ quadr.} - \Delta \vec{E} = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \vec{E}$

$\Rightarrow \text{quadr. div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \vec{E}$ $\text{vgl. } \text{div } \vec{D} = \epsilon_0 \text{div } \vec{E} = \rho$

$\Rightarrow \Delta \vec{E} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \vec{E} = \vec{0}$ Helmholtzgleichung

Diplomhauptprüfung (WS 97/98)

Theoretische Elektrotechnik III

1. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
2. Außer Schreib- und Zeichenmaterial sind keine Hilfsmittel zugelassen (auch kein Taschenrechner)!
3. Die jeweils maximal erreichbare Punktzahl pro Teilaufgabe ist in Klammern am Ende jeder Teilaufgabe angegeben.
4. Es sind alle Aufgaben zu bearbeiten! Die Zusatzaufgaben sind optional.
5. Verwenden Sie ausschließlich die Ihnen ausgeteilten Doppelbögen; nur diese werden bewertet. Trennen Sie die Doppelbögen nicht. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Doppelbogen!
6. Schreiben Sie auf jeden Doppelbogen Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Aufgabe (inklusive der Teilaufgabe), die Sie bearbeiten!
7. Zeigen Sie den gewählten Lösungsweg auf. Geben Sie insbesondere Zwischenergebnisse und Begründungen an. Nur eindeutige Aussagen können bewertet werden!
8. Einige häufig gebrauchte Formeln finden Sie im Anhang.
9. **VIEL ERFOLG!!!**

1. Aufgabe: Stationäres Strömungsfeld in einem Halbleiter (10 Punkte + 3 Zusatzpunkte)

In Abb. 1.1 ist ein Ausschnitt aus einem n-Halbleiter mit der **konstanten** Leitfähigkeit $\kappa > 0$ und der **konstanten** Dielektrizitätszahl $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r > 0$ zu sehen. Der n-Halbleiter kann in der $\pm y$ -Richtung, $\pm z$ -Richtung sowie in der $+x$ -Richtung als unendlich ausgedehnt angenommen werden. An der Halbleiteroberfläche ist ein **halbkugelförmiger** Kontakt an der Stelle $y = a$ mit Radius R angebracht, über den der eingepreßte Strom I dem Halbleiter zugeführt wird. Der Strom verteilt sich gleichmäßig über den halbkugelförmigen Kontakt. Der halbkugelförmige Kontakt ist so hoch dotiert (n^+ Gebiet, „entartet dotiert“), daß er als perfekter Leiter mit der Leitfähigkeit $\kappa \rightarrow \infty$ angenommen werden kann.

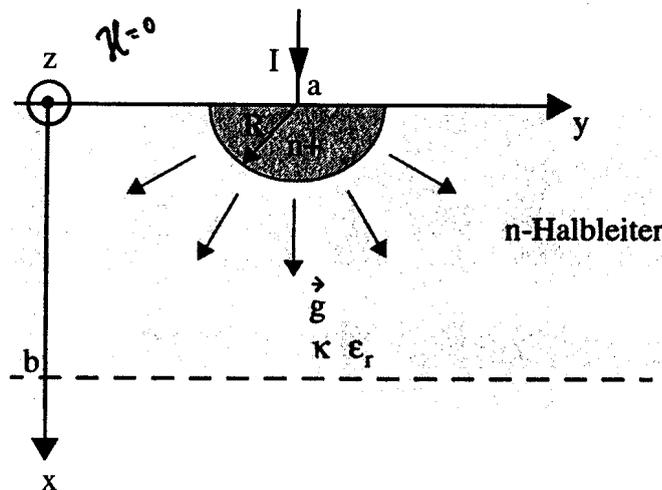


Abb. 1.1: Geometrie des Halbleiters

- ✓ 1.1 Berechnen Sie die Stromdichte $\vec{g}(x, y, z)$ als Funktion des Stromes I und des Ortes im n-Halbleiter, welcher in $\pm y$ -Richtung und $+x$ -Richtung unendlich ausgedehnt ist! (3 Punkte)
- ✓ 1.2 Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(x, y, z)$ im n-Halbleiter! (1 Punkt)
- 1.3/ Bestimmen Sie das elektrische Potential ϕ im n-Halbleiter in einer Ebene $x = \text{konst.}$! Nehmen Sie hierzu an, daß das halbkugelförmige n^+ Gebiet auf dem Potential $\phi_0 = 0$ liegt. (3 Punkte)
- 1.4 Berechnen Sie die Raumladungsdichte $\rho(x, y, z)$ im n-Halbleiter! (3 Punkte)

Zusatzaufgabe:

- 1.Z.1 An der Stelle $x = b$ parallel zur y - z -Ebene werde nun ein Aluminiumkontakt mit unendlich guter Leitfähigkeit angebracht (in Abb. 1.1 gestrichelt gezeichnet). Dieser Kontakt sei in $\pm y$ und $\pm z$ -Richtung unendlich ausgedehnt. Berechnen Sie $\vec{g}(x, y, z)$ im n-Halbleiter ($x < b$)! (3 Punkte)

2. Aufgabe: Magnetfeld eines Stromfadens und eines Streifenleiters (10 Punkte + 3 Zusatzpunkte)

Gegeben sei ein unendlich langer Stromfaden (vgl. Abb. 2.1), der sich parallel zur x -Achse befindet und durch den Punkt $P_0(0, y_0, 0)$ tritt. Ferner sei nach Abb. 2.2 ein Streifenleiter mit der Länge $l_1 \rightarrow \infty$ und der Breite b gegeben. Der Stromfaden und der Streifenleiter werden von dem **zeitabhängigen Strom** $i(t) = I_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$ in positiver x -Richtung durchflossen. Dieser Strom verteilt sich im Falle des Streifenleiters homogen über die Breite b des Streifenleiters. Im Folgenden wird immer die **quasistationäre Näherung** vorausgesetzt!

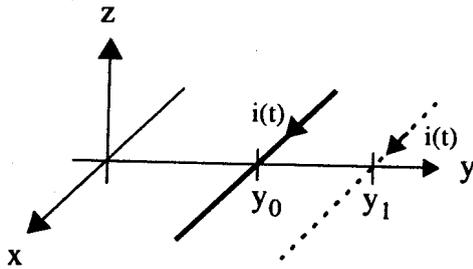


Abb. 2.1: Stromfaden

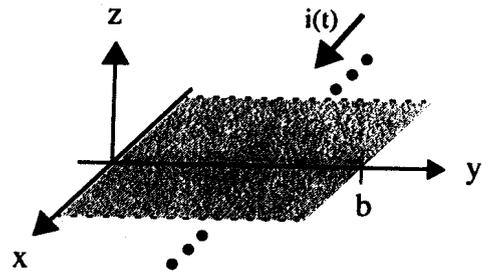


Abb. 2.2: Streifenleiter

- 2.1 / Was versteht man unter der „quasistationären Näherung“? Wie lautet das Durchflutungsgesetz allgemein und wie im Fall der quasistationären Näherung? (2 Punkte)
- 2.2 / Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{H}(\vec{r})$ des Stromfadens durch $y = y_0$, welcher von dem Strom $i(t) = I_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$ durchflossen wird, siehe Abb. 2.1! (3 Punkte)
- 2.3 / Berechnen Sie nun das Magnetfeld $\vec{H}(\vec{r})$ des Streifenleiters nach Abb. 2.2, indem Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe 2.2 verwenden. (4 Punkte)
- 2.4 Das Magnetfeld aus Teilaufgabe 2.3 lässt sich für große Entfernungen von der x -Achse vereinfachen. Geben Sie eine Näherungslösung für das Fernfeld an! (1 Punkt)

Zusatzaufgabe:

- 2.Z.1 Nun sei zu dem in Abb. 2.1 gezeigten Stromfaden noch ein zweiter Stromfaden, welcher durch $y = y_1$ tritt (in Abb. 2.1 gepunktet gezeichnet) und parallel zum linken Stromfaden verläuft, gegeben. Berechnen Sie die charakteristische Größe, welche die Verkopplung der beiden Magnetfelder (hervorgerufen durch die beiden Stromfäden) beschreibt! Sie brauchen nur das zu lösende Integral aufzustellen mit allen bekannten Größen! (3 Punkte)

3. Aufgabe: Induktionsgesetz (11 Punkte + 3 Zusatzpunkte)

Eine dreieckige Leiterschleife nach Abb. 3.1 befindet sich in dem zeit- und ortsabhängigen Magnetfeld $B(z, t) = B_0 \cdot z^2 \cdot t \cdot \vec{e}_x$ mit $B_0 = \text{const} > 0$. Das Magnetfeld existiere im gesamten Halbraum $y \geq 0$. Die Leiterschleife sei an der Stelle $(0,0,0)$ aufgetrennt, um dort eine Spannung abgreifen zu können. Diese winzige Unterbrechung der Leiterschleife stört die Anordnung nicht. Die weiteren geometrischen Abmessungen der Anordnung sind der Abb. 3.1 zu entnehmen.

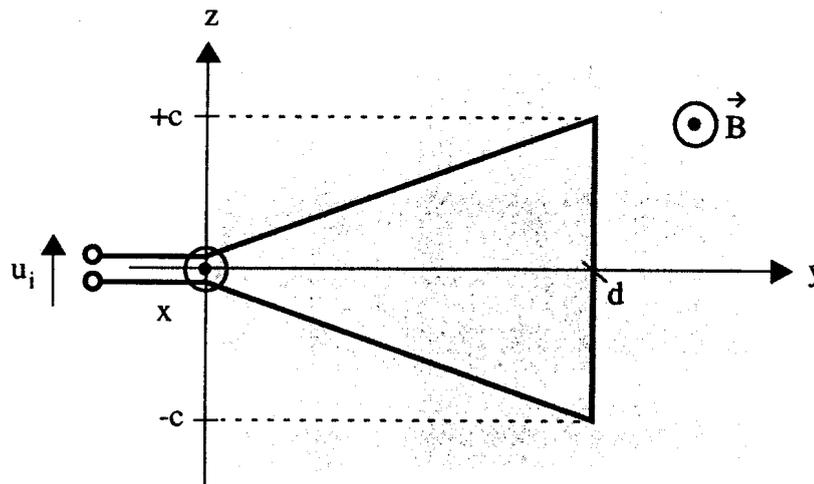


Abb. 3.1: Dreieckige Leiterschleife im Magnetfeld

- 3.1 ✓ Berechnen Sie den magnetischen Fluß Φ durch die Leiterschleife nach Abb. 3.1! (3 Punkte)
- 3.2 ✓ Berechnen Sie vorzeichenrichtig die Induktionsspannung u_{i1} der Anordnung nach Abb. 3.1! Begründen Sie Ihre Vorzeichenwahl! (2 Punkte)
- 3.3 ✓ Die Leiterschleife werde nun mit konstanter **Beschleunigung** $a > 0$ in Richtung der positiven y-Achse bewegt. Das Magnetfeld sei immer noch zeit- und ortsabhängig. Berechnen Sie vorzeichenrichtig die Induktionsspannung u_{i2} ! (3 Punkte)
- 3.4 ✓ Nun bewege sich die Leiterschleife nicht mehr, sondern sei wieder in dem Zustand wie er in Abb. 3.1 zu sehen ist. Jedoch rotiert die Leiterschleife jetzt um die y-Achse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 ausgehend von der Konfiguration nach Abb. 3.1. Berechnen Sie die Induktionsspannung u_{i3} ! (3 Punkte)

Zusatzaufgabe:

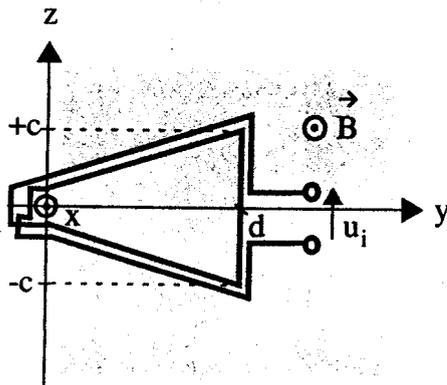


Abb. 3.2: Leiterschleife mit Überkreuzung

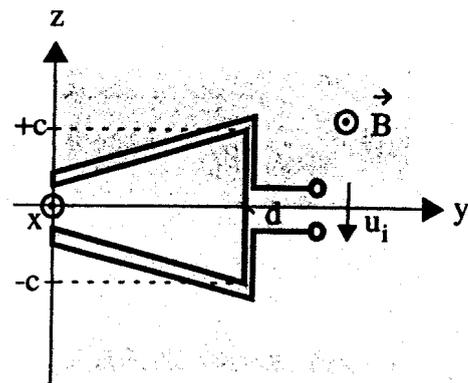


Abb. 3.3: Leiterschleife ohne Überkreuzung

- 3.Z.1 Nun ist das Magnetfeld **ortsunabhängig** und es gilt: $B(t) = B_1 \cdot t^2 \cdot \vec{e}_x$ mit $B_1 = \text{const} > 0$. Die etwas versetzt gezeichneten Leiterbahnen sind als genau über der inneren dreieckigen Leiterschleife liegend anzusehen. Berechnen Sie vorzeichenrichtig die induzierte Spannungen u_i für die Anordnungen der Leiterschleifen nach Abb. 3.2 und 3.3. Begründen Sie Ihre Antwort! (3 Punkte)

4. Aufgabe: Harmonische elektromagnetische Wellen (13 Punkte + 3 Zusatzpunkte)

Gegeben sei das magnetische Feld $\vec{H}(z, t)$ einer **harmonischen** elektromagnetischen Welle, welche sich im **Vakuum** ausbreitet mit

$$\vec{H}(z, t) = H_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-jkz} \cdot \vec{e}_y; \quad H_0, \omega, k = \text{konst} > 0.$$

- 4.1 / Um welche Wellenform handelt es sich! Leiten Sie Ihre Aussage mathematisch her! (2 Punkte)
- 4.2 / In welche Richtung und mit welcher Geschwindigkeit breitet sich die Welle aus? Leiten Sie auch hier Ihre Aussage mathematisch her! (3 Punkte)
- 4.3 / Berechnen Sie das zum magnetischen Feld $\vec{H}(z, t)$ gehörige elektrische Feld $\vec{E}(z, t)$! (4 Punkte)
- 4.4 / Wie muß das elektrische Feld einer zweiten Welle beschaffen sein, damit sich der resultierende Feldvektor, der durch Überlagerung der beiden elektrischen Felder entsteht, in einer Ebene $z = \text{const}$ im Uhrzeigersinn auf einer Kreisbahn dreht (bei Blickrichtung in positive z -Richtung)? Beweisen Sie Ihre Aussage mathematisch! (4 Punkte)

Zusatzaufgabe:

- 4.Z.1 Erklären Sie eine analoge Anordnung, die das Verhalten der Grundwelle in einer Koaxialleitung an einer Grenzfläche mit unterschiedlichem Dielektrikum beschreibt (die Grenzfläche steht senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung, vgl. Abb. 4.1)! Begründen Sie Ihre Antwort! (3 Punkte)

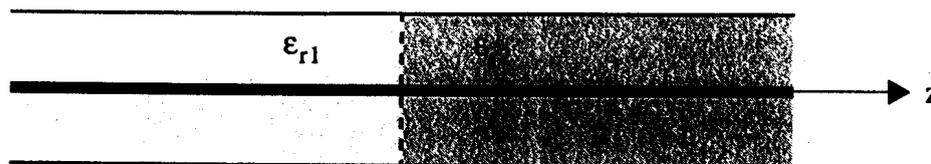


Abb. 4.1: Koaxialleiter mit zwei unterschiedlichen Dielektrika

Formelsammlung

1. Zylinder- und Kugelkoordinaten:

$$\vec{e}_\rho(\phi) = \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\phi \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\phi(\phi) = -\sin\phi \cdot \vec{e}_x + \cos\phi \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{r}(\phi, \theta, z) = \rho \cdot \vec{e}_\rho(\phi) + z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [x\vec{e}_x + y\vec{e}_y]$$

$$\vec{e}_\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot [-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y]$$

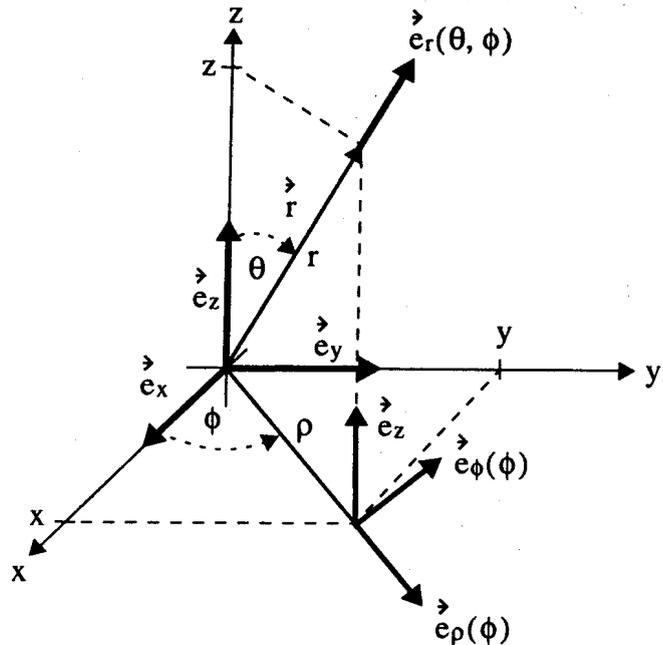
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{e}_r(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{e}_r(\theta, \phi) = \sin\theta \cos\phi \cdot \vec{e}_x + \sin\theta \sin\phi \cdot \vec{e}_y + \cos\theta \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{r}(\phi, \theta, z) = r \cdot \vec{e}_r(\theta, \phi)$$



2. Oberflächen- und Volumenelemente:

$$dA(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \cdot \vec{e}_r$$

$$dV(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$$

$$dA(\rho, z, \phi) = \rho d\phi dz$$

$$dV(\rho, z, \phi) = \rho d\rho d\phi dz$$

3. Vektoren:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \text{ mit } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$$

4. Rotation in Zylinderkoordinaten

$$\vec{\text{rot}}A = \vec{e}_\rho \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right] + \vec{e}_\phi \cdot \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] + \vec{e}_z \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right]$$

5. Laplace-Operator und Gradient in Kugelkoordinaten

$$\Delta\varphi(\phi, \theta, z) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \right]$$

$$\vec{\text{grad}}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \cdot \vec{e}_\phi$$

6. Näherungsformeln:

Für kleine Winkel α gilt: $\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$ und $\cos\alpha \approx 1$

Reihen: $\sin\phi \approx \phi - \frac{\phi^3}{3!}, \quad \cos\phi \approx 1 - \frac{\phi^2}{2!}, \quad \frac{1}{1 \pm x} \approx 1 \mp x$

7. Integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C,$$

$$\int \frac{xdx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + C,$$

$$\int \frac{dx}{[x^2 + a^2]^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \cdot \sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Theat III

WSG 7/98: "Beispiellösung eines Feldes auf Richtigkeit"

1.1

$$\vec{g}(x, y, z) = 0 \quad \text{für } x < 0$$

in Ausschnitt:

$$\vec{g} = \frac{I}{A} = \frac{I}{2\pi r^2} \vec{e}_r \quad \text{für } r < R$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{e}_r = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\vec{g} = \frac{I}{2\pi} \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

oder (0, a, c) verschieben [(y-a) für y einsetzen]

$$\vec{g} = \frac{I}{2\pi} \frac{x\vec{e}_x + (y-a)\vec{e}_y + z\vec{e}_z}{(x^2 + (y-a)^2 + z^2)^{3/2}} \quad \text{für } \sqrt{(x^2 + (y-a)^2 + z^2)} > R \quad \text{und } x > 0$$

$$\vec{g} = \frac{I}{2\pi R^2} \quad \text{für } \sqrt{x^2 + (y-a)^2 + z^2} < R \quad (\text{konstant verteilt})$$

$$\vec{g} = 0 \quad \text{für } x < 0$$

$$1.2 \quad \vec{g} = \kappa \cdot \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\kappa} \cdot \vec{g}$$

$$\vec{E} = 0 \quad \text{für } x < 0$$

$$\vec{E} = 0 \quad \text{für } \sqrt{x^2 + (y-a)^2 + z^2} < R, \text{ da } \kappa \rightarrow \infty$$

$$\vec{E} = \frac{I}{2\pi \kappa} \frac{x\vec{e}_x + (y-a)\vec{e}_y + z\vec{e}_z}{(x^2 + (y-a)^2 + z^2)^{3/2}} \quad \text{für sonst.}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$$

$$\varphi = -\int \vec{E} dx + C_1(y, z)$$

$$\varphi = -\int \vec{E} dy + C_2(x, z)$$

$$\varphi = -\int \vec{E} dz + C_3(x, y)$$

oder aus $\vec{g} = \frac{I}{A} = \frac{I}{2\pi r^2} \vec{e}_r$

$$\vec{E} = \frac{1 \cdot I}{R \cdot 2\pi r^2} \vec{e}_r \quad (\text{im Ursprung})$$

$$\varphi(r) = -\int \vec{E} dr + C_0$$

$$\varphi(r) = \frac{I}{R \cdot 2\pi} \frac{1}{r} + C_0$$

$$\varphi(R) = \frac{I}{R \cdot 2\pi} \frac{1}{R} + C_0 = 0 \rightarrow C_0 = -\frac{I}{R \cdot 2\pi R}$$

im Ursprung

$$\varphi(r) = \frac{I}{2\pi R} \cdot \frac{1}{r} - \frac{I}{R \cdot 2\pi R}$$

$$r = \sqrt{x^2 + (y-a)^2 + z^2}$$

$$\varphi(r) = \frac{I}{2\pi R} \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2 + z^2}} - \frac{I}{R \cdot 2\pi R}$$

für $x > 0$
und $\sqrt{x^2 + (y-a)^2 + z^2} \rightarrow R$

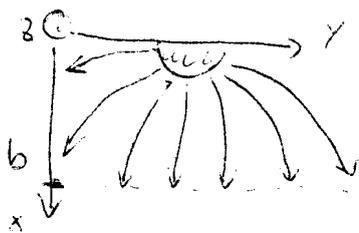
$$\varphi(r) = 0 \quad \text{für } x < 0$$

1.4 $D_{n1} + D_{n2} = \varphi \quad D_{n2} = 0$, da $E = 0$ für $x < 0$

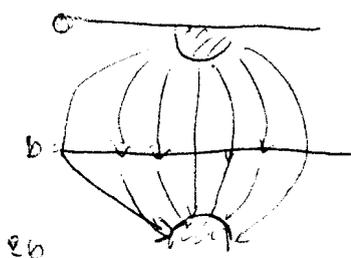
$$\epsilon E_{n1} = \varphi$$

$$\epsilon E \Big|_{x=0} = \varphi = \frac{\epsilon I}{2\pi R} \frac{(y-a)e_y + ze_z}{((y-a)^2 + z^2)^{3/2}}$$

1.2.1



||



Idoc: Spiegellösungsmethode mit Überlagerung.

$$\vec{g}(x,y,z) = C \quad \begin{cases} x < 0 \text{ und} \\ x > b \end{cases}$$

$$\vec{g}(x,y,z) = \frac{I}{2\pi} \left(\frac{x \vec{e}_x + (y-a) \vec{e}_y + z \vec{e}_z}{(x^2 + (y-a)^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{(x-2b) \vec{e}_x + (y-a) \vec{e}_y + z \vec{e}_z}{((x-2b)^2 + (y-a)^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

2. Aufg. 2.1

2.1: nur langsam veränderliche Größen werden betrachtet.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_{\text{rot } \vec{H}} \cdot d\vec{a} = \iint (\vec{g} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{a} \quad (\text{u.Hg})$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint \vec{g} \cdot d\vec{a} \quad (\text{quasi stationäre})$$

2.2. Ableitung Kugelkoordinatensystem! Drehe das Zylinderkoordinatensystem!

H im Ursprung: $\vec{e}_\rho \frac{I}{2\pi g} = \vec{H}$

mit $g = \sqrt{y^2 + z^2}$

$$\vec{e}_\rho = \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} \left[z \vec{e}_y - y \vec{e}_z \right]$$

H um y_0 verschieben

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{2\pi} \frac{[-z \vec{e}_y + (y-y_0) \vec{e}_z]}{(y-y_0)^2 + z^2}$$

$$= \frac{I_0 \cos(\omega t)}{2\pi} \frac{[-z \vec{e}_y + (y-y_0) \vec{e}_z]}{(y-y_0)^2 + z^2}$$

2.3 $\frac{dI}{dy} = \frac{I}{b} \quad dI = \frac{I}{b} dy$

$$\vec{H} = \frac{I}{b} \int_{y=0}^b \frac{[-z \vec{e}_y + (y-y') \vec{e}_z]}{2\pi ((y-y')^2 + z^2)} dy'$$



2.2.3

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi b} \left[\int_{y'=c}^b \frac{-z \vec{e}_y}{(y-y')^2 + z^2} dy' + \int_{y'=0}^b \frac{(y-y') \vec{e}_z}{(y-y')^2 + z^2} dy' \right]$$

$$y-y' = u \quad -du = dy'$$

$$y_{\text{unten}} = y$$

$$y_{\text{oben}} = y-b$$

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi b} \left[\int_{y-b}^y \frac{-z \vec{e}_y}{(u^2 + z^2)} du + \int_{y-b}^y \frac{u \vec{e}_z}{(u^2 + z^2)} du \right]$$

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi b} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{z^2 + y^2}{z^2 + (y-b)^2} + \frac{z}{z} \left(\arctan \frac{y}{z} - \arctan \frac{y-b}{z} \right) \right]$$

mit $I = I_0 \cos(\omega t)$

24 Termfeld gleich Feld des Stromfadens nach 2.2

$$\vec{H} = \frac{I_0 \cos(\omega t)}{2\pi} \frac{[-z \vec{e}_y + (y - \frac{b}{2}) \vec{e}_z]}{(y - \frac{b}{2})^2 + z^2}$$

4.1 Wellenfom: $t = t_0 = 0$

$$e^{j(\omega t - kz)} = \text{const} = C_0$$

$$j\omega t - kz = C_1$$

$$-kz = C_3 \quad \text{oder} \quad kz = C_4$$

Ebene Welle

4.2 $j(\omega t - kz) = C$ Fläch konstant Phase

$$z = \frac{\omega t}{k} - C' \quad \text{mit } k = \text{konst}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\omega}{k} > 0 \quad \text{positive } z\text{-Richtung}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{v}{k} = \frac{2\pi f \lambda}{2\pi} = c \quad \text{mit Lichtgeschwindigkeit } c$$

4.3

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \vec{j} = 0$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon j\omega \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = -\vec{e}_x \frac{\partial H_y}{\partial z} + \vec{e}_z \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$-\vec{e}_x \frac{\partial H_y}{\partial z} = H_0 \vec{e}_x H_0 e^{j\omega t} e^{-jkz} \neq jk = \epsilon_0 j\omega \vec{E}$$

$$\vec{E} = H_0 e^{j\omega t} e^{-jkz} \frac{k}{\omega \epsilon_0} \vec{e}_x = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_0 e^{j\omega t} e^{-jkz} \vec{e}_x$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

$$\omega = 2\pi f \quad f \cdot \lambda = c_0$$

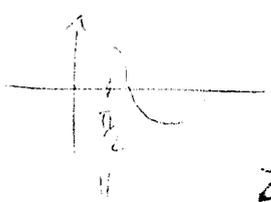
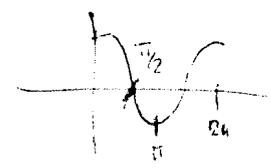
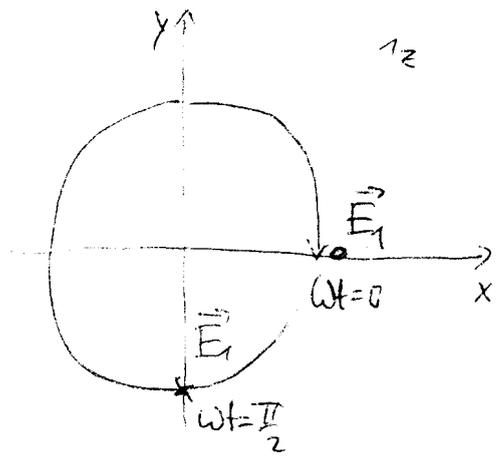
$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$\vec{E}_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_0 e^{j\omega t} e^{-jkz} \vec{e}_x \quad f-R z=0$$

f-R z=0

$$\vec{E}_1 = \text{Re}\{\vec{E}_1\} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$$

\vec{E}_1



$$\vec{E}_2 = \text{Re}\{\vec{E}_2\} = E_1 \sin(\omega t) \vec{e}_y$$

oder $\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

$$\vec{E}_2 = \text{Re}\{\vec{E}_2\} = E_1 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \vec{e}_x$$

$$\vec{E}_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_0 e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} e^{-jkz} \vec{e}_y$$

4.2.1 Planare ebene Wellen $\vec{E} \sim \vec{e}_x$
 sind auf andere Medien - Phasenverschiebung.